



高中新课标

丛书主编：陈曾明

同步课堂

数

学

初

之

冠

夺

必修1
配北师大版

江西高校出版社



高中新课标

夺冠之路

数学

必修1
配北师大版

本册主编：王连福

本册副主编：方华昌 钟世红 杨建国

本册编委：余雪明 乐小阳 刘平旺 李茂根

吕秋凤 付孟春 邓长福 徐志强

黄 斌 张 勤 谭勇进 熊庆方

江西高校出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中新课标同步课堂. 数学. 1: 必修/王连福主编.

南昌:江西高校出版社,2008.8

(夺冠之路系列丛书/陈曾明主编)

配北师大版

ISBN 978-7-81132-383-2

I. 高... II. 王... III. 数学课—高中—教学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第122187号

出版发行	江西高校出版社
社 址	江西省南昌市洪都北大道96号
邮政编码	330046
总编室电话	(0791)8504319
销售电话	(0791)8500608
网 址	www.juacp.com
印 刷	南昌市百花印刷厂
照 排	江西文源文化科技有限公司照排部
经 销	各地新华书店
开 本	850mm×1168mm 1/16
印 张	90
字 数	2880千字
版 次	2008年8月第1版第1次印刷
印 数	1~3000册
书 号	ISBN 978-7-81132-383-2
定 价	211.20元(全套共9册)

版权所有 侵权必究

目 录

第一章 集合	(1)	第二节 指数扩充及其运算性质	(63)
第一节 集合的含义与表示	(1)	第三节 指数函数	(67)
第二节 集合的基本关系	(5)	第四节 对数	(72)
第三节 集合的基本运算	(9)	第五节 对数函数	(76)
本章测试	(14)	第六节 指数函数、幂函数、对数函数增长 的比较	(82)
第二章 函数	(16)	本章测试	(86)
第一节 生活中的变量关系	(16)	第四章 函数应用	(88)
第二节 对函数的进一步认识	(21)	第一节 函数与方程	(89)
第三节 函数的单调性	(36)	第二节 实际问题的函数建模	(96)
第四节 二次函数性质的再研究	(41)	本章测试	(106)
第五节 简单的幂函数	(48)	必修1 第二阶段检测卷	(109)
本章测试	(53)	必修1 模块过关检测卷	(113)
必修1 第一阶段检测卷	(55)	参考答案	(117)
第三章 指数函数和对数函数	(58)		
第一节 正整数指数函数	(58)		



第一章 集合



目标导航

内 容	要 求	说 明
1. 集合的含义与表示	理解集合的概念、了解属于空集的意义	掌握有关术语、符号, 会用
2. 集合的基本关系	理解子集的概念、了解包含、相等关系的意义	正确书写包含(于)的符号
3. 集合的基本运算	理解交集、并集、补集的概念, 了解全集的意义	正确使用交、并、补集的符号



本章概要

本章主要内容有: 集合的含义与表示; 元素、集合间的基本关系; 集合的运算, 本章内容是中学数学的基础, 集合语言是现代数学的基本语言, 是表达数学知识、进行数学交流的重要工具. 本章的重点是集合的含义与表示、集合的基本关系; 难点是集合的基本关系、集合的运算. 因集合是高中数学最基本的概念, 故每年高考必考, 考查以选择、填空题为主, 属于容易题, 分值为 4~5 分.

第一节 集合的含义与表示



课标解读

理解集合、元素、空集、有限集、无限集的概念; 掌握集合的表示方法及集合中元素的特征.



学法指导

重点是集合的概念、集合的表示方法; 难点是集合中元素的特征、空集的概念, 学习时应正确理解概念, 切实掌握有关术语, 特殊的数学符号的含义与运用.



知识清单

- 一般地, 指定的 _____ 对象的 _____ 称为集合, 集合常用大写字母 _____ 标记. 集合中的 _____ 对象叫作这个集合的 _____, 元素常用小写字母 _____ 标记.
- 集合中的元素满足:
 - (1) 确定性. $\forall a$ 与 $\forall A, a$ _____ A 或 a _____ A ;
 - (2) 互异性. 集合中的 _____ 两个元素 _____ 相同;
 - (3) 无序性. 集合中的元素 _____ 相同的集合 _____.
- 常用数集的记法有: _____、_____、_____、_____、_____.

- 集合的常用表示法有 _____ 和 _____.

列举法是把集合中的元素 _____ 列举出来写在 _____ 的方法.

描述法是用 _____ 的条件表示 _____ 是否属于 _____ 的方法.

- 一般地, 我们把含 _____ 的集合叫做有限集; 含 _____ 的集合叫无限集. 把不含 _____ 的集合叫作 _____, 记作 $\emptyset$.



要点解读

知识要点 1 集合的含义(重点)

指定的某些对象的全体称为集合, 它是一个不加定义的原始概念, 集合中的每一个对象都叫做这个集合的一个元素, 集合中的元素具有确定性、互异性及无序性.

例 1 判定下列每组对象能否构成一个集合

- (1) 某校班干部; (2) 某班爱学习的学生; (3) 全体多项式; (4) 某教室里的人和物; (5) 某单位的全体年青人.

解析 判断一组对象是否构成一个集合, 关键看这些对





象是否确定。

(1)能,因某校的班干部是确定的;(2)不能,因“爱学习”没有明确的标准;(3)能,因“多项式”有明确的定义;(4)能,因“某教室里的人和物”是确定的;(5)不能,因“年青人”的标准不明确。

点评 集合中的元素必须满足其三大特性:确定性、互异性及无序性,不满足其中任一特性的一组对象,均不能构成集合。

变式训练 1 判断下列对象能否构成一个集合:

- (1)某班的矮个子同学;(2)某山上的高大的树;
(3)某班某次测试的好成绩;(4)某班的“双差生”;

解 (1)不能,因“矮个子”标准不确定;(2)不能,因“高大的”没有明确的标准;(3)不能,因“好成绩”不确定;(4)不能,因“双差生”没有明确的标准。

例 2 已知集合 $A = \{x, 2x-1, x^2\}$, $1 \in A$, 试求实数 x 的值。

解析 $\because 1 \in A \therefore 1 = x$ 或 $1 = 2x-1$ 或 $1 = x^2$

若 $1 = x$, 则 $2x-1 = 1, x^2 = 1$, 不满足 A 中元素的互异性;

若 $1 = 2x-1$, 则 $x = 1, x^2 = 1$, 不满足 A 中元素的互异性;

若 $1 = x^2$, 则 $x = -1$ 或 $x = 1$ (舍去), $2x-1 = -3$, 满足 A 中元素的互异性 $\therefore x = -1$ 。

评注 任一集合中的未知数的取值必须满足集合中的元素的互异性,该例还着重考查了分类讨论数学思想。

变式训练 2 已知 $a \in \mathbb{R}, a \in \{2a^2-1, 2a-3, a-2, 3a+1, a^2+1\}$, 试求 a 的值。

解 易知 $a \neq a-2, a \neq a^2+1$ 。

若 $a = 2a^2-1$ 则 $a = 1$ 或 $-\frac{1}{2}$

$a = 1$ 时, $2a^2-1 = 1, 2a-3 = -1, 3a+1 = 4, a^2+1 = 2$ 。

$a = -\frac{1}{2}$ 时, $2a^2-1 = -\frac{1}{2}, 3a+1 = -\frac{1}{2}$ 矛盾。

若 $a = 2a-3$, 则 $a = 3, 2a^2-1 = 17, 2a-3 = 3, a-2 = 1, 3a+1 = 10, a^2+1 = 10$ 矛盾

