



全国硕士研究生  
入学统一考试  
数学考试分析  
(2009年版)

● 教育部考试中心

# 全国硕士研究生入学统一考试

## 数学考试分析

(2009年版)

教育部考试中心

数学学科考试说明

(一) 考试性质

(二) 指导思想

(三) 2009年《数学考试大纲》修订说明

(四) 命题原则

(五) 考试内容

(六) 试卷结构

二、2008年数学考试分析

(一) 试卷分析

(二) 命题特点

(三) 数学二试卷分析

(四) 数学三试卷分析

(五) 数学四试卷分析

三、数学命题与解答(2002—2008年)

(一) 数学一

(二) 数学二

(三) 数学三

(四) 数学四

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学统一考试数学考试分析(2009年版) / 教育部考试中心. —北京: 高等教育出版社, 2008.7.

ISBN 978-7-04-024243-3

I. ①全……II. 教……III. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第098037号

责任编辑 袁素萍 封面设计 王素珍 责任印制 李金全 印刷 北京印刷集团有限责任公司印刷厂印刷

010-58281118 发行部  
800-810-0808 营销中心  
http://www.laoq.com.cn 网站  
http://www.hq.com.cn 网上订购  
http://www.laoq.com.cn 网上书店  
http://www.laoq.com.cn 邮购部

出版发行 高等教育出版社  
社址 北京朝阳区惠新东街10号  
邮政编码 100120  
总机 010-58281000  
编辑 北京印刷集团有限责任公司  
印刷 北京印刷集团有限责任公司

版次 2008年7月第1版  
印次 2008年7月第1次印刷  
定价 30.00元

开本 787×1092 1/16  
印张 14.8  
字数 330 000



高等教育出版社

本社网址: www.hep.com.cn  
邮购部电话: 010-58281000  
CIP数据核字(2008)第098037号

全国硕士研究生入学考试参考书

# 数学

(数学 000)

高等教育出版社

## 图书在版编目 (CIP) 数据

全国硕士研究生入学统一考试数学考试分析: 2009年版 / 教育部考试中心. —北京: 高等教育出版社, 2008.7

ISBN 978-7-04-024242-3

I. 全… II. 教… III. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆CIP数据核字 (2008) 第098037号

策划编辑 刘佳 责任编辑 蒋青 封面设计 王凌波  
责任校对 金辉 责任印制 陈伟光

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100120  
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司  
印 刷 涿州市星河印刷有限公司

开 本 787×1092 1/16  
印 张 14.5  
字 数 350 000

购书热线 010-58581118  
免费咨询 800-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landaco.com>  
<http://www.landaco.com.cn>  
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2008年7月第1版  
印 次 2008年7月第1次印刷  
定 价 30.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 24242-00

# 目 录

一、数学科考试说明 .....	1
(一) 考试性质 .....	1
(二) 指导思想 .....	1
(三) 2009 年《数学考试大纲》修订说明 .....	2
(四) 基本原则 .....	2
(五) 参考答案及评分参考的制订说明 .....	3
(六) 试题、试卷和考试质量的评价指标 .....	3
二、2008 年数学考试分析 .....	6
(一) 试卷分析 .....	6
(二) 数学一试题分析 .....	8
(三) 数学二试题分析 .....	30
(四) 数学三试题分析 .....	43
(五) 数学四试题分析 .....	65
三、数学试题分析(2006 年—2007 年) .....	75
(一) 数学一 .....	75
(二) 数学二 .....	118
(三) 数学三 .....	155
(四) 数学四 .....	195



## 一、数学科考试说明

### (一) 考试性质

全国硕士研究生入学统一考试数学科考试(以下简称数学考试)是为招收工学、经济学、管理学硕士研究生而设置的具有常模参照性的水平考试。

一方面,从数学考试成绩的使用功能上看,它是常模参照性的考试。所谓常模参照考试是指依据考生的成绩在全体考生成绩量表中的位置来评价考生成绩的优劣,离开考生群体解释考生的成绩意义不大。我国硕士研究生招生初试是从高分到低分择优确定参加复试人选,这种优胜劣汰的方式是常模参照考试的主要特征。数学考试成绩对于工学、经济学和管理学各专业的考生是否被录取起着至关重要的作用。从这个意义上讲,数学考试具有明显的选拔功能,是常模参照考试。

另一方面,从数学考试测量功能上看,数学考试又是水平考试。水平考试是用来测量考生是否达到一定的水平,从而决定是否适应将来的某项任务的考试,其主要特征是命题不以《教学基本要求》和某一指定的教材为依据,而是以《考试大纲》为依据。《考试大纲》规定考试内容和考试要求,与《教学基本要求》没有直接的关系。数学考试是测量工学、经济学、管理学各专业的考生是否具备为完成相应专业研究生阶段的学习任务,以及胜任工作后的研究任务所必需的数学知识和能力。数学《考试大纲》规定的考试内容和考试要求与《教学基本要求》不完全相同,《教学基本要求》中规定的有些教学内容《考试大纲》不要求考查,而《考试大纲》中的有些考试要求要略高于教学要求。可见,数学考试也符合上述水平考试的特征,因而也是水平考试。

