

高等工程数学

李正良 朱宏 编
张先迪 舒兰



电子科技大学出版社

高等工程数学

李正良 朱宏 编
张先迪 舒兰

电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书以精练的语言,介绍了包括线性代数基础、数理统计方法、随机过程初步、图论和组合数学基础、模糊集合基本理论等六个方面的工程数学知识。力求以有限的篇幅,尽可能地反映出现代工程数学的概况。

本书是工程硕士研究生的工程数学教材,也可供工程技术人员阅读参考。

声 明

本书无四川省版权防盗标识,不得销售;版权所有,违者必究,举报有奖,举报电话:(028)6636481 6241146 3201496

高等工程数学

李正良 朱 宏 编
张先迪 舒 兰

出 版:电子科技大学出版社
(成都建设北路二段四号 邮编:610054)

责任编辑:王仕德

发 行:新华书店经销

印 刷:四川建筑印刷厂

开 本:787×1092 1/32 印张 11.25 字数 242 千字

版 次:1999 年 7 月第一版

印 次:1999 年 7 月第一次印刷

书 号:ISBN 7-81065-188-9/O·8

印 数:2000 册

定 价:14.00 元

序 言

本书是工程硕士研究生的公共基础学位课程《工程数学》的专门教材。具有高等数学知识的工程技术人员也可以将本书作为学习工程数学的参考书。

工程数学由多门数学课程组成,它的涉及面很广。本书的选材参照我校工科硕士生各专业的教学计划中数学课程设置的情况,确定了线性代数基础、数理统计、随机过程、图论、组合数学、模糊数学等六个方面的内容。本书作者都是多年从事相应课程研究生教学工作的,他们都有丰富的教学经验和科研经历,但毕竟是第一次编写这样一本内容广泛而篇幅不多的教材,缺点与错误在所难免。希望通过反复的教学实践,广泛听取校内外专家和各位读者的意见和建议,使本教材得以不断改进和完善。

本书的编写工作由李正良、朱 宏主持,与张先迪、舒 兰共同完成。具体的编写是:第一章李正良;第二、三章朱 宏;第四、五章张先迪;第六章舒 兰。书中引用了国内外有关教材中的一些例题和习题,谨在此表示谢意。

再次恳请读者不吝指正书中的不足之处。

最后,我们由衷感谢本书责任编辑王仕德女士,她严谨的工作作风给我们留下深刻印象。

编 者

1999年4月

目 录

第一章 线性代数基础	(1)
§ 1.1 矩阵的运算	(1)
§ 1.2 空间分解与维数定理	(22)
§ 1.3 商空间	(25)
§ 1.4 线性流形	(29)
§ 1.5 特征值与特征向量	(31)
§ 1.6 欧氏空间的度量问题	(40)
§ 1.7 矩阵的分解	(57)
§ 1.8 正交矩阵及其应用	(72)
习题一	(81)
第二章 数理统计基本方法	(84)
§ 2.1 数理统计的基本概念	(84)
§ 2.2 参数估计	(91)
§ 2.3 假设检验	(105)
§ 2.4 回归分析	(116)
§ 2.5 方差分析	(127)
习题二	(133)
第三章 随机过程引论	(139)
§ 3.1 随机过程的概念	(139)

§ 3.2	几类重要的随机过程	(152)
§ 3.3	马尔可夫过程	(157)
§ 3.4	平稳随机过程	(168)
§ 3.5	均方微积分与随机微分方程	(174)
习题三		(185)
第四章	组合数学	(188)
§ 4.1	排列与组合	(188)
§ 4.2	鸽巢原理与容斥原理	(196)
§ 4.3	母函数	(203)
§ 4.4	递推关系	(207)
§ 4.5	常系数线性递推关系	(211)
习题四		(218)
第五章	图 论	(224)
§ 5.1	图的概念	(224)
§ 5.2	路、连通性与最短路.....	(229)
§ 5.3	树及其应用	(234)
§ 5.4	偶图、匹配及其应用.....	(238)
§ 5.5	图论的其他几个问题	(246)
§ 5.6	网络流	(258)
习题五		(268)
第六章	模糊与控制	(274)
§ 6.1	模糊集合的定义及运算表示	(277)
§ 6.2	模糊集合的运算及其性质	(280)

§ 6.3	模糊集合与普通集合间的转化	(284)
§ 6.4	扩展原理与模糊数	(289)
§ 6.5	隶属函数的确定	(292)
§ 6.6	模糊模式识别	(300)
§ 6.7	模糊关系与聚类分析	(306)
§ 6.8	模糊推理	(318)
§ 6.9	模糊控制	(324)
§ 6.10	模糊控制在家电产品中的应用.....	(335)
习题六		(346)

