公式定律及要点突破

新课标

学考宝典

丛书主编：左传志　　本册主编：孙玉成

高中数学

知识、知能——系统总结提升
学法、用法——法法经典实用
重点、考点——点点弄通弄懂
例题、真题——全是精选妙题

中国工人出版社

新课标

学考宝典

丛书主编：左传志

本书主编：孙玉成

高中数学

中国工人出版社

图书在版编目(CIP)数据

学考宝典．数学/左传志主编．—北京:中国工人出版社,2008.6

ISBN 978－7－5008－4103－6

Ⅰ．学… Ⅱ．左… Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 073797 号

出版发行:中国工人出版社
地　　址:北京鼓楼外大街 45 号
邮　　编:100011
电　　话:(010)62350006(总编室)
发行热线:(010)62045450　62005042(传真)
网　　址:http://www.wp－china.com
经　　销:新华书店
印　　刷:河北满城县鑫源印刷厂
版　　次:2008 年 6 月第 1 版
　　　　　2008 年 6 月第 1 次印刷
开　　本:880 毫米×1230 毫米　1/64
字　　数:1500 千字
印　　张:48
定　　价:118.00 元(全套 9 册)

前　言

面对当前新一轮教育改革、教材改革、全面推行素质教育等热门话题，应广大师生要求，我们特邀请了长期从事一线教育工作、有着丰富备考经验的中学特、高级教师，精心编写了这套《学考宝典》系列丛书。

本丛书以新课标为导向，以新大纲为依据，以全面提高同学们综合素质为目标，全方位满足同学们的学习需求、备考需求。是一套地地道道的集学科基础知识、高考常考考点、学习方法策略、备考应战技巧等于一体的宝典。

本书具有以下特色：

全——囊括高中三年所有基础知识内容，适用对象全。

细——教材讲解细致、重点、考点分析细致。

精——精讲精析、举一反三、融会贯通。

透——考纲、课标研究透彻、疑难问题分析透彻。

新——理念新、体例新、题型新，资料新。

古人云："读书不耽分秒"。本书开本小巧，携带方便。排队中，等车时……随时拿出看一看。不需要大块时间，照样学到知识！这是一本充满智慧的书，能使你轻松过关斩将，技增艺长；这是一本充满谋略的书，能使你脱颖而出，圆名校梦想。

For the want of a nail the shoe was lost,
For the want of a shoe the horse was lost,
For the want of a horse the rider was lost,
For the want of rider the battle was lost,
For the want of a battle the kingdom was lost,
And all for the want of a horse shoe nail.

——Benjamin Franklin

因为少了一颗马蹄钉而掉了那马蹄铁,
因为掉了那个马蹄铁而失去了那匹马,
因为失去了那匹马而缺了那骑兵,
因为缺了那骑兵而输了那战役,
因为输了那战役而丢了整个国家,
悔之晚矣！全是当初少了一颗马蹄钉。

——本杰明·富兰克林

目 录

必修部分

必修 1

必修 2

必修 3

必修 4

必修 5

选修系列 2

选修 2 – 1

选修 2 – 2

选修 2 – 3

选修系列 1

选修 1 – 1

选修 1 – 2

必修1

课标要求

1. 集合

(1)集合的含义与表示

①通过实例,了解集合的含义,体会元素与集合的“属于”关系.

②能选择自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题,感受集合语言的意义和作用.

(2)集合间的基本关系

①理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.

②在具体情境中,了解全集与空集的含义.

(3)集合的基本运算

①理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个简单集合的并集与交集.

②理解在给定集合中一个子集的补集的含义,会求给定子集的补集.

③能使用 Venn 图表达集合的关系及运算,体会直观图示对理解抽象概念的作用.

2. 函数概念与基本初等函数 I

(1)函数

①通过丰富实例,进一步体会函数是描述变量之间的依赖关系的重要数学模型,在此基础上学习用集合与对应的语言来刻画函数,体会对应关系在刻画函数概念中的作用;了解构成函数的要素,会求一些简单函数的定义域和值域;了解映射的概念.

②在实际情境中,会根据不同的需要选择恰当的方

法(如图象法、列表法、解析法)表示函数.

③通过具体实例,了解简单的分段函数,并能简单应用.

④通过已学过的函数特别是二次函数,理解函数的单调性、最大(小)值及其几何意义;结合具体函数,了解奇偶性的含义.

⑤学会运用函数图象理解和研究函数的性质.

(2)指数函数

①通过具体实例(如细胞的分裂,考古中所用的^{14}C的衰减,药物在人体内残留量的变化等),了解指数函数模型的实际背景.