为了体现工学、经济学、管理学不同学科专业对硕士研究生入学应具备的数学知识和能力的不同要求,从2009年开始,数学考试分为三个卷种,即数学一、数学二和数学三,对不同卷种的考试内容有不同的要求。这种对不同学科、专业考生提出不同的考试要求的特征也是水平考试的重要标志。

### (二) 指导思想

根据数学考试的性质和目的,数学科考试的命题工作一直坚持两个“有利于”的指导思想,即既有利于国家对高层次人才的选拔,又有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高,在这两个“有利于”中,重点是有利于为国家选拔高层次的人才。

有利于国家对高层次人才的选拔,就是要求这项考试具有较高的信度和效度,能对考生群体进行有效的测量和甄别,从而区分出考生成绩的优劣,并将数学基础好、有发展潜力并具有一定创新能力的考生选拔出来,进入更高层次的教育阶段学习、深造。

有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高,要求数学考试试题的编制能结合高等学校的教学实际,试题水平既能反映教学的实际水平,也能考查研究生新生应当具备的知识和能力,同时,正确利用考试这根“指挥棒”引导高校教学向培养学生应用数学能力的方向发展,使得学生学而有功,学而会用,从而对数学教学质量的提高起到积极的促进作用。

### (三) 2009 年《数学考试大纲》修订说明

随着我国高等教育的发展,本科教育在培养目标和教学理念上都发生了重大转变,培养知识面宽、基础扎实、能力强、素质高的专门人才成为共识。为适应目前高等院校课程改革的形势,经广泛调研和充分论证,教育部决定从 2009 年起,将原数学三、数学四进行整合,整合后称为“数学三”。原使用数学三或数学四的招生专业从 2009 年开始使用新的“数学三”。

新“数学三”的考试内容和考试要求调整如下:

1. 新“数学三”的考试内容为微积分、线性代数、概率论与数理统计,其分数比例依次约为 56%、22% 和 22%。
2. 新“数学三”较原数学四的变化有:
  - (1) 增加了无穷级数的相关内容;
  - (2) 增加了线性微分方程解的性质及解的结构定理、二阶微分方程及差分方程的相关内容;
  - (3) 增加了数理统计的基本概念、点估计的概念、矩估计法及最大似然估计的相关内容。
3. 新“数学三”较原数学三的变化有:
  - (1) 降低了无穷级数中部分考试内容的考试要求;
  - (2) 降低了常微分方程与差分方程中二阶微分方程、差分方程的考试要求;
  - (3) 降低了概率论中切比雪夫不等式的考试要求;
  - (4) 降低了数理统计的基本概念中部分考试内容的考试要求;
  - (5) 降低了参数估计中点估计等概念的考试要求;
  - (6) 删除了参数估计中估计量的评选标准和区间估计的考试内容;
  - (7) 删除了假设检验的全部考试内容。
4. 新“数学三”的参考试题根据考试内容和考试要求的变化做了相应调整。

### (四) 基本原则

(1) 严格按照《2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(以下简称《考试大纲》)规定的考试内容和考试要求进行命题。

《考试大纲》主要包括以下内容:考试性质、考试的基本要求、考试方法和考试时间、试卷分类以及各类试卷适用的招生专业、考试内容、考试要求、试卷结构(包括内容比例和题型比例)和参考试题等,它是法规性文件,是命题工作和考生复习的唯一依据。

按照《考试大纲》命题是指考查的内容不超过大纲的规定,各科目在试卷中的占分比例、题型比例与大纲要求基本一致,试卷的难易度与参考试题的难易度基本一致,试卷中不出现超纲题、偏题和怪题。

(2) 试题以考查数学的基本概念、基本方法和基本原理为主,在此基础上加强对考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力和综合运用所学知识解决实际问题能力的考查。