第一章 线性代数基础

§ 1.1 矩阵的运算

在物资调运中,某类物质有 3 个产地、5 个销地,它的调运情况可在表 1.1 中反映。

表 1.1

调 运 产地	销地 吨数	I	II	III	IV	V
		I	II	III	IV	V
I		0	3	4	7	5
II		8	2	3	0	2
III		5	4	0	6	6

如果我们用 a_{ij} ($i=1,2,3; j=1,2,3,4,5$) 表示从第 i 个产地运往第 j 个销地的运量(如 $a_{12}=3; a_{24}=0, a_{35}=6$), 这样就能把调运方案表简写成一个 3 行 5 列的数表(矩阵)。

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 7 & 5 \\ 8 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

在通信理论中考虑的两维离散付氏变换是由下式定义的:

$$c(k_1, k_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} X(m_1, m_2) \omega_1^{k_1 m_1} \omega_2^{k_2 m_2}$$

其中

$$\omega_l = e^{-\frac{2\pi j}{N_l}} \quad (l = 1, 2)$$

$$k_1, m_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1, \quad k_2, m_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1$$

因此离散付氏变换是数据

$$X(m_1, m_2), c(k_1, k_2) \quad (0 \leq k_1, m_1 \leq N_1 - 1, \\ 0 \leq k_2, m_2 \leq N_2 - 1)$$

之间的变换。对 $N_1 \times N_2$ 个数据 $X(m_1, m_2)$, 将其中具有相同的 m_1 的数据按 m_2 由小到大次序排成一个横行, 这样每一横行中有 N_2 个数据, 并且一共可排 N_1 个横行。于是构成一个有 N_1 个横行、 N_2 个竖列的数据阵列:

$$\begin{pmatrix} X(0,0) & X(0,1) & \cdots & X(0,N_2-1) \\ X(1,0) & X(1,1) & \cdots & X(1,N_2-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X(N_1-1,0) & X(N_1-1,1) & \cdots & X(N_1-1,N_2-1) \end{pmatrix}$$

一般地有

定义 1 由数 $a_{ij} (i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n)$ 所组成的阵列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵,用大写字母 A 表示。这个矩阵有 m 个横行(称为行), n 个竖列(称为列),因此我们也称 A 是 m 行、 n 列的矩阵,或 $m \times n$ 矩阵,简记为

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

a_{ij} 称为 A 的第 i 行 j 列的元素。

一、矩阵的代数运算

1. 矩阵的加法

定义 2 设两同型矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$, 规定

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

并称 $A+B$ 是 A 与 B 的和。

从定义可知,只有同型矩阵才能相加,且同型矩阵之和仍为同型矩阵。此外,还有以下性质:

$$A + B = B + A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + 0 = 0 + A = A \quad (0 \text{ 是零矩阵})$$

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 则称

$$-A = (-a_{ij})_{m \times n}$$

为 A 的负矩阵。由此,我们可以定义矩阵的减法:设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 为同型矩阵,定义 A 与 B 的差为

$$A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})$$

2. 矩阵的数量乘法

定义 3 以数 k 乘矩阵 A 的每一个元素所得的矩阵, 称为数 k 与矩阵 A 的数量乘积, 简称数乘, 记为 kA 。

矩阵的加法和数乘统称为矩阵的线性运算。容易验证矩阵的数乘满足以下规律:

$$1^\circ 1A = A$$

$$2^\circ (kl)A = k(lA)$$

$$3^\circ (k+l)A = kA + lA$$

$$4^\circ k(A+B) = kA + kB$$

3. 矩阵的乘法

在给出矩阵乘法的定义之前, 我们先看一个引出矩阵乘法的实际问题。

从三个产地到三个销地的某货物购置费用问题的产销矩阵

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{产地} \\ \text{销地} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \end{matrix} \end{matrix}$$

设三个产地的该货物单价分别为 a_{11}, a_{12}, a_{13} (元), 得价格矩阵

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13})$$

第 I、II、III 个销地的购置费用分别为

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$$

$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$$

从而得到费用矩阵

$$\begin{aligned}
 C &= (c_{11}, c_{12}, c_{13}) \\
 &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}, a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\
 &\quad + a_{13}b_{32}, a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33})
 \end{aligned}$$

则定义费用矩阵 C 为单价矩阵 A 与产销矩阵 B 的乘积, 记为 $C=AB$, 即

$$(c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13}) = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}) \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

一般矩阵的乘法定义如下:

定义 4 设 $A=(a_{ik})_{m \times p}$, $B=(b_{kj})_{p \times n}$, 则矩阵 $C=(c_{ij})_{m \times n}$ 称为 A 与 B 的乘积, 其中

$$\begin{aligned}
 c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \\
 (i &= 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)
 \end{aligned}$$

记为 $C=AB$

由矩阵乘法的定义可以看出, 矩阵 A 与 B 的乘积 C 的第 i 行第 j 列的元素等于第一个矩阵 A 的第 i 行与第二个矩阵 B 的第 j 列对应元素乘积的和。当然, 在乘法的定义中, 我们要求第二个矩阵的行数与第一个矩阵的列数相等。