②理解有理指数幂的含义,通过具体实例了解实数指数幂的意义,掌握幂的运算.

③理解指数函数的概念和意义,能借助计算器或计算机画出具体指数函数的图象,探索并理解指数函数的单调性与特殊点.

④在解决简单实际问题的过程中,体会指数函数是一类重要的函数模型.

(3)对数函数

①理解对数的概念及其运算性质,知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数;通过阅读材料,了解对数的发现历史以及对简化运算的作用.

②通过具体实例,直观了解对数函数模型所刻画的数量关系,初步理解对数函数的概念,体会对数函数是一类重要的函数模型;能借助计算器或计算机画出具体对数函数的图象,探索并了解对数函数的单调性与特殊点.

③知道指数函数$y=a^x$与对数函数$y=\log_a x$互为反函数($a>0,a\neq1$).

(4)幂函数

通过实例,了解幂函数的概念;结合函数$y=x$,$y=x^2$,$y=x^3$,$y=\frac{1}{x}$,$y=x^{\frac{1}{2}}$的图象,了解它们的变化情况.

(5)函数与方程

①结合二次函数的图象,判断一元二次方程根的存在性及根的个数,从而了解函数的零点与方程根的联系.

②根据具体函数的图象,能够借助计算器用二分法求相应方程的近似解,了解这种方法是求方程近似解的常用方法.

(6)函数模型及其应用

①利用计算工具,比较指数函数、对数函数以及幂函数增长差异;结合实例体会直线上升、指数爆炸、对数增长等不同函数类型增长的含义.

②收集一些社会生活中普遍使用的函数模型(指数函数、对数函数、幂函数、分段函数等)的实例,了解函数模型的广泛应用.

知识细解

第一章　集合与函数概念

一、集合的基本概念与运算

(一)元素与集合

1. 集合的定义

一般地,我们把研究对象统称为元素. 把一些元素组成的总体叫做集合(简称为集). 通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示元素.

2. 集合中元素的特征

(1)确定性:给定的集合,它的元素必须是确定的,也就是说,给定一个集合,那么任何一个元素在不在这个集合中就确定了. 例如,"中国的直辖市"构成一个集合,北京、上海、天津、重庆在这个集合中,杭州、南京、广州……

不在这个集合中. “身材较高的人”不能构成集合;因为组成它的元素是不确定的.

(2) 互异性：一个给定集合中的元素是互不相同的(或说是互异的). 也就是说,集合中的元素是不重复出现的. 相同元素、重复元素,不论多少,只能算作该集合的一个元素.

(3) 在一个集合中,不考虑元素之间的顺序只要元素完全相同,就认为是同一个集合.

3. 集合相等

只要构成两个集合的元素是一样的,我们就称这两个集合是相等的.

4. 元素与集合的关系

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 集合 A,记作 $a\in A$;如果 a 不是集合 A 中的元素,就说 a 集合 A,记作 $a\notin A$.

全体非负整数组成的集合称为非负整数集(或自然数集),记作 $\mathbf{N}$;

所有正整数组成的集合称为正整数集(在自然数集中排除0的集合),记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$;

全体整数组成的集合称为整数集,记作 $\mathbf{Z}$;

全体有理数组成的集合称为有理数集,记作 $\mathbf{Q}$;

全体实数组成的集合称为实数集,记作 $\mathbf{R}$.

拓展与提示:(1) 无序性常常作为计算时验证的重要依据.

(2) 注意 $\mathbf{N}$ 与 $\mathbf{N}^*$ 的区别. $\mathbf{N}^*$ 为正整数集,而 $\mathbf{N}$ 为非负整数集,即 $0\in\mathbf{N}$ 但 $0\notin\mathbf{N}^*$.

(3)集合的分类

按元素个数 $\begin{cases} \text{有限集:含有有限个元素的集合叫做有限集.} \\ \text{无限集:含有无限个元素的集合叫做无限集.} \end{cases}$

按元素的特征可分为:数集,点集,形集等等.

特别地,至少含有一个元素的集合叫做非空集合;不含有任何元素的集合叫做空集($\varnothing$),只含有一个元素的集合叫做单元素集.

例　已知 $P=\{x,y,1\}$,$Q=\{x^2,xy,x\}$,且 $P=Q$,求 x,y 的值.

解析　由 $\begin{cases} y=x^2, \\ xy=1, \end{cases}$ ①或 $\begin{cases} y=xy, \\ x^2=1, \end{cases}$ ②

解①得　$x=y=1$ 这与集合中元素的互异性相矛盾.