(3) 试题编制要符合各种题型编制原则。

(4) 保持历年试题难度的稳定。

(5) 试题编制应科学、公正、规范。

### (五) 参考答案及评分参考的制订说明

制订参考答案及评分参考是命题工作的一个重要组成部分,它为全国范围内统一的评卷工作提供了一个公正、科学的量表和尺度,是考试公平性的重要保证。

数学填空题要求答案是确定的和唯一的,参考答案只给出应填的结果,不给出推导计算过程.一般每题4分,答对4分,答错0分.对于四选一的选择題有A、B、C、D四个备选项,其中三个是干扰项,一个是正确选项,参考答案只给出正确选项前的字母,不给出推导过程.选对得满分,选错得0分,不倒扣分,鼓励考生在不会作答时猜测选项.对于计算题、证明题以及其他解答题,一般提供一至两种参考解答和证明,有些试题有更多的解法甚至包括初等解法,但所提供的参考解答必须是与《考试大纲》规定的考试内容和考试目标相一致的解法和证明方法.参考答案的文字表述必须规范,推理过程必须表述清楚,避免因参考答案表述不清而造成评分误差.每题分值的设置与完成该题所花费的平均时间以及考核目标的层次有关.一般地说,综合性较强的试题、推理过程较多的试题和应用性的试题赋分的权重较大,分值较高;基本计算题、常规性试题和简单应用题的分值较低.各题的分值设定之后,就需要确定评分参考,即运算过程中关键步骤的赋分权重.计算题和证明题的评分标准是按照计算或推理的过程连续赋分的,比如,完成一道分值为10分的计算题需要三个关键步骤,完成到第一个步骤给3分,完成到第二个步骤给6分,三个步骤全部完成给10分.对于文科试题常常是按照要点单独赋分.为什么数学题不宜按每个步骤单独给分呢?这是考虑到对于数学计算或证明题,只有做对了前面步骤,才能完成后面的步骤这一特点.对于有多个解法的试题,一般到达同一结果给相同的分数,每一步骤分的给定不是随意的,如同确定每题分值一样,需要考虑该步骤在解答和证明过程中的复杂和重要程度,关键的步骤分值较高,反之较低.

参考答案与评分参考是评分的原则依据,一般各地在试卷评阅前要组织专家依照参考答案与评分参考对部分考卷进行试评,对评分参考作进一步的细化,制订评分细则,使评卷工作更具可操作性.

评分参考的制订直接关系到试卷的平均分,一份由很难的试题构成的试卷,可以通过较松的评分参考使其平均分较高,反之亦然.因此,评分参考制订的科学性和逐年稳定性是试卷质量的重要组成部分.

### (六) 试题、试卷和考试质量的评价指标

根据全国硕士研究生入学数学考试的性质,它是常模参照性的水平考试.对于常模参照考试,通常用难度和区分度评价试题的质量;用平均分和标准差反映考生成绩的分布情况,同时也作为评价试卷质量的重要指标;用信度和效度评价考试的质量.

#### 1. 试题的评价指标

试题难度是反映试题难易程度的指标,它是考生在该题上的得分率,即考生在该题上的平均得分与该题满分之比,通常以小写的 $p$ 表示,取值范围在0到1之间.由于不同的考生群体水平是有差异的,他们在同一题上的平均得分也不同,因此,同一题目相对于不同的考生群体,其难度值是不同的,也就是说题目难度依赖于考生样本.

但对于全国统一考试而言,由于参加考试的考生群体的水平是相对稳定的,可以把每年的考



生群体视作基本不变的(实际上每年考生水平是存在一定差异的),这样试题的统计难度值或估计值就可以用于比较和控制试卷质量.

对于数学考试而言,难度值在 0.3 以下的为难题,难度值在 0.3 ~ 0.8 之间的视为中等难度的试题,难度值在 0.8 以上的视为易题. 试卷难度一般控制在 0.5 左右,一份试卷中难、中、易试题要有一个合适的比例.

在命题过程中,为了保证试题的质量,需要估计题目难度. 根据难度的定义,估计难度不仅要考虑题目自身的内容难度,而且要考虑考生群体的水平以及该题的评分参考的设计.

试题区分度是指题目对不同水平的考生加以区分的程度或鉴别的能力. 区分度通常表示某一群体的全体考生在该题上的得分与他们的试卷总分之间的相关系数,用  $D$  表示,一般  $-1 < D < 1$ . 对于主观性试题,一般用积矩相关系数;对于客观性试题,如填空题和选择题,一般用双列相关计算公式. 该公式比较复杂,可参考有关教育测量书籍,在此不作介绍.

一种近似的、适合于主观性试题区分度的计算方法是先将考生群体分出一个高分组和一个低分组,然后分别计算出高分组、低分组的得分率  $p(H)$ 、 $p(L)$ ,  $D = p(H) - p(L)$ . 高分组一般是考生群体中成绩在前面的 27% 的考生,低分组一般是考生群体中成绩在后面的 27% 的考生. 这种方法适合较小规模的考试,不适用于大规模的考试.

一般认为区分度在 0.3 以上的试题为合格,0.2 ~ 0.3 之间的试题应予以修正,0.2 以下的试题为不合格,应予以淘汰.

区分度与难度有一定的关系,难度越大或难度越小的试题其区分度通常较小,难度中等的试题区分度通常较大. 为了综合难度和区分度这两项指标对试题进行评价,我们通常将试题分为六类,如表 1-1 所示.

表 1-1 试题的六大类型分类表

特征 类型	$p$	$D$	试题特征
I	(0,0.3)	(0,0.3)	难度大且区分能力差
II	[0.3,0.8]	(0,0.3)	难度适中但区分能力差
III	(0.8,1)	(0,0.3)	难度小且区分能力差
IV	(0,0.3)	(0.3,1.0)	难度大但区分能力强
V	[0.3,0.8]	(0.3,1.0)	难度适中且区分能力强
VI	(0.8,1)	(0.3,1.0)	难度小但区分能力强

在上述分类中,我们没有考虑区分度小于零的情况,因为这种试题一般不会出现. 我们认为,第 V 类试题是测量效果较好的试题,在试卷中应占较大比例(达 80% 以上). 第 I 类试题属于“题太难谁都不会做”,第 III 类试题属于“题太易谁都会做”,它们在试卷中仅起到降低或提高平均分、降低标准差的作用,因此,命题中我们严格控制出现这两类试题. 同时,我们也不要求出现太多的第 II 类和第 VI 类试题. 第 IV 类试题在选拔性的研究生入学数学考试中具有非常重要的作用,它对区分中、高水平的考生十分有效,通过多年对试题的分析,这类试题往往是考查考生综合应用能力的试题.