例 1 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

求 AB, AD 。

解

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 2 & 1 \times 3 + 2 \times 1 + 3 \times 2 \\ 3 \times 1 + 2 \times 3 + 1 \times 2 & 3 \times 3 + 2 \times 1 + 1 \times 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$$

AD 无意义。

例 2 考虑下列线性方程组

[illegible]

设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

则

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = b$$

即方程组可表示为如下矩阵形式:

$$AX = b$$

矩阵乘法满足下列运算规律:

$$(AB)C = A(BC)$$

$$k(AB) = (kA)B = A(kB), (k \text{ 为数})$$

$$A(B + C) = AB + AC, (B + C)A = BA + CA$$

$$|AB| = |A||B|, (A, B \text{ 是同阶方阵})$$

必须指出, 矩阵的乘法一般不满足交换律, 即一般有

$$AB \neq BA$$

例如, 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

则

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

显然, $AB \neq BA$ 。从此例还可见, A, B 都是非零矩阵, 但 $AB = 0$ 。由此可知, 矩阵的乘法不满足消去律, 即 $A \neq 0$ 时, 由 $AB = AC$ 不能推出 $B = C$ 。事实上, 由

$$AB - AC = A(B - C) = 0$$

不能推出

$$B - C = 0$$

设 A 是方阵, k 是正整数, 定义 A 的 k 次幂 (记为 A^k) 为

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \uparrow}$$

并且规定 $A^0 = E$ (E 为与 A 同阶的单位阵)。可以证明: 当 m, k 为正整数时, 有

$$A^m A^k = A^{m+k}$$

$$(A^m)^k = A^{mk}$$

但是, 当 A 与 B 不可交换时, 有

$$(AB)^k \neq A^k B^k$$

定义 5 设 $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ 是 x 的 k 次多项

式, A 是 n 阶矩阵, 则

$$f(A) = a_k A^k + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

称为矩阵 A 的 k 次多项式。

由定义容易证明: 若 $f(x), g(x)$ 为多项式, A, B 为 n 阶矩阵, 则

$$f(A)g(A) = g(A)f(A)$$

但是一般情况下

$$f(A)g(B) \neq g(B)f(A)$$

4. 矩阵的转置

定义 6 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

则称

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 A 的转置矩阵。

显然, $m \times n$ 矩阵的转置是 $n \times m$ 矩阵。且有

$$(A^T)^T = A \quad (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T \quad (kA)^T = kA^T$$

若 $A^T = A$, 则称 A 为对称矩阵; 若 $A^T = -A$, 就称 A 为反对称矩阵。显然, 对称矩阵和反对称矩阵都是方阵, 对称矩阵 A 中的元素间有关系

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j$$

反对称矩阵 A 的元素间有关系

$$a_{ij} = -a_{ji}, \quad \forall i, j$$

例如

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

分别为反对称和对称矩阵。

例 3 对任意矩阵 A , AA^T 和 $A^T A$ 都是对称的。

例 4 设 A, B 为同阶方阵, A 为反对称矩阵, B 是对称矩阵, 则 $AB - BA$ 为对称矩阵。

$$\begin{aligned} \text{证} \quad (AB - BA)^T &= (AB)^T - (BA)^T \\ &= B^T A^T - A^T B^T \\ &= B(-A) - (-A)B \\ &= AB - BA \end{aligned}$$

即 $AB - BA$ 为对称矩阵。

5. 矩阵的逆

定义 7 设 A 是方阵, 如果存在一个方阵 B , 使得

$$AB = BA = E$$

则称 A 是可逆矩阵, 简称 A 可逆, 并称 B 是 A 的逆矩阵, 记为 $A^{-1} = B$ 。

定理 1 设 A 是一个可逆矩阵, 则它的逆矩阵是唯一的。

证 设 A 有两个逆矩阵 B 和 C , 即

$$AB = BA = E$$

$$AC = CA = E$$

于是有

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$$

故可逆矩阵的逆矩阵是唯一的。

证毕

定理 2 设 A 是可逆矩阵, 则 $|A| \neq 0$ 。

证 因为 A 是可逆矩阵, 所以

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

于是

$$|A||A^{-1}| = |A^{-1}||A| = |E| = 1$$

故 $|A| \neq 0$ 。

证毕

定义 8 设 A 是 n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称方阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 A 的伴随矩阵, 其中 A_{ij} 是 A 的行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式。

根据行列式按一行(或列)展开定理, 可证

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

则借助于 A 的伴随矩阵 A^* , 我们可以得到 A 可逆的充分必要条件及 A^{-1} 的表达式。

定理 3 设 A 为方阵, 则 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$, 且当 A 可逆时, 有