解②得　$x=-1$ 或 1(舍去)

这时 $y=0$

$\therefore x=-1,y=0.$

6. 集合的表示方法

(1)列举法:把集合中的所有元素一一列举出来,并用花括号"$\{\}$"括起来表示集合的方法叫做列举法.

适用条件:有限集或有规律的无限集.

形式:$\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$

(2)描述法:用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法.具体方法是:在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值(或变化)范围;再画一条竖线,在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征.

适用条件:一般适合于无限集,有时也可以是有限集.

形式:$\{x\in D|p(x)\}$.其中 x 为元素,$p(x)$表示特征.

> **拓展与提示：** 从上下文关系来看，集合中的元素的范围（如 $x \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{Z}$）已经很明确，那么 $x \in D$ 可以省略，只写其元素 x. 如 $\{x \in R \mid x < 10\}$ 可以表示为 $\{x \mid x < 10\}$.

（3）韦恩图法：把集合中的元素写在一条封闭曲线（圆、椭圆、矩形等）内.

例　用适当的方法表示下列集合，并指出它是有限集还是无限集.

（1）由所有非负奇数组成的集合；

（2）由所有小于 10 既是奇数又是质数的自然数组成的集合；

（3）平面直角坐标系内所有第三象限的点组成的集合；

（4）方程 $x^2+x+1=0$ 的实数根组成的集合.

解析　（1）由所有非负奇数组成的集合可表示为：$A=\{x \mid x=2n+1, n \in \mathbf{N}\}$. A 是无限集.

（2）满足条件的数有 3，5，7，所以所求集合为：$B=\{3,5,7\}$. 集合 B 是有限集.

（3）所求集合可表示为：$C=\{(x,y) \mid x<0$ 且 $y<0\}$. 集合 C 是无限集.

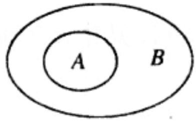
（4）因为方程 $x^2+x+1=0$ 的判别式的 $\Delta<0$，故无实数. 所以方程 $x^2+x+1=0$ 的实根组成的集合是空集 $\varnothing$，是有限集.

（二）集合的基本关系

1. 子集：一般地，对于两个集合 A、B，如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素，我们就说这两个集合有包含关系，称集合 A 为集合 B 的子集，记作

$A \subseteq B$（或 $B \supseteq A$），

读作"A 含于 B"（或"B 包含 A"）.



数学表述法可简述为:若 $x\in A\Rightarrow x\in B$,则集合 A 是集合 B 的子集.(如图)

2. 集合相等:如果集合 A 是集合 B 的子集($A\subseteq B$),且集合 B 是集合 A 的子集($B\subseteq A$),此时,集合 A 与集合 B 中的元素是一样的,因此,集合 A 与集合 B 相等,记作

$$A=B.$$

数学表述法可描述为:对于集合 A、B,若 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,则集合 A、B 相等.

3. 真子集:如果集合 $A\subseteq B$,但存在元素 $x\in B$,且 $x\notin A$,我们称集合 A 是集合 B 的真子集,记作

$$A\subsetneqq B(\text{或 } B\supsetneqq A).$$

或说:若集合 $A\subseteq B$,且 $A\neq B$,则集合 A 是集合 B 的真子集.

4. 空集:不含任何元素的集合叫做空集,记为 $\varnothing$,并规定:空集是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集.

拓展与提示:(1)$\varnothing\subseteq A$,$A\subseteq A$.

(2)$\varnothing\subsetneqq B$(其中 B 为非空集合)

(3)对于集合 A,B,C,若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

(4)对于集合 A,B,C,若 $A\subsetneqq B$,$B\subsetneqq C$,则 $A\subsetneqq C$.

(5)对于集合 A,B,若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则 $A=B$.

(6)含 n 元素的集合的全部子集个数为 2^n 个,真子集有 2^n-1 个,非空子集有 2^n-1 个,非空真子集有 2^n-2 个.

(7)$\{a\}\subseteq A$ 与 $a\in A$ 是不同的,前者为包含关系,后者为属于关系.

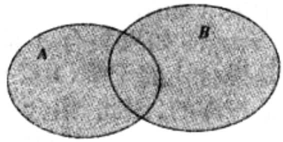
(三)集合间的基本运算

1. 并集

一般地,由所有属于集合 A 或集合 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$(读作"A 并 B"),即

$A\cup B=\{x|x\in A，或 x\in B\}$.