## 2. 试卷的评价指标

若将一份试卷看作一个题目,则像计算题目难度一样,也有一个试卷难度指标,即全体考生的平均分与试卷满分之比.在某项考试的满分逐年保持不变的情况下,全体考生的平均分成为衡量试卷难易程度的重要指标,试卷的平均分反映全体考生的平均得分.试卷的标准差是反映考生成绩离散程度的指标,标准差愈大,说明考生成绩分布得愈广,该考试将不同水平的考生区分开来的效果愈强;标准差越小,说明考生成绩都集中在平均分附近,没有把不同水平的考生拉开.

试卷平均分和标准差是反映试题难易度是否稳定的非常重要的指标.因为不同年份的同一科试卷是否稳定主要看考后考生成绩的分布是否稳定,在大规模考试中,一般情况下考生的成绩近似服从正态分布,而正态分布由均值和标准差决定,试卷的平均分和标准差是考生成绩总体均值和标准差的良好估计.因此,控制试卷的难易度的稳定性,关键是控制试卷的平均分和标准差.

试卷的平均分与构成试卷的试题的难度有一种确定的关系式,即试卷的平均分等于每题的题分乘以该题的难度值后的相加值,在命题过程中可以通过有经验的命题教师对试题难度进行估计,就可以利用上述关系式估计出试卷的平均分,从而达到控制试卷难度的目的.试题的区分度与试卷的标准差虽然没有确定的关系,但一般来说,试题的区分度愈大,该题对试卷标准差的贡献值就愈大.特别地,中等难度、区分度较大的第V类试题对标准差的贡献最大.因此,在命题中应尽量使第V类试题在卷中占分比例较大.

试卷的及格率是指获得满分的60%以上成绩的考生占考生总人数的比例,它是考生成绩分布曲线下大于90分的面积,此面积与成绩分布的均值和标准差有关,在命题中难以单独控制,把它作为评价考试情况的一个粗略的指标是可以的,但一般情况下,不把它作为试卷质量的评价指标.

## 3. 考试质量的评价指标

教育测量学认为考试的信度和效度是评价考试质量的重要指标.信度是反映考试可靠性的指标,可形象地解释为:只要测量对象本身没有变化,用同样的“尺子”去测量总可以得到相同的结果.常用的信度类型主要有再测信度、复本信度、分半信度和内部一致性信度.由主观性试题构成的考试的内部一致性系数又称为 $\alpha$ 系数.目前我们采用的是分半信度和 $\alpha$ 系数.效度反映一个考试是否测量了想要测量的东西.常用的效度类型主要有内容效度、效标关联效度和构想效度.关于信度和效度的计算公式可参照有关教育测量书籍.

在后面的试卷分析和试题分析部分将应用上述关于试题和试卷的评价指标.

科目	平均分	标准差	难度	区分度	及格率
一考卷	70.73	12.14	0.473	0.288	0.881
二考卷	82.99	12.17	0.273	0.273	0.873
三考卷	69.96	10.16	0.405	0.297	0.897
四考卷	56.77	9.99	0.218	0.218	0.804

## 二、2008 年数学考试分析

### (一) 试卷分析

#### 1. 总体评价

2008 年数学一至数学四试卷严格依照《考试大纲》命题,考查的都是各个课程的主干知识和基本方法,没有偏题、怪题,没有超纲试题. 试题叙述严谨、准确,设问规范、合理,所给参考答案科学性、逻辑性强、便于阅卷时参考执行. 试题覆盖面广,各部分内容所占比例适中. 各份试卷的难度适中,没有出现过大的起伏. 总之,2008 年试卷是一套命题科学、规范,考查基本、全面,难度适中、区分度好的高水平试卷. 具体特点表现为:

(1) 试题注重对基本知识、基本能力和基本方法的考查,这类题目在各份试卷中占到 40% 左右. 有利于引导考生在平时的学习中重视对课程主干知识、基本思想和基本方法的理解和掌握.

(2) 试卷中出现了重要结论与证明方法考查的试题,如数学一的第 18 题、数学二的第 20 题、数学三的第 18 题和数学四的第 19 题等. 这类题目的出现既可以考查考生的抽象思维和逻辑推理能力,又能引导学生重视对课程中重要内容的学习,对高校的数学教学能够起到积极的促进作用.