若 $a = 3a+1$, 则 $a = -\frac{1}{2}, 2a^2-1 = 3a+1 = -\frac{1}{2}$ 矛盾

综上所述,所求实数 a 的值为 1。

知识要点 2 集合的表示方法(重点、难点)

集合的常用表示法有列举法和描述法。

列举法具有直观、明了集合中的元素的特点,适用于集合中元素个数不多或元素间的规律性强的集合表示,注意元素间用逗号隔开。

描述法要求对集合中的元素进行抽象、概括,具有普遍性,适用于集合中元素较多且这些元素易于抽象、概括。注意书写格式,抽象出集合中元素的性质特征,不能出现未被说明的字母,描述性质的语句精练、准确,所有描述内容都要写在集合符号(花括号)内。

图示法(即 Venn 图和数轴)也是表示集合的一种直观、形象的方法。

例 3 用适当的方法表示下列集合:

- (1)全体能被 3 整除的数组成的集合;
(2)大于 3 小于 20 的素数组成的集合;
(3) x^3-5x^2+4x 的一次因式组成的集合;
(4)不等式 $3x+2 < 0$ 的解的集合;
(5)平面直角坐标系中第二象限的点的集合;
(6)平面内到定点 O 的距离等于定长 $r(r > 0)$ 的点 P 的集合

解析 (1) $\{n | \frac{n}{3} \in \mathbb{Z}\}$ 或 $\{n | n = 3m, m \in \mathbb{Z}\}$

(2) $\{5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

(3) $\{x, x-1, x-4\}$

(4) $\{x | x < -\frac{2}{3}\}$

(5) $\{(x, y) | x < 0 \text{ 且 } y > 0\}$

(6) $\{P | OP = r, O \text{ 为定点}, r \text{ 为正常数}\}$ 。

点评 要求确定哪一种表示方法是关键,集合中元素较少时常用列举法表示;描述法表示时要注意集合中元素的本质特征,力求性质概括简练。有些集合既可用列举法又可用描述法,最好用列举法。如(3)。

变式训练 3 用适当的(或另一种)方法表示下列集合:

- (1)不大于 6 的正偶数的集合
(2)方程 $16-x^2 = 0$ 的解的集合
(3) $\{n \in \mathbb{Z} | \frac{4}{2-n} \in \mathbb{Z}\}$
(4)被 7 除余 1 的整数的集合



(5)第一、三象限的平分线上的点的集合

$$(6) \left\{ (a, b) \left| \begin{array}{l} b=3a \\ a^2-3b=10 \end{array} \right. \right\}$$

解 (1){2,4,6} (2){-4,4} (3){-2,0,1,3,4,6}

(4){ $m|m=7n+1, n \in \mathbb{Z}$ } (5){ $(x, y)|y=x$ } (6)

{(10,30), (-1, -3)}

知识要点3 特定集合的表示

为了书写方便起见,规定常见的数集及空集,用特定的字母表示:主要有 $N, N^+ (N_+), \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \emptyset$, 请牢记.

例4 请在下列横线上填上 $\in$ 或 $\notin$.

(1) 2 $\underline{\quad}$ N , 0 $\underline{\quad}$ N , -1 $\underline{\quad}$ N , 0.31 $\underline{\quad}$ N , $-\sqrt{2}$ $\underline{\quad}$ N

(2) 2 $\underline{\quad}$ $\mathbb{Z}$, 0 $\underline{\quad}$ $\mathbb{Z}$, -1 $\underline{\quad}$ $\mathbb{Z}$, 0.31 $\underline{\quad}$ $\mathbb{Z}$, $-\sqrt{2}$ $\underline{\quad}$ $\mathbb{Z}$

(3) 2 $\underline{\quad}$ N_+ , 0 $\underline{\quad}$ N_+ , -1 $\underline{\quad}$ N_+ , 0.31 $\underline{\quad}$ N_+ , $-\sqrt{2}$ $\underline{\quad}$ N_+

(4) 2 $\underline{\quad}$ $\mathbb{Q}$, 0 $\underline{\quad}$ $\mathbb{Q}$, -1 $\underline{\quad}$ $\mathbb{Q}$, 0.31 $\underline{\quad}$ $\mathbb{Q}$, $-\sqrt{2}$ $\underline{\quad}$ $\mathbb{Q}$

(5) 2 $\underline{\quad}$ $\mathbb{R}$, 0 $\underline{\quad}$ $\mathbb{R}$, -1 $\underline{\quad}$ $\mathbb{R}$, 0.31 $\underline{\quad}$ $\mathbb{R}$, $-\sqrt{2}$ $\underline{\quad}$ $\mathbb{R}$

(6) $a \underline{\quad}$ $\emptyset$

解析 (1) $\in, \in, \notin, \notin, \notin$;

(2) $\in, \in, \in, \notin, \notin$;

(3) $\in, \notin, \notin, \notin, \notin$;

(4) $\in, \in, \in, \in, \notin$;

(5) $\in, \in, \in, \in, \in$;

(6) $\notin$.

评注 关键是理解这些字母 $N, N_+, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \emptyset$ 的含义.

变式训练4 用“ $\in$ 或 $\notin$ ”填空.

$3^\circ \underline{\quad}$ N_+ , $1-2^\circ \underline{\quad}$ N , $\frac{1}{3}-\frac{5}{6} \underline{\quad}$ $\mathbb{Z}$, 3.14 $\underline{\quad}$ $\mathbb{Z}$

$\sqrt{2}-\sqrt{3} \underline{\quad}$ $\mathbb{R}$, $\pi \underline{\quad}$ $\mathbb{R}$, $a+b-c \underline{\quad}$ $\emptyset$.

答案 $\in, \in, \notin, \in, \in, \in, \notin$.

知识要点4 集合的分类

一般地,集合可根据它所含元素是0个、有限个、无限个而依次分为空集($\emptyset$)、有限集、无限集.

例5 判断下列集合中哪些是空集、哪些是有限集、哪些

是无限集:

(1)到一个三角形三边距离相等的点的集合;

(2)大于1小于3的奇数的集合;

(3)2008年北京大学的毕业生的集合;

(4)体重为10克的狗的集合;

(5)大于 $\frac{1}{1000}$ 而小于 $\frac{11}{10000}$ 的有理数的集合;

(6)某林场的树木的集合.

解析 由空集、有限集、无限集的定义可知(2)、(4)为空集、(3)、(6)为有限集、(1)、(5)为无限集.

特别是(1),没有讲“在平面内到一个三角形三边距离相等的点的集合”,而放到空间就成了四条平行直线,故为无限集.

点评 判定一个集合是哪一类集合首先要理解各类集合的分类标准(定义),其次要掌握集合中元素的特征.

变式训练5 下列集合中,哪些是有限集、哪些是无限集、哪些是空集?

(1)身高10cm的人的集合;

(2)周长为一常数(大于0)的三角形的集合;

(3)小于1的正分数的集合;

(4)全体汉字的集合;

(5)方程 $x^2-x+1=0$ 的实数解的集合;

(6)全世界的人的集合.

