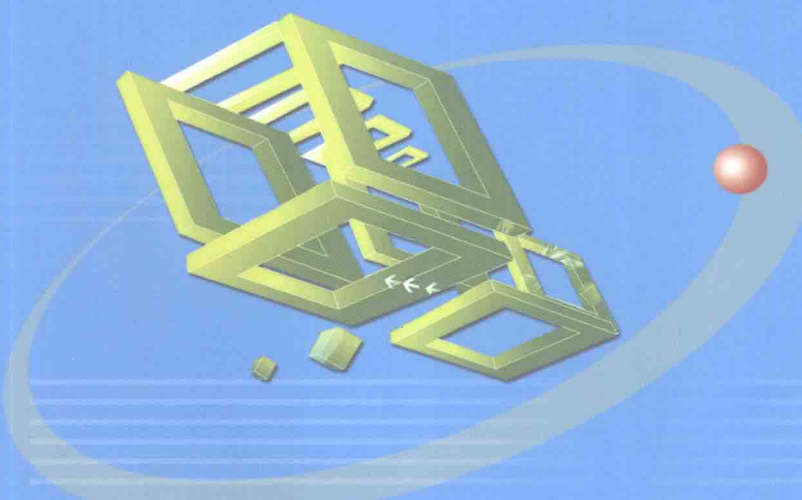
普通高等院校基础课程应用型特色规划教材

大学数学（文科）

周德才　林　益　主编
王济华　主审



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等院校基础课程应用型特色规划教材

大学数学(文科)

周德才　林　益　主编

王济华　主审

北京邮电大学出版社

·北京·

内容简介

本书是为大学法学、新闻、社会学、哲学、中文、外语等文科专业学生而编写的大学数学教材，内容包括了有关微积分、线性代数及概率统计的基础知识，并辅以优秀的数学计算软件 Mathcad，呈模块方式供读者选用。本书语言流畅、通俗易懂，便于自学；内容有趣、方法简洁，便于应用。

数学对文科学生而言既是一个重要的工具，又提供了一种重要的基本思维方式。因此本书编写中注重在介绍数学知识的同时，传播一些重要的数学思想方法，培养学生的数学思维方式，并让学生了解一些社会科学中十分重要的数学模型，为学生今后的发展奠定较坚实的基础。

本书也适用于对数学知识要求较低的理工、经管类专业的学生。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学(文科)/周德才，林益主编．—北京：北京邮电大学出版社，2008

ISBN 978-7-5635-1778-7

Ⅰ．大…　Ⅱ．①周…②林…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 106085 号

书　　名：大学数学(文科)

作　　者：周德才　林　益

责任编辑：陈　瑶

出版发行：北京邮电大学出版社

社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)

发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578

E-mail：publish@bupt.edu.cn

经　　销：各地新华书店

印　　刷：北京忠信诚胶印厂

开　　本：787 mm×960 mm　1/16

印　　张：16.25

字　　数：356 千字

印　　数：1—3 000 册

版　　次：2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-1778-7　　定　价：26.00 元

前　　言

本书是为大学法学、新闻、社会学、哲学、中文、外语等文科专业学生而编写的大学数学教材。

众所周知,生活离不开数学,数学让人人受益。确实,当今人们生活中不得不面对一些麻烦却又挥之不去的问题:助学贷款、银行按揭、股市指数的升降、商家的价格大战、投资理财、风险决策、疾病的传播、人口问题……揭示其中的奥妙,采取正确的应对确实是人的素质的体现。这种能识别谬误,能探索偏见,能估计风险,能提出变通办法的能力在当今技术时代日益显得重要。显然这种能力的培养离不开数学,离不开数学所提供的特色思考方式,包括建立模型、抽象化、最优化、逻辑分析、从数据进行推断及符号的应用等等。只有数学才能使我们更好地了解我们所生活的充满信息的世界。美国国家研究委员会在一份题为《人人关心数学教育的未来》的研究报告中指出"数学上的文盲既是个人的损失又是国家的债务"。这些正是作者的初衷,与别的文科教材不同,我们要求文科学生也能通过所学的知识与方法来解决点实际问题。