(3) 试题注重对综合运用数学知识、分析和解决问题能力的考查. 出现了将不同学科知识融合在一起综合考查的试题,如数学一的第 6 题将解析几何与线性代数结合在了一起,数学一的第 17 题将几何问题与多元函数的极值问题联系在一起;试题中还出现了应用问题的考查,如数学三的第 19 题是一个经济综合应用题,考查了贴现值的概念及无穷级数的求和问题,数学四的第 23 题是一个关于企业安排生产的应用题,考查了常用的概率公式和重要的概率分布. 这类应用问题的出现将会引导学生注意实际问题中的数学建模,也有利于培养他们应用数学的能力.

#### 2. 统计数据分析

##### (1) 难度分析

2008 年数学各卷种的抽样统计数据如表 2-1 所示. 与 2007 年相比,各卷种难度值都有不同程度的升高,数学一上升 0.06,数学二上升 0.09,数学三上升 0.005,数学四上升 0.07.

从表 2-2 可以看出,各卷种三种题型的难度值均在中等难度范围内,选择题、填空题的难度值都较解答题高,这体现了不同题型不同的考查功能:选择题主要考查考生对数学概念、数学性质的理解并能进行简单推理、判定、计算和比较;填空题主要考查“三基”及数学的重要性质,一般不考省去解答过程的大计算题;解答题除考查基本运算外,主要考查考生的逻辑推理和综合运用能力,因而对考生来说试题难度相对较大.

表 2-1 2008 年数学各卷种抽样统计数据

卷种	样本量	平均分	难度	标准差	$\alpha$ 信度
数学一	2914	70.73	0.472	32.60	0.8811
数学二	2517	85.86	0.572	31.98	0.8732
数学三	2616	69.36	0.462	33.97	0.8997
数学四	2499	77.63	0.518	31.58	0.8654

表 2-2 2008 年数学各卷种在三种题型上的难度值

题型	数学一	数学二	数学三	数学四
选择题	0.599	0.683	0.582	0.654
填空题	0.544	0.687	0.580	0.651
解答题	0.409	0.505	0.391	0.437

## (2) 区分度分析

从考生分数分布直方图(图 2-1 至图 2-4)可以看出,数学一、三、四近似正态分布,数学二呈负偏态,各卷的标准差均在 30 分以上,说明数学各卷种对考生进行了有效地区分.从表 2-3 可以看出,区分度在 0.2 以下的只有 1 道题,其余试题均在 0.2 以上,数学一有 94.6%、数学二有 92%、数学三 100%、数学四 97.3% 的试题都达到了 0.3 以上的合格水平.试题的区分性能良好.

表 2-3 2008 年数学各卷种区分度分布表

区分度区间	数学一	数学二	数学三	数学四
0.2 以下	2.7%	0%	0%	0%
0.2 ~ 0.3	2.7%	8%	0%	2.7%
0.3 以上	94.6%	92%	100%	97.3%

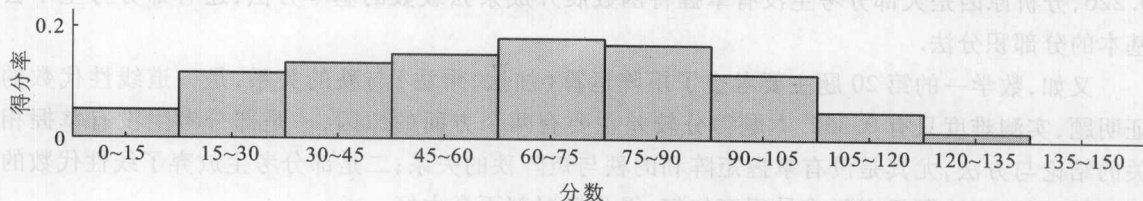


图 2-1 数学一考生分数分布直方图

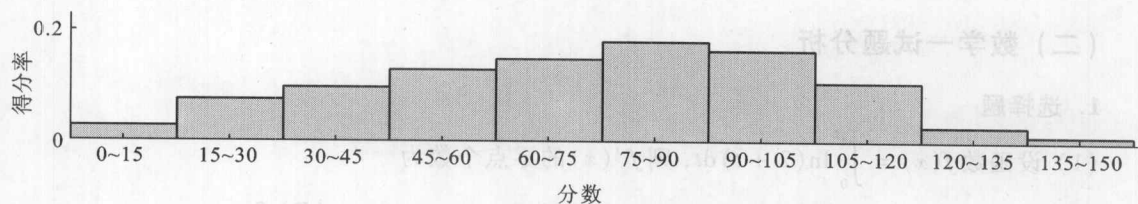


图 2-2 数学二考生分数分布直方图

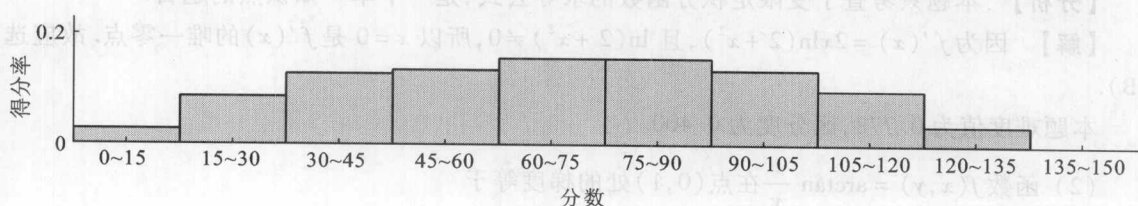


图 2-3 数学三考生分数分布直方图





**【答】** 应选(A).

**【分析】** 本题用到了二元函数在一点的梯度计算公式及简单函数偏导数的求法,考查了多元微分学中的基本运算能力,是一个简单计算题.

**【解】** 因为  $f'_x(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ ,  $f'_y(x, y) = \frac{-x}{x^2 + y^2}$ , 所以  $f'_x(0, 1) = 1$ ,  $f'_y(0, 1) = 0$ , 从而