解 (1)、(5)是空集;(2)、(3)是无限集;(4)、(6)是有限集.



高考真题

例1 (05,湖北,5分)设 P, Q 是两个非空实数集合,定义集合 $P+Q=\{a+b|a \in P, b \in Q\}$,若 $P=\{0,2,5\}, Q=\{1,2,6\}$,则 $P+Q$ 中的元素个数是 ()

A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

解析 $\because P+Q=\{a+b|a \in P, b \in Q\}, P=\{0,2,5\}, Q=\{1,2,6\}$

$\therefore 0+1=1, 0+2=2, 0+6=6, 2+1=3, 2+2=4, 2+6=8, 5+1=6, 5+2=7, 5+6=11$, 由集合 $P+Q$ 中元素的互异性知 $P+Q=\{1,2,3,4,6,7,8,11\}$

$\therefore$ 选 B.

例2 (06,山东,5分)定义集合运算, $A \odot B = \{x|x=xy$





$(x+y), x \in A, y \in B$, 设集合 $A = \{0, 1\}, B = \{2, 3\}$, 则集合 $A \odot B$ 的所有元素和为 ()

A. 0 B. 6 C. 12 D. 18

解析 $\because A = \{0, 1\}, B = \{2, 3\}, A \odot B = \{x | x = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$.

$\therefore x=0$ 时, $xy(x+y)=0, x=1$ 时, $1 \times 2(1+2)=6,$

$1 \times 3(1+3)=12,$

$\therefore A \odot B = \{0, 6, 12\}$, 所有元素之和为 18.

$\therefore$ 选 D.

例 3 (06, 四川, 4 分) 非空集合 G 关于运算 $\oplus$ 满足:

(1) 对任意 $a, b \in G$, 都有 $a \oplus b \in G$;

(2) 存在 $e \in G$, 使得对一切 $a \in G$, 都有 $a \oplus e = e \oplus a = a$,

则称 G 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”

现给出下列集合和运算:

① $G = \{\text{非负整数}\}$, $\oplus$ 为整数的加法.

② $G = \{\text{偶数}\}$, $\oplus$ 为整数的乘法.

③ $G = \{\text{二次三项式}\}$, $\oplus$ 为多项式的加法.

其中 G 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”的是 _____ (写出所有“融洽集”的序号)

解析 对于①, $\forall a, b \in G, a+b \in N$, 从而 $a \oplus b \in G$,

$0 \in N = G, 0+a=a+0=a$,

$\therefore G$ 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”.

对于②, 不存在 G 中的元素 e , 满足 $e \oplus a = a \oplus e = a$

$e \oplus G$, $\therefore G$ 关于运算 $\oplus$ 不是“融洽集”.

对于③, $\because$ 不存在 G 中的元素 e , 对 G 中的任一元素 a , 满足 $e \oplus a = a \oplus e = a$, $\therefore G$ 关于运算 $\oplus$ 不是“融洽集”, 综上所述, 选 ①

例 4 (08, 江西, 5 分) 定义集合运算: $A * B = \{x | xy, x \in A, y \in B\}$, 设 $A = \{1, 2\}, B = \{0, 2\}$, 则集合 $A * B$ 的所有元素之和为 ()

A. 0 B. 2 C. 3 D. 6

解析 $\because$ 对于 B 中的元素 $y, y=0$ 时, $x=0; y=2, x=1$ 时, $x=2; y=2, x=2$ 时, $x=4$

$\therefore A * B = \{0, 2, 4\}$

$\therefore 0+2+4=6 \therefore$ 选 D.



挑战自我

基础达标

1. 下列各组对象中能构成一个集合的是 ()

①某校 2003 届学生; ②正方形的全体; ③醒目的颜色; ④很高大的人; ⑤接近 1 的有理数全体

A. ①② B. ②③ C. ①④ D. ②⑤

2. 满足条件 $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 5x+3y=2 \end{cases}$ 的所有 (x, y) 的集合为 ()

A. $\{-1, 1\}$ B. $\{1, -1\}$
C. $\{(-1, 1)\}$ D. $\{(1, -1)\}$

3. 已知集合 $M = \{x_1, x_2, x_3\}$, 则 $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ 的值 ()

A. 恒为正 B. 恒为负
C. 可以为零 D. 不可以为零

4. 方程① $2x^2 - 4x + y^2 + 4y + 6 = 0$; ② $\frac{x-1}{x+2} = 0$; ③ $(x-1)^2(x+2) = 0$; ④ $x^2 + x - 2 = 0$; ⑤ $\frac{(x-1)^2(x+2)}{x-1} = 0$ 中解集为 $\{1, -2\}$ 的有 ()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

5. 已知 $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 若 $A = \{-1, 2, 3\}, B = \{3, 5, 7\}$, 则 $A - B$ 中所有元素之和为 _____.

6. 方程 $ax + b = 0$ 的解集为 _____, (填有限集、无限集、空集之一或二或三).

7. 已知集合 A 满足: 若 $x \in A$, 则 $1 - \frac{1}{x} \in A$. 现有 $\frac{1}{2} \in A$, 则必有 _____.

8. 已知 $A = \{m | m = 3n, n \in \mathbb{Z}\}, B = \{n | n = 3m + 1, m \in \mathbb{Z}\}, C = \{p | p = 3q + 2, q \in \mathbb{Z}\}$

若 $x \in A, y \in B, z \in C$, 试判断 A 与 $y+z, C$ 与 yz 之间的关系, 并证明你的结论.





能力提升

1. 已知集合 $A = \{a | b^2 - 4b + a + 3 = 0\}$ 则有 ()

- A. $1 \in A$ 且 $2 \in A$ B. $1 \in A$ 且 $2 \notin A$
C. $1 \notin A$ 且 $2 \in A$ D. $1 \notin A$ 且 $2 \notin A$

2. 已知 $M = \{0, 1, 2\}$, $N = \{1, 2, 3\}$, 定义 $A * B = \{p | p = mn$
($n - m$), $m \in A, n \in B\}$, 则 $M * N =$ _____.

3. 已知 $A = \{x^2 + 1, 1, x^2 - x - 9, x^2 - x - 3\}$, 试问 $3 \in A$ 吗?
若 $3 \in A$, 求出所有 x 的集合; 若 $3 \notin A$, 请说明理由.

5. 已知集合 $C = \{m | m^2 + (n+4)m + n + 3 = 0\}$, 求 C 中所有元素的和.

6. 以自然数为元素的集合 D 满足: 若 $x \in D$, 则 $9 - x \in D$. 试问:

(1) D 可以是单元集吗?

(2) 写出只含有 2 个元素的全体集合 D .

4. 已知集合 $B = \{x \in R | ax^2 - 4x + b = 0, a, b \in N \text{ 且 } b < 5\}$ 为单元集, 求 (a, b) 的集合.

第二节 集合的基本关系



目标解读

理解子集的概念, 了解包含、相等关系的意义, 掌握表示子集的符号, 并能正确表示简单集合.



学法指导

本节重点是子集的概念, 难点是正确判断两集合之间是否存在子集关系及对空集的理解, 学习时应根据定义进行推理, 要重视 $\emptyset$ 的存在与作用, 要充分利用三种语言去学习.