数学不仅是工具,而且是人类文化的一个深刻又强有力的部分。数学追求一种完美的理性认识,要求研究对象有明确无误的刻画,从简单而明确的命题出发,以准确而令人信服的逻辑推理达到其明确的结论。"正是这种精神使人类思维运用到最完善的程度,亦正是这种精神试图决定性地影响人类的物质、道德和社会生活。试图回答人类自身存在的问题"。因此数学对于现代的文科学生而言,在文化结构上是不能缺少的。

文科专业似乎用不上数学,但有识之士指出:"由于最近 20 多年的进步,社会科学的许多重要领域已经发展到使不懂数学的人望尘莫及的阶段。""当今,数学社会科学已完美地建立起来了,数理经济学、语言学、社会选择与对策论均涉及很精致的数学体系……数学社会科学既有宏伟的目标,也有适中的目标。宏伟的目标是通过结构设计来预测并控制大范围社会系统,以消除诸如经济萧条等灾难;比较适中的目标是制定数学指数,如权力指数,以及建立一些非常特殊的社会过程的模型。"因此,数学方法的运用正在极大地影响社会科学工作者观察问题的角度、思考问题的方式,从而有可能解决使用习惯的、传统的研究方法所无法解决的某些难题。数学将给每个文科学生带来灿烂的发展前景!

基于数学对文科学生而言既是一个重要的工具又是一种基本思维方式的特点,本书安排了有关微积分、线性代数及概率统计的内容,并辅以优秀的数学计算软件 Mathcad,

总学时在 80 学时左右，并以模块方式供读者选用。在长期的教学实践中，我们提出“快乐数学”的理念。“快乐数学”是给学习数学一个舒适环境，它要告诉学生：数学要解决的问题是那么有趣，且与每个人息息相关；解决问题的思想充满着智慧，而解决方法却是那么的简明。它要激发学习的兴趣，它要让学生经历奋斗，在解决成功时得到欢乐、感受成就。因此本书编写中注重在介绍数学知识的同时，传播一些重要的数学思想方法，培养学生的数学思维方式，并让学生了解一些社会科学中十分重要的数学模型，为学生今后的发展奠定较坚实的基础。

本书在原《大学文科数学讲义》基础上，由周德才、林益编写而成，王济华主审。王济华、梅家斌认真地审阅了该书，并提出了宝贵的修改意见，在此特以致谢！

鉴于时间仓促，作者水平有限，书中不足之处恳请读者批评指正。

编　者

目　　录

第 2 章 导数及其应用

第1章　函数与极限

在那些能作乐曲的人们中，只有极少数具有音乐天才。然而，懂音乐，甚至能仿制乐曲，或者至少能欣赏音乐的人，却是大量的。我们相信，能够理解简单的数学思想的人，相对来说，不会少于通常所谓的音乐爱好者，并且只要能去掉人们从幼年时代的经验中大量形成的对数学的成见，那么他们的兴趣就会大大提高。

——拉德梅彻(H. Rademacher)

函数是微积分研究的主要对象，极限方法是微积分研究所采用的基本方法。本章将对函数、极限等有关概念进行较系统的介绍，为以后各章的学习作好准备。

1.1　函数的概念与性质

1.1.1　函数的概念

在科学和工程技术中，常常遇到各种不同的量。有的量在某过程中不变化，即始终保持一定的数值，这种量称为常量；有的量在某过程中发生变化，即取得不同的数值，这种量称为变量。

例1　在飞机起飞前旅客登机的过程中，飞机离地面的高度、与目的地的距离、飞机的速度、飞机的载油量等都是常量；旅客在机舱中的数目、飞机的载货量等都是变量。然而在飞机飞行过程中飞机离地面的高度、与目的地的距离、飞机的速度、飞机的载油量等都是变量；旅客在机舱中的数目、飞机的载货量等都是常量。此例表明所谓变量、常量是对所研究的某个过程而言的。

在某种自然现象或某种科学技术过程中，往往有多个量发生变化，一种事物的变化或运动往往引起其他事物的变化或运动。它们之间可能有一定的依赖关系，这种相互依赖、相互联系的现象，可能遵循一定的规律，这些规律正是人们要研究的对象。特别是其中数量之间的关系，经过抽象就是现在我们要讨论的“函数”。