$\text{grad} f(x, y) \Big|_{(0,1)} = \mathbf{i}$ .

**【典型错误】** 考生常见的错误是计算出错. 这可以从考生的答题情况看出,如部分考生选(B)或(C)等.

本题难度值为 0.759; 区分度为 0.587.

(3) 在下列微分方程中,以  $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$  ( $C_1, C_2, C_3$  为任意常数)为通解的是

(A)  $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$ .

(B)  $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$ .

(C)  $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$ .

(D)  $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ .

**【答】** 应选(D).

**【分析】** 本题考查了线性常系数齐次微分方程解的结构,及其线性无关的解与其特征值的关系,是一道简单的综合题.

**【解】** 根据条件,由通解的形式可以看出此微分方程的三个特征值分别为  $1, 2i, -2i$ , 所以它的特征方程为  $(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$ , 从而可知该微分方程是  $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ . 即选项(D)是正确的.

**【典型错误】** 从考生的答题情况看,出现的错误主要有两类,一类是不能由条件得到正确的特征值,如得到的三个特征值分别为  $1, 2, -2$ , 这时就会选(C);另一类是有了特征值写不出正确的特征方程,如将特征方程写成  $(\lambda + 1)(\lambda^2 + 4) = \lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ , 这时就会选(B).

本题的难度值为 0.801; 区分度为 0.385.

(4) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内单调有界,  $\{x_n\}$  为数列, 下列命题正确的是

(A) 若  $\{x_n\}$  收敛, 则  $\{f(x_n)\}$  收敛.

(B) 若  $\{x_n\}$  单调, 则  $\{f(x_n)\}$  收敛.

(C) 若  $\{f(x_n)\}$  收敛, 则  $\{x_n\}$  收敛.

(D) 若  $\{f(x_n)\}$  单调, 则  $\{x_n\}$  收敛.

**【答】** 应选(B).

**【分析】** 本题主要考查了数列的单调有界收敛准则,是一个具有一定难度的抽象问题.

**【解】** 在选项(B)中,因为数列  $\{x_n\}$  单调,考虑到  $f(x)$  是一个单调有界函数,所以数列  $\{f(x_n)\}$  不仅单调,而且有界,从而收敛.

**【典型错误】** 本题是四个高等数学选择题中考生做得最差的一个,主要问题是部分考生既不能直接找到正确选项(B),又不能排除其他选项,以至于题中的四个选项都有部分考生选中,且选(A)或(C)的考生都超过了一半.

事实上,若取  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$  和  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , 且  $f(x_n) =$

$\begin{cases} 1, & n \text{ 为偶数,} \\ -1, & n \text{ 为奇数,} \end{cases}$  这样就排除了选项(A);若取  $f(x) = \arctan x, x_n = n$ , 则能排除掉选项(C)和

(D).

本题的难度值为 0.456; 区分度为 0.118.

(5) 设  $A$  为  $n$  阶非零矩阵,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵, 若  $A^3 = O$ , 则

- (A)  $E - A$  不可逆,  $E + A$  不可逆. (B)  $E - A$  不可逆,  $E + A$  可逆.  
 (C)  $E - A$  可逆,  $E + A$  可逆. (D)  $E - A$  可逆,  $E + A$  不可逆.

【答】 应选(C).

【分析】 判断一个  $n$  阶矩阵是否可逆, 通常可用两种方法: 一是根据定义, 一是计算该矩阵的行列式是否为零. 在本题中第二种方法显然不适用, 因为  $E \pm A$  的行列式都算不出来. 故根据定义去找矩阵  $B$ , 使  $AB$  (或  $BA$ ) =  $E$  即可.

【解】 因为  $A^3 = O$ , 故

$$E = E \pm A^3 = (E \pm A)(E \mp A + A^2),$$

即分别存在矩阵  $E - A + A^2$  和  $E + A + A^2$  使

$$(E + A)(E - A + A^2) = E,$$

和

$$(E - A)(E + A + A^2) = E.$$

可知  $E - A$  与  $E + A$  都是可逆的, 所以应选(C).

本题的难度值为 0.653; 区分度为 0.433.