可用 Venn 图表示为



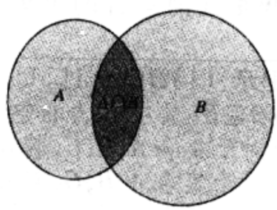
拓展与提示：对于任意集合 A、B，有(1)$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$；(2)$A\cup B=B\cup A$；(3)$A\subseteq(A\cup B)$，$B\subseteq(A\cup B)$；(4)$A\cup B=A\Leftrightarrow A\supseteq B$.

2. 交集

一般地，由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$（读作"A 交 B"），即

$A\cap B=\{x|x\in A，且 x\in B\}$.

可用 Venn 图表示为

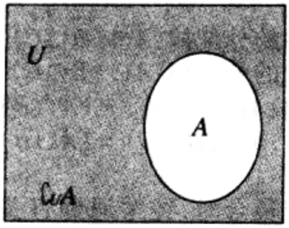


拓展与提示：对于任意集合 A、B，有(1)$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$；(2)$A\cap B=B\cap A$；(3)$(A\cap B)\subseteq A$，$(A\cap B)\subseteq B$；(4)$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；(5)$(A\cap B)\subseteq(A\cup B)$.

3. 全集与补集

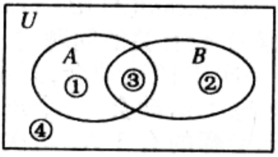
(1)全集：一般地，如果一个集合含有我们所研究问题中所涉及的所有元素，那么就称这个集合为全集，通常记作 U.

(2)补集：对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，简称为集合 A 的补集，记作 $\complement_U A=\{x|x\in U，且 x\notin A\}$.

用 Venn 图表示为 

拓展与提示:(1)$A\cap\complement_U A=\varnothing$,$A\cup\complement_U A=U$;(2)$\complement_U(\complement_U A)=A$,$\complement_U U=\varnothing$,$\complement_U\varnothing=U$;(3)$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$,$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

(4)下图中的①~④分别表示为



①——$A\cap\complement_U B$　②——$\complement_U A\cap B$

③——$A\cap B$　④——$\complement_U A\cap\complement_U B$

设集合 $A=\{x^2,2x-1,-4\}$,$B=\{x-5,1-x,9\}$,若 $A\cap B=\{9\}$,求 $A\cup B$.

由 $A\cap B=\{9\}$ 得,$9\in A$.

$\therefore x^2=9$ 或 $2x-1=9$.

①由 $x^2=9$ 得,$x=\pm3$. 当 $x=3$ 时,$A=\{9,5,-4\}$,$B=\{-2,-2,9\}$,与元素的互异性矛盾.

当 $x=-3$ 时,$A=\{9,-7,-4\}$,$B=\{-8,4,9\}$,此时,$A\cup B=\{-8,-7,-4,4,9\}$.

②由 $2x-1=9$ 得 $x=5$.

当 $x=5$ 时,$A=\{25,9,-4\}$,$B=\{0,-4,9\}$,此时,$A\cap B=\{-4,9\}$,与题设矛盾.

综上所述,$A\cup B=\{-8,-7,-4,4,9\}$.

4. 集合运算的分配律与结合律

交对并的分配律:$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

并对交的分配律:$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

结合律:$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

5. 集合中元素的个数:

在研究集合时,经常遇到有关集合中元素的个数问题. 我们把含有限个元素的集合 A 叫做有限集,用 card 来表示有限集合 A 中元素的个数. 例如:$A=\{a,b,c\}$,则 $\mathrm{card}(A)=3$.

一般地,对任意两个有限集 A,B,有 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$.

当且仅当 $A\cap B=\varnothing$ 时,$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)$.

解与集合中元素个数有关的问题时,常用 Venn 图.

例 学校先举办了一次田径运动会,某班有 8 名同学参赛,又举办了一次球类运动会,这个班有 12 名同学参赛,两次运动会都参赛的有 3 人. 两次运动会中,这个班共有多少名同学参赛?

解析 设 $A=\{$田径运动会参赛的学生$\}$,

$B=\{$球类运动会参赛的学生$\}$,

那么

$A\cap B=\{$两次运动会都参赛的学生$\}$,

$A\cup B=\{$所有参赛的学生$\}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(A\cup B)&=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)\\&=8+12-3=17.\end{aligned}$$

答:两次运动会中,这个班共有 17 名同学参赛.

二、函数及其表示

(一)函数的概念

1. 定义

一般地,我们有:

设 A,B 是非空的数集,如果按照某种确定的对应关系 f,使对于集合 A 中的任意一个数 x,在集合 B 中都有唯