例2　边长为 x 的正方形，其面积 S 与边长 x 有关。S 与 x 的关系体现在 $S=x^2$ 之

中。现在把 x 看作是一个正方形瓷砖的边长，这种瓷砖每块价 c 元。一个建筑物需 y 块瓷砖。瓷砖总价格 $T=cy$(元)。当价格 c 变化或需要量 y 发生变化时就可用公式 $T=cy$ 计算出 T。当 x 变化时，S 随之而变；反之，当 S 变化时，x 也随之而变化。在 $T=cy$ 中，c 或 y 变化，T 都会变化。在数学上就称 S 为 x 的函数，T 是 c，y 的函数。

现在抛开上述例子各自的具体含义，将其进行抽象。

定义 设在我们讨论的过程中的两个变量 x 和 y，它们之间有某种联系，这种联系表现在：当 x 在某个范围 D 内取定了一个数时，按照某种对应法则 f，就有一个确定的数 y 与此数 x 相对应，这时称 y 是 x 的函数，用符号 $y=f(x)$ 表示，$x\in D$。有时也用 $f:x\to y$ 表示。x 称为自变量，y 称为因变量或函数。x 的变化范围 D 称为函数的定义域，y 的变化范围称为函数的值域，一般记为 W。

在中学，已学过下列函数：

常值函数	$y=c$，其中 c 是一常数
幂函数	$y=x^{\mu}$，其中 μ 是实数
指数函数	$y=a^{x}$，其中 $a>0,a\neq 1$
对数函数	$y=\log_a x$，其中 $a>0,a\neq 1,x>0$
三角函数	$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x$ 等
反三角函数	$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$ 等

以上函数统称为基本初等函数。

基本初等函数的图形、定义域、值域及主要性质参阅附录 A。

表示一个函数通常有三种方法。

1. 公式法(解析法)

用运算符号将自变量与相关的常量联结成一个式子，来表示两变量之间的关系的方法叫公式法，也叫解析法。例如，$S=x^2$，$T=cy$，$y=\sin x$，$S=\pi r^2$ 等都是用一个公式表示了一个函数。

有些函数在其定义域上的对应法则不能由一个式子表示，而是在定义域的不同区段上由不同的式子来表示，这样的函数叫作分段函数，比如函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

就是分段函数(如图 1.1 所示)。

例 3 由气象学可知，离地面越高气温越低，气温 T(℃)与距地面的高度 h(km)之间的函数关系为

$$T=\begin{cases}15-6.5h, & 0\leqslant h<11\\ -56.5, & 11\leqslant h\leqslant 80\end{cases}$$

当 $h\in[0,11)$时，气温 T 随高度 h 按线性函数 $y=15-6.5h$ 下降，当 $h\in[11,80]$时，气温

保持常量−56.5℃，这一高度的大气层叫作同温层(如图 1.2 所示)。

对于分段函数要注意下面几点：

(1) 分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是几个函数；

(2) 分段函数的定义域是各段定义域的并集；

(3) 在处理问题时，对属于某一段的自变量就应用该段的表达式。

公式法是表示函数的常见方法，其优点是准确、简单、便于进行理论研究。然而不是所有的函数都能表示为解析式。

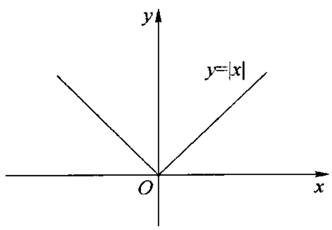


图 1.1

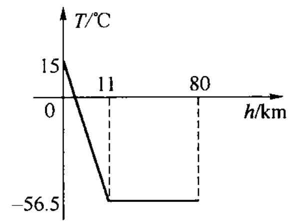


图 1.2

2. 图像法

就是在平面直角坐标系中用图形来表示函数 $y=f(x)$。

例 4 温度自动记录仪记录了某地一昼夜气温变化的曲线，如图 1.3 所示。从图像可以看出气温随时间 t 的变化过程，对于区间$[0,24]$上的任一变量 t，通过图像所蕴涵的对应法则，都有唯一确定的温度 T 相对应。比如凌晨 4 时气温最低，T 为零下10(℃)，下午 2 时温度最高，T 为 9(℃)。这里时间 t 是自变量，气温 T 是因变量。从 t 到 T 的对应法则蕴涵于曲线的变化状态中，虽不能表示为解析式，但因变量 T 仍是自变量 t 的函数。