(6) 设  $A$  为 3 阶实对称矩阵, 如果二次曲面方程

$$(x, y, z)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

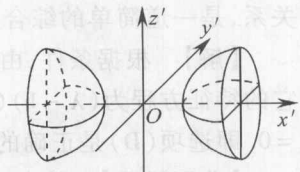


图 2-5

在正交变换下的标准方程的图形如图 2-5 所示, 则  $A$  的正特征值的个数为

- (A) 0. (B) 1.  
 (C) 2. (D) 3.

【答】 应选(B).

【分析】 本题将线性代数与解析几何的内容有机地结合在一起. 欲解此题, 首先要弄清楚所给图形是什么曲面及其标准方程: 双叶双曲面, 其标准方程是

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

(见同济大学《高等数学》(上册), 第五版, 2002 年, p. 317).

其次, 在题设条件下, 矩阵  $A$  的正特征值的个数就是标准方程中正项的项数, 即选项(B)是正确的.

【典型错误】 选(C)的几乎占一半. 究其原因, 考生对题目所给曲面的标准方程记错了; 还有一种可能是, 把标准方程的另一种形式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

弄混了: 只记住等式的左边而忽略了右边的不同. 这应引以为教训: 要全面、准确理解一个结论.

本题的难度值为 0.436; 区分度为 0.266.

(7) 设随机变量  $X, Y$  独立同分布, 且  $X$  的分布函数为  $F(x)$ , 则  $Z = \max\{X, Y\}$  的分布函数为

(A)  $F^2(x)$ .

(B)  $F(x)F(y)$ .

(C)  $1 - [1 - F(x)]^2$ .

(D)  $[1 - F(x)][1 - F(y)]$ .

【答】 应选(A).

【分析】 本题考查两个随机变量函数的分布函数,而  $Z = \max\{X, Y\}$  是常见的两个随机变量函数,它的分布函数有现成的公式.也可根据分布函数的定义直接计算.

【解】 由  $X, Y$  同分布知,  $Y$  的分布函数也为  $F(x)$ .

记  $Z$  的分布函数为  $F_Z(x)$ , 则

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P\{\max\{X, Y\} \leq x\} = P\{X \leq x, Y \leq x\} \\ &= P\{X \leq x\}P\{Y \leq x\} \quad (X \text{ 与 } Y \text{ 独立}) \\ &= F^2(x), \end{aligned}$$

故应选(A).

【典型错误】 ① 错选(B). 事实上,  $F(x)F(y)$  为  $(X, Y)$  的分布函数,

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\} = F(x)F(y).$$

考生应该注意到  $Z$  的分布函数是一元函数,而非二元函数,故不能选(B)、(D).

② 错选(C). 由于

$$\begin{aligned} P\{\min\{X, Y\} \leq x\} &= 1 - P\{\min\{X, Y\} > x\} \\ &= 1 - P\{X > x, Y > x\} = 1 - P\{X > x\}P\{Y > x\} \\ &= 1 - [1 - P\{X \leq x\}][1 - P\{Y \leq x\}] \\ &= 1 - [1 - F(x)]^2, \end{aligned}$$

所以  $1 - [1 - F(x)]^2$  实际上是  $\min\{X, Y\}$  的分布函数.

本题的难度值为 0.290, 选(B)的比选(A)的考生还多. 所以考生一定要把基础打扎实. 本题的区分度为 0.433.

(8) 设随机变量  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim N(1, 4)$ , 且相关系数  $\rho_{XY} = 1$ , 则

(A)  $P\{Y = -2X - 1\} = 1$ .

(B)  $P\{Y = 2X - 1\} = 1$ .

(C)  $P\{Y = -2X + 1\} = 1$ .

(D)  $P\{Y = 2X + 1\} = 1$ .

【答】 应选(D).

【分析】 本题考查相关系数的性质:  $|\rho_{XY}| = 1$  的充要条件是存在常数  $a$  和  $b$ , 使得  $P\{Y = aX + b\} = 1$ , 以及正态分布的数字特征性质.

【解】 由  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim N(1, 4)$  知  $EX = 0, DX = 1, EY = 1, DY = 4$ .

由于  $\rho_{XY} = 1$ , 所以存在常数  $a, b$ , 使得

$P\{Y = aX + b\} = 1$ , 从而  $EY = aEX + b$ , 得  $b = 1$ . 而

$$1 = \rho_{XY} = \frac{E(XY) - EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{E(X(aX + b)) - 0 \times 1}{\sqrt{1}\sqrt{4}} = \frac{a}{2},$$

得  $a = 2$ , 故应选(D).

【典型错误】 考生不知由  $\rho_{XY} = 1$  得到  $a = 2$ , 而由  $D(Y) = a^2D(X)$ , 即  $a^2 = 4$ , 无法排除  $a = -2$ , 故错选(C). 部分考生不知如何利用  $\rho_{XY} = 1$ , 只是由  $Y$  与  $X$  的关系以及它们的数学期望、方差性质来判别.

本题的难度值为 0.623; 区分度为 0.462.

## 2. 填空题

(9) 微分方程  $xy' + y = 0$  满足条件  $y(1) = 1$  的解是  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答】 应填  $\frac{1}{x}$ .

【分析】 本题考查变量可分离方程初值问题的求解, 是一道简单计算题.