知识清单

1. 一般地, 对于两个集合 A 与 B , 如果集合 A 中 _____ 一个元素 _____ 集合 B 中的元素, 即 $a \in A$, $a \in B$, 我们就说集合 A _____ 集合 B , 或集合 B _____ 集合 A , 记作 _____, 这时, 我们说集合 A 是集合 B 的 _____, _____ 集合是它本身的 _____, 即 _____.

2. 用封闭曲线的内部表示集合, 称为 _____ 图.

3. 对于两个集合 A 与 B , 若 $A \subseteq B$, 同时 _____, 则说集合 A 与





集合 B _____, 记作 _____.

4. 对于两个集合 A 与 B , 若 $A \subseteq B$, 且 _____, 则说集合 A 是集合 _____ 的 _____, 记作 _____.

5. 规定: 空集是 _____ 集合的子集, 即对于任何一个集合 A , 都有 _____.



要点解读

知识要点 1 子集的含义(重点)

若 $A \subseteq B$, 则强调集合 A 中任何一个元素都是集合 B 中的元素, 且有 $\emptyset \subseteq A, A \subseteq A$.

例 1 已知 $A = \{x | 0 < x < 5, x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{y \in \mathbb{N} | 2 < y + 2 < 6\}$, $B \subseteq C \subseteq A$, 写出所有的集合 C .

解析 $\because A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 2, 3\}, B \subseteq C \subseteq A$

$\therefore 1, 2, 3 \in C, 4 \notin C$ 或 $4 \in C, 4 \notin C$ 时, $C = B = \{1, 2, 3\}, 4 \in C$ 时, $C = A = \{1, 2, 3, 4\}$

$\therefore$ 所有集合 C 为 $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}$.

点评 解答此题的关键是先求出 A, B , 再按子集的定义、分析讨论 C 中必含的元素.

变式训练 1 求满足条件 $\{-1, 0, 3\} \subseteq M \subseteq \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ 的所有集合 M .

解 $\because \{-1, 0, 3\} \subseteq M \therefore -1, 0, 3 \in M$ 且 $M \neq \{-1, 0, 3\}$, 又 $\because M \subseteq \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

$\therefore M$ 中至少含有 $1, 2$ 中的一个, 至多含有全部.

$\therefore$ 所有集合 M 为 $\{-1, 0, 1, 3\}, \{-1, 0, 2, 3\}, \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

知识要点 2 真子集

这是高考的常考知识点, 注意 $A \subsetneq B \iff A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 即 A 中元素都在 B 中, 且 B 中至少有一个元素不在 A 中, 特别警示: $\emptyset$ 是任何非空集合 A 的真子集.

例 2 已知集合 $M = \{m | m = a^2 + 2a + 2, a \in \mathbb{N}\}$, $N = \{n | n = b^2 - 4b + 5, b \in \mathbb{N}_+\}$, 试判断 M, N 的关系.

解析 $\because a \in \mathbb{N}, m = (a+1)^2 + 1 \geq 2, b \in \mathbb{N}_+, n = (b-2)^2 + 1 \geq 1$

$\therefore M \subseteq N$ 且 $1 \notin M, 1 \in N \therefore M \subsetneq N$

点评 判断 M 与 N 的关系首先要分析 M, N 中的元素特征, 再比较两个集合中元素间的关系.

变式训练 2 已知集合 $A = \{x | x = \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{4}m + 1, m \in$

$\mathbb{N}_+\}$, $B = \{y | y = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{4}n + \frac{5}{4}, n \in \mathbb{N}_+\}$, 试判断集合 A 与 B 之间的关系.

解 $\because m \in \mathbb{N}_+, x = \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{4}m + 1 \geq \frac{7}{4}, n \in \mathbb{N}_+, y = \frac{1}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{4}(n-1) + 1 \geq 1$

$\therefore m \in B, A \subseteq B$ 且 $1 \notin A, 1 \in B \therefore A \subsetneq B$

知识要点 3 集合相等

两个集合 A 与 B 相等即 $A = B$, 是指 A, B 中的元素相同或 A 与 B 互为子集关系, 表明集合中元素无序.

例 3 下列集合中符合 $P = Q$ 的是 ()

A. $P = \{x | x = \frac{m}{3} + 1, m \in \mathbb{N}\}$, $Q = \{y | y = \frac{n}{3} + \frac{2}{3}, n \in \mathbb{N}\}$

B. $P = \{x | x = \frac{m}{2} - 1, m \in \mathbb{Z}\}$, $Q = \{y | y = \frac{m}{4} - 1, m \in \mathbb{Z}\}$

C. $P = \{x | x^2 - 2x = 0\}$, $Q = \{y | y = 1 - (-1)^n, n \in \mathbb{Z}\}$

D. $P = \{x | x = 5n + 1, n \in \mathbb{N}_+\}$, $Q = \{y | y = 5m + 1, n \in \mathbb{N}\}$

解析 对于 A, $\frac{2}{3} \in Q, \frac{2}{3} \notin P$, 对于 B, $\frac{1}{4} \in Q, \frac{1}{4} \notin P$, 对于 D, $1 \in Q, 1 \notin P$, 对于 C, $P = \{0, 2\}, Q = \{2, 0\}$, $\therefore$ 选 C.

评注 判断两个集合是否相等关键看它们的元素是否完全相同.

变式训练 3 判断下列各组集合中相等的一组是 ()

A. $M = \{x | x = 4n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{y | y = 8n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$

B. $M = \{x | x = \frac{n}{3}, n \in \mathbb{N}\}$, $N = \{y | y = \frac{n+1}{3}, n \in \mathbb{N}\}$

C. $M = \{x | x = 1 + (-1)^n, n \in \mathbb{N}_+\}$, $N = \{y | y = (-1)^n - 1, n \in \mathbb{N}_+\}$

D. $M = \{(m, n) | m^2 + n^2 + 2m - 4n + 5 = 0\}$, $N = \{(x, y) | \begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}\}$

解 通过比较 M, N 中的元素, 只有 D 组中: $(m+1)^2 + (n-2)^2 = 0 \iff m = -1$ 且 $n = 2$, $M = \{(-1, 2)\}$, 而由 $\begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$, $\therefore N = \{(-1, 2)\}$, 发现 D 组中 $M = N$, 故选 D.

知识要点 4 空集(难点)



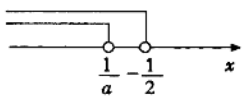


空集是不含任何元素的集合, $\forall A, \emptyset \subseteq A, \emptyset \subseteq \emptyset$; 若 $A \neq \emptyset$, 则 $\emptyset \subseteq A; \emptyset \subseteq \{\emptyset\}, \emptyset \in \{\emptyset\}$.

例 4 已知 $A = \{x | x < -\frac{1}{2}\}, B = \{y | ay - 1 > 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 试求实数 a 的取值范围.

解析 由 $B \subseteq A$ 可知, $B = \emptyset$ 或 $B \neq \emptyset, \therefore a = 0$ 或

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ ay > 1 \end{cases}$$



, 借助这根数轴及其图形

$$\therefore a = 0 \text{ 或 } \begin{cases} a < 0 \\ \frac{1}{a} \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \therefore -2 \leq a \leq 0, \text{ 这就是所求实数 } a \text{ 的取值范围.}$$

a 的取值范围.