用图形表示函数的优点是它的直观性，函数的变化趋势从图形上可以一目了然，便于对函数进行定性分析。

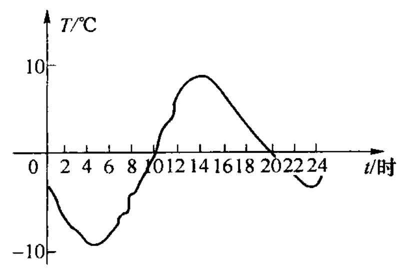


图 1.3

在有些问题中，自变量和因变量存在着确定的对应规律，或对应法则。但这种对应法则既不能表示为解析式，也不能蕴涵在图像中，只能通过表格反映其依赖关系。

3. 列表法

就是将自变量的一系列值与其对应的函数值列成一张表来表示函数，例如中学数学用表中所列的立方根表、三角函数表等。在现实生活中，抽彩的中奖号码是日子的函数，可以列表将两者对应起来，但是我们没有一个能使我们致富的抽彩中奖公式。列表法的优点是便于应用。

例 5　统计资料表明，北京市男性少年的平均体重 W(kg)与年龄 m(岁)的关系如表 1.1所示。

表 1.1

m/岁	7	8	9	10	11	12	13
W/kg	23.1	25.1	28.5	32.6	34.7	38.8	42.2

变量 m 的取值范围是数集 $D=\{m|7\leqslant m\leqslant 13, m\in \mathbf{Z}^+\}$，对于 D 中任一 m(岁)值，通过表格就有唯一确定的变量 W(kg)相对应，变量 m 与变量 W 之间的对应规律无疑是存在的。

在实际应用中，为了把某种研究课题理论化，有时也采用一定的数学方法把不能表示为解析式的函数近似地表示为解析式。如在自然科学和社会科学中，常采用线性化的方法近似地描述某些变量的变化规律。

一个函数主要是由对应法则和其定义域 D 所确定的，与其变量所选用的记号没有关系。函数的定义域 D 可根据问题的实际意义来确定。例如，在圆的面积 $S=\pi r^2$ 中，定义域 $D=\{r|0\leqslant r<+\infty\}$。若考虑由某一公式表示的函数 $y=f(x)$，如果不特别声明，则认定其定义域为使 $f(x)$有意义的 x 的全体。例如 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域为$[-1,1]$。

1.1.2　经济中常用的函数

1. 总成本函数

固定成本和变动成本的和称为总成本。例如，设某厂生产某种产品的最大生产能力为 b 个单位，至少要生产 a 个单位，固定费用为 C_1 元，每生产 1 个单位产品，变动费用增加 C_2 元，总产量为 q，则其总成本

$$C=C_1+C_2q, q\in[a,b]$$

2. 价格函数

商品的价格与市场的供求情况有密切关系。一般来说，价格是销售量的函数。例如，设某批发站批发一万台某种玩具电脑给零售商，目前该产品的定价为 70 元，若批发站每次多批发 3 000 件，市面上该种电脑的价格就相应地降低 3 元，现批发站最多只能批发 2 万件给零售商，最小销量为 1 万件，试求价格函数(即销售量对价格的影响)。我们把总销售量记为 q，价格记为 p，则价格函数应为

$$p=70-3\cdot\frac{q-10\ 000}{3\ 000}=80-\frac{q}{1\ 000}, q\in[10\ 000, 20\ 000]$$