【解】 根据初值条件  $y(1) = 1$ , 只考虑  $xy' + y = 0$  在  $(0, +\infty)$  上的非负解便可. 将  $xy' + y = 0$  分离变量得  $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ , 两边积分, 得  $\ln|y| = \ln \frac{C}{|x|}$ , 从而  $y = \frac{C}{x}$ . 将  $y(1) = 1$  代入得  $C = 1$ , 即所求解为  $y = \frac{1}{x}$ .

【典型错误】 部分考生的答案是  $y = \frac{1}{|x|}$  或  $y = \pm \frac{1}{x}$ , 这反映了他们对基本知识的掌握并不熟练, 只是形式地记住了几个公式.

本题的难度值为 0.748; 区分度为 0.544.

(10) 曲线  $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$  在点  $(0, 1)$  处的切线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

【答】 应填  $y = x + 1$ .

【分析】 本题考查隐函数的求导法、导数的几何意义、及切线方程, 是一道简单综合题.

【解】 在  $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$  两端关于  $x$  求导, 将  $y$  看成  $x$  的函数, 得

$$(y + xy') \cos(xy) + \frac{y' - 1}{y - x} = 1.$$

将  $x = 0, y = 1$  代入, 得  $y'(0) = 1$ , 故所求的切线方程为  $y - 1 = x$ , 即  $y = x + 1$ .

【典型错误】 填  $y = -x + 1$  是最常见的一个错误, 占到了所有错误答案的 80% 左右;  $y = \frac{1}{2}x + 1$  也是一个比较常见的错误结果. 这都是因为计算出错. 部分考生将切线方程写成了  $x + 1$ , 说明这部分考生的基本功不够扎实.

本题的难度值为 0.602, 区分度为 0.442.

(11) 已知幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$  在  $x=0$  处收敛, 在  $x=-4$  处发散, 则幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$  的收敛域为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

【答】 应填  $(1, 5]$ .

【分析】 本题考查幂级数收敛域的概念和性质——平移不改变幂级数的收敛性. 是一道概念题.

【解】 由于  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$  是在  $x_0 = -2$  处的幂级数, 且在  $x=0$  处收敛, 在  $x=-4$  处发散, 所以其收敛半径  $r=2$ , 收敛域为  $(-4, 0]$ , 即  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$  只在  $-2 < x+2 \leq 2$  收敛. 从而幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$  也只在  $-2 < x-3 \leq 2$  收敛, 所以  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$  的收敛域为  $(1, 5]$ .

【典型错误】  $(1, 5), [1, 5), (-9, -5]$  是答卷中比较有代表性的几个错误结果. 尤其是  $(-9, -5]$  更为常见, 很明显这是将  $(-4, 0]$  移反了方向后得到的结果. 有少数考生甚至填  $[5,$



1), 实在太粗心了.

本题的难度值为 0.523; 区分度为 0.517.

(12) 设曲面  $\Sigma$  是  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  的上侧, 则  $\iint_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dxdy = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答】 应填  $4\pi$ .

【分析】 本题考查高斯公式、三重积分的性质和二重积分的性质与计算, 是一道具有中等难度的综合题.

【解】 取  $D$  为  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ z = 0 \end{cases}$  的下侧, 由  $\Sigma$  与  $D$  围成的半球体记为  $\Omega$ . 根据高斯公式, 得

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dxdy \\ &= \oiint_{\Sigma+D} xydydz + xdzdx + x^2dxdy - \iint_D xydydz + xdzdx + x^2dxdy \\ &= \iiint_{\Omega} ydxdydz + \iint_{x^2+y^2 \leq 4} x^2dxdy. \end{aligned}$$

由对称性得

$$\iiint_{\Omega} ydxdydz = 0,$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4} x^2dxdy = \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (x^2 + y^2) dxdy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 \rho d\rho = 4\pi,$$

或

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4} x^2dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 \cos^2 \theta dr = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \int_0^2 r^3 dr = 4\pi$$

所以  $I = 4\pi$ .

【典型错误】 填  $-4\pi$  是最常见的错误结果. 这说明第二型曲面积分的方向性对考生仍然是一个难点.

本题的难度值为 0.324; 区分度为 0.531.

(13) 设  $A$  为 2 阶矩阵,  $\alpha_1, \alpha_2$  为线性无关的 2 维列向量,  $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ , 则  $A$  的非零特征值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

【答】 应填 1.

【分析】 由  $A\alpha_1 = 0$  知  $A$  的一个特征值为 0, 求出另一个特征值即可. 本题可用两个方法求解: 一是找出与  $A$  相似的一个矩阵, 一是求  $A$  的对应于特征值 1 的特征向量.

【解法 1】 由已知得

$$A(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

由于  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关, 故矩阵  $(\alpha_1, \alpha_2)$  可逆, 从而

$$A = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_2)^{-1}.$$

即矩阵  $A$  与  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  相似. 容易求出矩阵  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  的特征值为 0, 1. 根据相似矩阵有相同的特征值知  $A$  的非零特征值为 1.