点评 一个集合 B 是 A 的子集, 必须注意到 $B = \emptyset$ 的情况, 同时可借助几何图形(如数轴).

变式训练 4 已知 $M = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}, N = \{x | x^2 + mx + 2 = 0\}$, 若 $N \subseteq M$, 求实数 m 的取值范围.

解 $\because m^2 - 4 \times 2 < 0$ 即 $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ 时, $N = \emptyset, M = \{1, 2\}$

$\therefore$ 由 $N \subseteq M$ 可知, $N = \emptyset$, 或 $N = \{1\}$, 或 $N = \{2\}$, 或 $N = \{1, 2\}$

若 $N = \emptyset$, 则 $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$;

若 $N = \{1\}$, 则 $|x| = 1 \neq 2$ 矛盾;

若 $N = \{2\}$, 则 $2 \times 2 = 4 \neq 2$ 矛盾.

若 $N = \{1, 2\}$, 则 $1 \times 2 = 2, 1 + 2 = -m$ 即 $m = -3$

综上所述, 所求实数 m 的取值范围是 $\{m \in \mathbb{R} | -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2} \text{ 或 } m = -3\}$

例 5 若集合 $A = \{x | -1 < x - a < 2\}, B = \{x | |x| < 3\}$, 且 $A \subseteq B$, 则 a 的范围是_____.

解析 $\because -1 < x - a < 2 \therefore a - 1 < x < a + 2$ 由 $|x| < 3$ 得 $-3 < x < 3$

$$\therefore A = \{x | a - 1 < x < a + 2\}, B = \{x | -3 < x < 3\}$$

$$\therefore \text{由 } A \subseteq B \text{ 知, } \begin{cases} a + 2 \leq 3 \\ a - 1 \geq -3 \end{cases} \therefore -2 \leq a \leq 1$$

而 $A \subseteq B \therefore a < -2$ 或 $a > 1$, 这就是所求实数 a 的取值

范围.

点评 本题正难则反, 通过考虑 $A \subseteq B$ 的对立面 $A \not\subseteq B$ 时实数 a 的取值范围, 再求 $A \subseteq B$ 的实数 a 的取值范围.

变式训练 5 已知集合 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 \leq 0\}, B = \{x | \frac{2x - 3a}{x - 2a} < 1\}, A \subseteq B$, 试求实数 a 的取值范围.

$$\text{解: } \because A = \{x | 2 \leq x \leq 3\} \quad B = \{x | \frac{x - a}{x - 2a} < 0\}, A \subseteq B$$

$$\therefore \begin{cases} a > 0 \\ a \leq 2 \\ 2a \geq 3 \end{cases} \therefore \frac{3}{2} \leq a \leq 2, \text{ 这就是实数 } a \text{ 的取值范围.}$$



高考真题

例 1 (05, 天津, 5 分) 集合 $A = \{x | 0 \leq x < 31, \text{ 且 } x \in \mathbb{N}\}$ 的真子集个数是 ()

A. 16 B. 8 C. 7 D. 4

解析 $\because A = \{0, 1, 2\}, \therefore$ 它的真子集个数为 $2^3 - 1 = 7 \therefore$ 选 C

例 2 (04, 湖北, 4 分) 设 A, B 的两个集合, 下列四个命题:

① $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$, 有 $x \in B$;

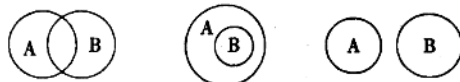
② $A \subseteq B \Leftrightarrow A$ 与 B 没有公共元素;

③ $A \subseteq B \Leftrightarrow A \supseteq B$;

④ $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$, 使得 $x \in B$.

其中真命题的序号是_____ (把符号要求的真命题序号都写上)

解析 $\because A \subseteq B \therefore$ 可用 Venn 图表示 A, B 如下:



由图可知, ① 不正确, ② 不正确, ③ 不正确, ④ 正确, 故选择填: ④

例 3 (07, 江西, 5 分) 若集合 $M = \{0, 1, 2\}, N = \{(x, y) | x - 2y + 1 \geq 0 \text{ 且 } x - 2y - 1 \leq 0, x, y \in M\}$, 则 N 中元素的个数为 ()

A. 9 B. 6 C. 4 D. 2

解析 $\because N = \{(x, y) | x - 2y + 1 \geq 0, \text{ 且 } x - 2y - 1 \leq 0, x, y \in M\}$

$$\therefore x = y = 0; x = 2, y = 1; x = y = 1; x = 1, y = 0$$





除此之外,没有 M 中的任何两个数 (x, y) 满足集合 N 的

条件.

$$\therefore N = \{(0, 0), (1, 1), (1, 0), (2, 1)\}$$

$\therefore N$ 中的元素个数为 4, 选 C.



挑战自我

基础达标

1. 下列几个命题中, 正确的命题有 ()

① $0 \in \emptyset$ ② $\{0\} = \emptyset$ ③ $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ④ $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ ⑤ $\emptyset \subseteq A$ ⑥ $A \subseteq A$

A. ①②③ B. ③④⑤ C. ②③④ D. ③④

2. 已知集合 A 满足 $\{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq A \subseteq \{a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}\}$, 则集合 A 的个数共有 ()

A. $m+3$ 个 B. 3 个 C. 8 个 D. 6 个

3. 已知 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x | x \subseteq A\}$, 则集合 B 中的元素个数为 ()

A. 3 个 B. 5 个 C. 7 个 D. 8 个

4. 已知 $A = \{x | x = \sqrt{2}m - \sqrt{3}n, m, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{y | y = \sqrt{3}p + \sqrt{2}q, p, q \in \mathbb{Z}\}$, 已知 $a \in A, b \in B$, 则 ab 与 A, B 的关系是 ()

A. $ab \in A$ B. $ab \notin B$ C. $ab \subseteq A$ D. $ab \in B$

5. 已知 $A = \{x | x = 7n + 3, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{y | y = 7m - 4, m \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{Z | Z = 14n + 17, n \in \mathbb{Z}\}$, 则 A, B, C 之间的关系是 ()

A. $A = B \subseteq C$ B. $A = C \subseteq B$ C. $A = B \subseteq C$ D. $B = C \subseteq A$

6. 若 $m = \sqrt{3} + \sqrt{5}$, $P = \{n | n \leq \sqrt{13}\}$, 则 ()

A. $m \notin P$ B. $\{m\} \subseteq P$ C. $P \subseteq \{m\}$ D. $m \in P$

7. 已知集合 $A = \{x | -4 < x < 7\}$, $B = \{y | y > b\}$, 若 $A \subseteq B$ 且 $a \in B$, 则 a 的最小值是 _____.

8. 用适当的符号填空, $\{x \in \mathbb{R} | x^2 + 1 = 0\}$ _____ $\{x \in \mathbb{Z} | 4 < x^2 < 9\}$; $\{x | x \text{ 是平行四边形}\}$ _____ $\{x | x \text{ 是矩形}\}$.