3. 需求函数

一般地说，需求量是随着价格的提高而减少的，所以需求量也可以看作是价格的函数。例如，若把上述价格函数例题中的条件改为，“玩具电脑的价格为 70 元时，销售量为 10 000 件，若价格每提高 3 元，需求量就减少 3 000 件”，则我们可得出需求函数为

$$q=10\ 000-\frac{p-70}{3}\cdot 3\ 000=1\ 000(80-p)$$

从此关系式可知，价格不能超过 80 元，否则没有销路。

4. 供应函数

一般地说，供应量也是价格的函效。例如，在上例中，设玩具电脑的价格为 70 元时，该厂可提供 10 000 件玩具电脑，当价格每增加 3 元时，该厂可多提供 300 件，那么供应函数为

$$q=10\ 000+300\cdot\frac{p-70}{3}=100(30+p)$$

其中 p 是价格，q 代表玩具电脑的供应量。

若把需求函数和供应函数画在同一坐标系内（如图 1.4 所示），其交点所对应的价格就是供求均衡价格（70 元）。低于均衡价格则“求大于供”，高于这个价格则“供大于求”。

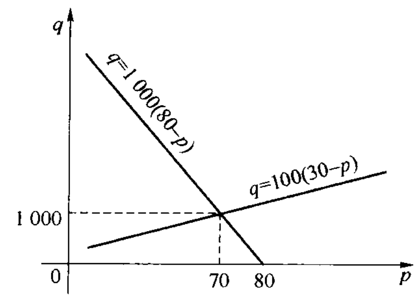


图 1.4

5. 收益函数、利润函数

销量 q 与价格 p 的乘积称为收益，记为 R，即收益函数为 $R=q\cdot p$，如果把 p 看作是 q 的函数 $p=p(q)$，则收益 R 也是 q 的函数

$$R=q\cdot p(q)=R(q)$$

收益 $R(q)$ 与成本 $C(q)$ 之差就是利润 L：

$$L=R(q)-C(q)$$

1.1.3 函数的性质

研究函数常常涉及到函数的一些基本性质，比如有界性、奇偶性、周期性和单调性。这些性质不是所有函数所共有的。为了研究方便，我们可以把具有这些性质的函数分别叫作有界函数、单调函数、奇函数、偶函数和周期函数。这些函数在中学已经学过，这里只作一简要回顾和补充，目的是为了了解函数所具有的特性，以便掌握它的变化规律。

1. 函数的有界性

设 D 是函数 $y=f(x)$ 的定义域，若存在一个正数 M，使得对一切 $x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 是有界函数，否则称 $f(x)$ 为无界函数。有时，我们也讨论函数在某个区间上的有界性，例如函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,2)$ 内是无界的，而在区间 $[1,+\infty]$ 上则是有界的。例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $M=1$，使得

$$|\sin x|\leqslant 1,|\cos x|\leqslant 1$$

从图形上看，有界函数的图形介于带状区域之间（如图 1.5 所示）。

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称且对任意 $x\in D$ 有性质

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 是偶函数，偶函数的图像关于 y 轴对称，例如函数 $y=x^2$ 和绝对值函数（如图 1.6 所示）

$$y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$$

都是偶函数。

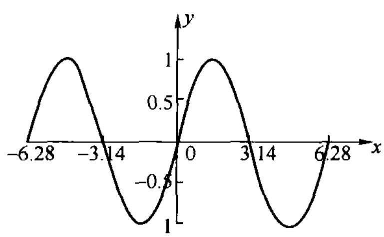


图 1.5

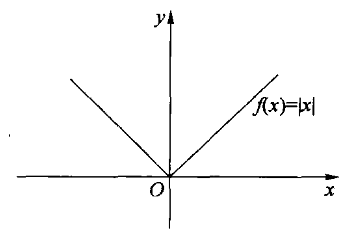


图 1.6

如果对于所有的 $x\in D$，都有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$ 是奇函数，奇函数的图像关于原点对称。

3. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若存在 $T_0>0$，对任意 $x\in D$，有 $f(x+T_0)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数，满足上面等式的最小正数 T_0 叫作 $f(x)$ 的最小正周期（通常周期函数的周期指最小正周期）。例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数。有很多自然现象，像季节、气候等都是年复一年的呈周期变化的；有很多经济活动，小到商品销售，大到经济宏观运行，其变化具有周期规律性。从图形上看，以 T 为周期的函数 $f(x)$ 的图像沿 x 轴平行移动 T 仍然保持不变（如图1.5所示）。

4. 函数的单调性

若函数 $y=f(x)$ 对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加的（或称递增）；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称此函数在区间 (a,b) 内是单调减少的（或称递减）。单调增加函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的（如图 1.7 所示）；单调减少函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的（如