9. 已知集合 $A = \{x | x^2 + 3x - 10 > 0\}$, $B = \{x | x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a - 12 < 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

能力提升

1. 已知集合 $M = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 对于集合 M 的一个子集 A , 当 $x \in A$ 时, 若有 $x-1 \notin A$, 且 $x+1 \notin A$, 则称 x 为 A 的一个“孤立元素”, 那么 M 中无孤立元素的 4 元子集的个数有 ()

A. 6 B. 4 C. 7 D. 8

2. 已知集合 $A = \{x | ax - 1 = 0\}$, $B = \{y | y^2 - 3y + 2 = 0\}$, 若 $A \subseteq B$, 则这样的实数 a 有 ()

A. 0 个 B. 1 个 C. 3 个 D. 无数个

3. 已知集合 $A = \{x, xy, x+y\}$, $B = \{0, -x, |y|\}$, 且 $A = B$, 则 $x =$ _____, $y =$ _____.

4. 集合 $M = \{(x, y) | \begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}\}$ 与集合 $N = \{(x, y) | \begin{cases} xy > 1 \\ x+y > 2 \end{cases}\}$ 的关系是 _____.

5. 集合 $P = \{(m, n) | m^2 + n^2 - 2m - 2n + 2 = 0\}$, 集合 $Q = \{(s, t) | st - s - t + 1 = 0\}$, 则集合 P 与 Q 的关系是 _____.

6. 已知集合 $P = \{x | -2 < ax < -1\}$, $Q = \{y | |y| < 2\}$, 是否存在实数 a , 使得 $P \subseteq Q$, 若存在, 求出 a 的取值范围, 若不存在, 请说明理由.





7. 已知集合 $M = \{x | x^2 + 3x + m = 0\}$, $N = \{x | (x-1)(x^2 - 3x - 4) = 0\}$, 是否存在实数 m , 使 $M \subseteq N$, 若存在, 求出 m 的集合; 若不存在, 请说明理由.

8. 设 $X = \{x | x = 6m + 10n, m, n \in \mathbb{Z}\}$; $Y = \{y | y = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$, 证明: $X = Y$.

第三节 集合的基本运算



目标解读

理解集合的补集、并集、交集的概念, 了解全集的意义, 掌握有关术语和符号, 会表示一些简单集合.



学法指导

重点是并集、交集、补集的概念, 难点是正确求解或表述并集、交集、补集. 要切实理解两个集合的并集、交集、补集的中文汉字语言、数学符号语言和 Venn 图语言. 逐步掌握数形结合的数学思想, 分类讨论数学思想, 合理借助数轴、Venn 图解题.



知识清单

- 一般地, 由属于 _____ 属于 _____ 的 _____ 元素组成的集合, 称为集合 A 与 B 的并集, 记作 _____, 即 $A \cup B = \{x | \text{_____}\}$, 用 Venn 图表示为 _____.
- 一般地, 由既属于 _____ 属于 _____ 的 _____ 元素组成的集合, 称为集合 A 与 B 的交集, 记作 _____, 即 $A \cap B = \{x | \text{_____}\}$, 用 Venn 图表示为 _____.
- 在研究某些集合时, 这些集合往往是某个 _____ 集合的 _____, 这个给定的集合叫做全集, 通常用符号 _____ 表示.
- 设 U 是全集, A 是 U 的一个子集 (即 _____), 由 U 中 _____

_____ 不属于 _____ 的元素组成的集合, 叫做集合 _____ 的补集, 记作 _____, 即 $\complement_U A = \{x | \text{_____}\}$, 用

Venn 图表示为 _____.

- $A \cup B$ _____ $B \cup A$; $A \cup A =$ _____; $A \cup \emptyset =$ _____; $(A \cup B) \cup C$ _____ $A \cup (B \cup C) =$ _____.
- $A \cap B$ _____ $B \cap A$; $A \cap A =$ _____; $A \cap \emptyset =$ _____; $(A \cap B) \cap C$ _____ $A \cap (B \cap C) =$ _____.
- $\complement_U U =$ _____, $\complement_U \emptyset =$ _____; $\complement_U (\complement_U A) =$ _____; $\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$; $\complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$.
- 已知 $U = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 6\}$, $C = \{3, 6, 9\}$, $D = \{0\}$, 则 $A \cup B =$ _____, $A \cap C =$ _____; $\complement_U B =$ _____, $C \cap D =$ _____, $\complement_U (A \cup D) =$ _____.



要点解读

知识要点 1 并集

集合 A 与集合 B 的并集记作 $A \cup B$, $A \cup B = \{x | x \in A, \text{或 } x \in B\}$, 注意 $A \cup B$ 中的元素 x 有三种情况: $x \in A$ 且 $x \notin B$; $x \notin A$ 且 $x \in B$; $x \in A$ 且 $x \in B$. 要记住并集的基本性质: $A \cup B = B \cup A$; $A \subseteq (A \cup B)$; $B \subseteq (A \cup B)$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$; $A \cup A = A$; $A \cup \emptyset = A$; $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$; $\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$.





例1 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 = 0\}$, $B = \{x | ax - x^2 - 3a + 9 = 0\}$, $C = \{x | bx - x^2 - 3 = 0\}$, 求 $A \cup B$, $A \cup C$.

解析 $\because A = \{1, 3\}$, $B = \{x | (x - a + 3)(x - 3) = 0\}$, $C = \{x | x^2 - bx + 3 = 0\}$

$\therefore$ 由 $a - 3 = 1$ 或 $a - 3 = 3$ 得 $a = 4$ 或 $a = 6$

$\therefore$ 当 $a = 6$ 时, $A \cup B = \{1, 3\}$;

$a = 4$ 时, $A \cup B = \{1, 3\}$;

$a \neq 6$ 且 $a \neq 4$ 时, $A \cup B = \{1, 3, a - 3\}$, 当 $b^2 < 12$ 即 -2

$\sqrt{3} < b < 2\sqrt{3}$ 时, $C = \emptyset$, $A \cup C = \{1, 3\}$;

当 $b = 4$ 时, $C = \{1, 3\}$, $A \cup C = \{1, 3\}$;

$b = 2\sqrt{3}$ 时, $C = \{\sqrt{3}\}$, $A \cup C = \{1, \sqrt{3}, 3\}$;

$b = -2\sqrt{3}$ 时, $C = \{-\sqrt{3}\}$, $A \cup C = \{-\sqrt{3}, 1, 3\}$;

$b < -2\sqrt{3}$ 或 $b > 2\sqrt{3}$ 时, $C = \left\{ \frac{b - \sqrt{b^2 - 12}}{2}, \right.$

$\left. \frac{b + \sqrt{b^2 - 12}}{2}, 1, 3 \right\}$.

评注 该例的关键是正确判断集合 B, C 中的元素, 灵活运用分类讨论数学思想解.

变式训练1 若 $M = \{x \in N | x^2 - mx + 18 = 0\}$, $N = \{x \in Z | x^2 - 10x + n = 0\}$, $M \cup N = \{3, 7, 6\}$.

试求实数 m, n 的值, 并求出集合 M, N .

解 依题意可知 M 中的两元素之积为 18, N 中的两元素之和为 10, 且 M, N 中的元素都是 $M \cup N$ 中的元素, 故 $M = \{3, 6\}$, $N = \{3, 7\}$. 此时 $m = 3 + 6 = 9$, $n = 3 \times 7 = 21$.

知识要点2 交集

集合 A 与集合 B 的交集记作: $A \cap B$, $A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$, $A \cap B$ 中的元素只有一种情况, 即 $x \in A$ 且 $x \in B$, 交集的基本性质有: $A \cap B = B \cap A$; $A \supseteq A \cap B$, $B \supseteq A \cap B$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$; $A \cap B \subseteq A \cup B$; $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$; $\complement_U(A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$.

例2 已知集合 $P = \{s | s^2 - 4s = 0\}$, $Q = \{t | t^2 - 2(m+1)t + m^2 - 1 = 0\}$, 若 $P \cap Q = Q$, 试求实数 m 的集合.

解析 $\because P = \{0, 4\}$, $P \cap Q = Q \therefore Q \subseteq P \therefore Q = \emptyset$ 或 $\{0\}$ 或 $\{4\}$ 或 $\{0, 4\}$

若 $Q = \emptyset$, 则 $4(m+1)^2 - 4(m^2 - 1) < 0 \therefore 2m + 2 < 0$

$\therefore m < -1$

若 $Q = \{0, 4\}$, 则 $\begin{cases} 0 + 4 = 2(m+1) \\ 0 \times 4 = m^2 - 1 \end{cases} \therefore m = 1$

若 $Q = \{0\}$, 则 $\begin{cases} 0 = 2(m+1) \\ 0 = m^2 - 1 \end{cases} \therefore m = -1$

若 $Q = \{4\}$, 则 $\begin{cases} 4 + 4 = 2(m+1) \\ 4 \times 4 = m^2 - 1 \end{cases} \therefore \begin{cases} m = 1 \\ m^2 - 1 = 16 \end{cases}$ 矛盾.

综上所述, 所求实数 m 的取值的集合为 $\{m | m \leq -1 \text{ 或 } m = 1\}$

变式训练2 已知 $M = \{x | x^2 - m < 0\}$, $N = \{x | x + 2 > 0\}$, 若 $M \cap N = M$, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $m < 4$ B. $0 < m \leq 4$ C. $m \leq 4$ D. $0 < m < 4$

解 $\because M \cap N = M \therefore M \subseteq N$

$\therefore m \leq 0$ 或 $\begin{cases} m > 0 \\ -2 \leq -\sqrt{m} \end{cases}$

$\therefore m \leq 0$ 或 $0 < m \leq 4$

$\therefore m \leq 4$ 选 C.

知识要点3 全集与补集

全集常用符号 U 表示, 它含有我们所要研究的集合的全部元素.

补集: 补集是相对于全集而言, 没有全集也就无所谓补集了. 可以从下面几个方面对补集进行理解, 一是符号 $\complement_U A$, 表明 $A \subseteq U$; 二是相同的集合 A , 对于不同的全集 U , 补集 $\complement_U A$ 也不相同; 三是 $\complement_U U = \emptyset$, $\complement_U \emptyset = U$, $\complement_U(\complement_U A) = A$; 四是全集 U 可以为一些具体集合, 如 $\complement_U A$, $\complement_U A$ 等的全集是 R, Q ; 五是求某些集合的补集类似于求相反数、倒数等一元运算.

例3 已知全集 $U = \{x \in N | x \leq 6\}$, $A = \{0, 1, 3\}$, $B = \{2, 3, 6\}$, 试求:

(1) $\complement_U A$; (2) $\complement_U B$; (3) $A \cap \complement_U A$; (4) $B \cup \complement_U B$; (5) $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$; (6) $\complement_U(A \cup B)$.

解析 易知全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$\therefore$ (1) $\complement_U A = \{2, 4, 5, 6\}$;

(2) $\complement_U B = \{0, 1, 4, 5\}$;

(3) $A \cap \complement_U A = \emptyset$;

(4) $B \cup \complement_U B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = U$;

(5) $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{4, 5\}$

(6) $\because A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 6\} \therefore \complement_U(A \cup B) = \{4, 5\}$.





评注 解决本题的关键是明确全集 U 中的所有元素,求集合 A 的补集就是把 U 中又在 A 中的元素划去,剩下的全部元素组成的集合即是 $\complement_U A$.

变式训练 3 已知全集 U 为实数集 R , 集合 $A = \{x | x = y^2 - 3, y \in R\}$, $B = \{y | y^2 - 5y + 6 \leq 0\}$, $C = \{x | \frac{x-3}{x+2} \geq 0\}$. 求 $\complement_U A$, $\complement_U B$, $\complement_U C$.

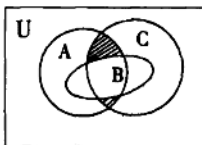
解 $\because A = \{x | x \geq -3\}$, $B = \{y | 2 \leq y \leq 3\}$, $C = \{x | x < -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$.

$\therefore \complement_U A = \{x | x < -3\}$, $\complement_U B = \{y | y < 2 \text{ 或 } y > 3\}$, $\complement_U C = \{x | -2 \leq x < 3\}$

例 4 如图示, 设 U 是全集, A, B, C 是它的子集, 则图中阴影部分所表示的集合是 ()

- A. $[(\complement_U A) \cap B] \cap C$ B. $A \cap (\complement_U B) \cap C$
C. $A \cap B \cap (\complement_U C)$ D. $[(\complement_U B) \cap A] \cup C$

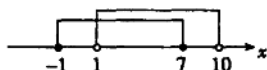
解析 易知, 图中阴影部分既在 A 中又在 C 中且不在 B 中, 即 $(A \cap C) \cap (\complement_U B)$, 故选 B.



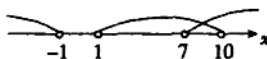
评注 本题关键是分清阴影部分在哪些集合中又不在哪些集合中, 要学会利用 Venn 图直观地帮助我们解决有关集合的运算问题.

变式训练 4 已知 $U = R$, $A = \{x | x^2 - 6x - 7 \leq 0\}$, $B = \{x | x^2 - (a+1)x + a < 0\}$, $C = \{x \in R | x^2 - (5+m)x + 5m > 0\}$. (1) 若 $A \cap B = \{x | 1 < x \leq 7\}$, $(\complement_U A) \cap B = \{x | 7 < x < 10\}$, 试求实数 a 的值; (2) 若 $A \cap (C \cap Z) = \{5, 6\}$, 试求实数 m 的集合.

解 (1) 如下图(1), (2) 示, 易知 1 与 10 是方程 $x^2 - (a+1)x + a = 0$ 的两根. $\therefore a = 10$.

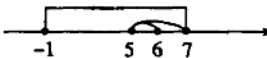


图(1)



图(2)

(2) 如下图(3) 示, 易知方程 $x^2 - (5+m)x + 5m = 0$ 的两根为 5, m , 且 $6 \leq m < 7$, 故实数 m 的集合为 $\{m | 6 \leq m < 7\}$.



图(3)



高考真题

例 1 (05, 江西, 5 分) 设集合 $I = \{x | |x| < 3, x \in Z\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{-2, -1, 2\}$, 则 $A \cup (C_I B) =$ ()

- A. $\{1\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

解析 $\because I = \{x | |x| < 3, x \in Z\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$\therefore C_I B = \{0, 1\}$

$\therefore A \cup (C_I B) = \{0, 1, 2\}$

选 D.

例 2 (06, 江西, 5 分) 已知集合 $M = \{x | \frac{x}{(x-1)^2} \geq 0\}$, $N = \{y | y = 3x^2 + 1, x \in R\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()

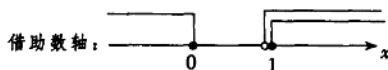
- A. $\emptyset$ B. $\{x | x \geq 1\}$
C. $\{x | x > 1\}$ D. $\{x | x \geq 1 \text{ 或 } x < 0\}$

解析 $\because$ 由 $\frac{x}{(x-1)^2} \geq 0$ 得: $1 < x$ 或 $x \leq 0$

$\therefore M = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x > 1\}$

$\because$ 由 $y = 3x^2 + 1, x \in R$ 得 $y \geq 1$,

$\therefore N = \{y | y \geq 1\}$



$\therefore M \cap N = \{x | x > 1\}$ 选 C.

例 3 (05, 全国 I, 5 分) 设 I 为全集, S_1, S_2, S_3 是 I 的三个非空子集, 且 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$, 则下面论断正确的是 ()

- A. $C_I S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = \emptyset$ B. $S_1 \subseteq (C_I S_2 \cap C_I S_3)$
C. $C_I S_1 \cap C_I S_2 \cap C_I S_3 = \emptyset$ D. $S_1 \subseteq (C_I S_2 \cup C_I S_3)$

解析 $\because S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$,

$\therefore C_I (S_1 \cup S_2 \cup S_3) = \emptyset$

$\therefore C_I (S_1 \cup S_2) \cap C_I S_3 = C_I S_1 \cap C_I S_2 \cap C_I S_3 = \emptyset$

$\therefore$ 选 C.

例 4 (06, 福建, 5 分) 已知全集 $U = R$, 且 $A = \{x | |x-1| > 2\}$, $B = \{x | x^2 - 6x + 8 < 0\}$, 则 $(C_U A) \cap B$ 等于 ()

- A. $[-1, 4)$ B. $(2, 3)$ C. $(2, 3]$ D. $(1, 4)$

解析 $\because |x-1| > 2 \therefore x < 1-2 = -1$ 或 $x > 1+2 = 3$

$\therefore A = \{x | x < -1, \text{ 或 } x > 3\}$

$\because x^2 - 6x + 8 < 0 \quad 2 < x < 4$

$\therefore B = \{x | 2 < x < 4\}$

$\therefore C_U A = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$, $\therefore (C_U A) \cap B = \{x | 2 < x \leq 3\}$





挑战自我

基础达标

1. 已知集合 $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$, $A = \{-1, 0, 2, 3\}$, $B = \{-2, 0, 1, 2\}$, 则 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) =$ ()

A. $\{-3, -2, 1\}$ B. $\{-3, -1, 3\}$
C. $\{-3, -2, -1, 1, 3\}$ D. $\{-3\}$

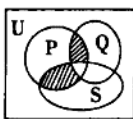
2. 已知全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x \mid |x-2| \leq 1\}$, $B = \{x \mid x^2 - 5x - 6 \geq 0\}$, 则 $(C_R A) \cap B$ 等于 ()

A. $\emptyset$ B. $\{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$
C. $\{x \mid -1 \leq x < 1 \text{ 或 } 3 < x \leq 6\}$ D. $\{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 6\}$

3. 若集合 $A = \{x \mid |x-1| \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{y \mid y = x^2, -2 \leq x < 1\}$, 则 $(C_R A) \cup (C_R B) =$ ()

A. $\{x \mid -2 \leq x \leq 4\}$ B. $\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 4\}$
C. $\{x \mid -2 \leq x \leq 0\}$ D. $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 0\}$

4. 如右图(1)示, U 是全集, 它的三个子集为 P, Q, S , 则阴影部分所示集合为 ()



A. $[(P \cap Q) \cap (\complement_U S)] \cup [(P \cap S) \cap (\complement_U Q)]$

B. $(P \cap Q) \cup (P \cap S)$

C. $P \cap Q \cap S$

D. $P \cap [\complement_U (Q \cap S)]$

5. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + 2x < 0\}$, $B = \{x \mid |x| < 2\}$, 则 ()

A. $A \cap B = \emptyset$ B. $A \cap B = B$
C. $A \cup B = B$ D. $A \cup B = A$

6. 设 $U = \mathbb{Z}$, $A = \{x \mid x = 2m, m \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{y \mid y = 2n+1, n \in \mathbb{Z}\}$, 则集合 $(\complement_U A) \cap B$ 等于 ()

A. B B. U C. $\emptyset$ D. A

7. 设全集 $U = \{2, 5, 1+a\}$, 集合 $A = \{5, a-1\}$, 若 $\complement_U A = \{4\}$, 则 $a =$ _____.

8. 已知 $U = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, $A = \{(x, y) \mid x - y + 2 = 0\}$, $B = \{(x, y) \mid \frac{x}{y-2} = 1\}$, 则 $A \cap \complement_U B =$ _____.

9. 若集合 $M = \{x \mid x^2 + mx + n = 0\}$, $N = \{x \mid x^2 - mx + n = 0\}$, $U = \mathbb{R}$, $(C_R M) \cap N = \{2\}$, $M \cap (C_R N) = \{3\}$, 试求出集合 M, N .

10. 已知全集 $U = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$, 集合 $A = \{x \mid -3 < x < 2\}$, $B = \{x \mid -4 < x \leq 3\}$, 求 $\complement_U B, A \cup B, (\complement_U A) \cup (\complement_U B), (\complement_U A) \cap B$.

能力提升

1. 在某班 48 人中, 有球类爱好者 30 人, 文艺爱好者 28 人, 棋类爱好者 19 人, 球类、文艺爱好者 13 人, 球类、棋类爱好者 12 人, 文艺、棋类爱好者 11 人, 三种均爱好的有 5 人, 则该班这三种均不爱好的有 ()

A. 1 人 B. 2 人 C. 3 人 D. 5 人

2. 已知集合 $P = \{x \mid x^2 + ax + 1 = 0\}$, $P \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $\{-2, 2\}$ B. $a < -2 \text{ 或 } a > 2$
C. $a \leq -2 \text{ 或 } a \geq 2$ D. $-2 \leq a \leq 2$

3. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + 3x + m = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - nx - 2 = 0\}$, $A \cap B = \{2\}$, 则 $m^2 - mn =$ _____.

4. 定义 $A - B = \{x \mid x \in A, \text{ 且 } x \notin B\}$, 若 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-2, 2, 3, 5\}$, 则 $A - B =$ _____.





5. 设 $M = \{x | x^2 - 5x + 4 \leq 0\}$, $N = \{x | \frac{4}{x-2} \leq 1\}$, $P = \{x | ax - 1 < 0\}$, 若 $P \supseteq M \cap N$, 且 $P \supseteq [(C_R M) \cap (C_R N)]$, 试求实数 a 的取值范围.

6. 已知集合 $M = \{x | x = a\sqrt{2} + b, a, b \in \mathbb{Z}\}$, (1) 求证: 对于 M 中任意的元素 x_1, x_2 , 均有 $x_1 + x_2 \in M$ 且 $x_1 - x_2 \in M$; (2) 若 $x_2 \neq 0$, 试判断 $x_1 x_2$ 及 $\frac{x_1}{x_2}$ 与集合 M 的关系.

