學術著作 大專用書

數理統計學導引

洪 澄 洋 著

五南圖書出版公司 印行

大　專　用　書

數理統計學導引

洪　澄　洋　著

五南圖書出版公司　印行

數 理 統 計 學 導 引

中華民國68年12月初版

著作者 洪 澄 洋
發行人 楊 榮 川
發行所 五南圖書出版公司
局版臺業字第0598號
臺北市銅山街1—1號
電 話：3916542號
郵政劃撥：106895號

基本定價：新臺幣伍元

印刷所 明 文 印 刷 廠

序　言

本書—數理統計學導引—主要係針對工學院、管理學院及商學院等學生暨工商經營者，以最基礎的統計學理論開始到實務問題的應用，一方面配合某程度的理論解說，另方面以數理的導引而發揮應用能力等觀念撰寫而成者。

筆者教授統計學及作業研究相關課程有年，深感學生對於統計的一般理論基礎及數學原理缺乏具體的認識及理解，或苦於就教無門，而一般從事於工廠管理及市場調查實務工作者，也因時代進步對於新的經營環境，非得以新的統計實驗法及調查技術方法之運用，誠難以達成較佳的經營效益。茲為順應及解決上述諸環境及困難，本書在撰寫時特別考慮到實質有效的內容，並以深入淺出說明，刻畫出全書的涵意，故其特徵有：

(i)為求基礎內容的理解，儘量減少多變數的份量。

(ii)特別以單變數之機率分配問題作解說的重點。

(iii)複雜難解之定理及公式，其證明部份省略。

(iv)例題及習題相應例舉，以收相得益彰之效。

(v)為達成更廣泛的應用面，諸如樣本抽樣法，管理圖法，變異分析法等均納入本書的範圍。

筆者前後曾出版「統計學」（63 年3月初版），「作業研究」（65 年11 月初版）二書，多蒙諸君垂愛，現均已再版問世，而本書之完成可稱為上述二書之姊妹篇，蓋數理統計乃應用統計學，作業研究（O.R.），工業工程（I.E.），品質管制（Q.C.）甚至於計量經濟學，行銷學，心理學等學問在於不確定性的計量分析，調查實驗之決策方法中，可作為分析解析之必備工具。筆者亦冀望本書的出版在此管理科學的領域中，對學者及經營管理者有所裨益。

本書在撰寫過程曾參考多種書籍，茲為達成說明的目的或有直接引用者，其中較重要者如卷末「參考文獻」之書目，筆者在此對於各著作特表感謝之意。又問題之計算或有忽疏或誤謬之處，尚希諸先賢斧正，並於再版時更正之。

最後；本書撰寫期間適逢母喪，今適　先慈八秩晉

一誕辰（農曆六月廿二日），特予本日出版，以告慰

先慈在天之靈。

洪澄洋

1979年7月15日　台北

目　　　錄

第1章　統計的基礎

§1.1　統計資料 ······ 1
§1.2　統計計算 ······ 2

第2章　理論的機率分配(I)—連續型機率分配—

§2.1　常態分配(*Normal Distribution*) ······ 15
§2.2　分配函數 ······ 31
§2.3　對數常態分配 ······ 33

第3章　理論的機率分配(II)—離散型機率分配—

§3.1　二項分配 ······ 37
§3.2　多項分配 ······ 47
§3.3　超幾何分配 ······ 53
§3.4　卜阿松分配(*Poisson Distribution*) ······ 62
§3.5　*Stirling* 公式 ······ 70
§3.6　一致分配(*Uniform distribution*) ······ 73

第4章　理論的機率分配(III)—其他分配—

§4.1　指數分配……………………………………………… 81
§4.2　幾何分配……………………………………………… 84
§4.3　*Gamma* 分配………………………………………… 87
§4.4　*Beta* 分配……………………………………………… 90
§4.5　*Weibull* 分配………………………………………… 94
§4.6　*Erlang* 分配…………………………………………… 97
§4.7　負二項分配…………………………………………… 99
§4.8　*Pascal* 分配…………………………………………… 100
§4.9　*Laplace* 分配………………………………………… 101
§4.10　單位分配……………………………………………… 101
§4.11　*Cauchy* 分配………………………………………… 102

第5章　動差母函數與特性函數

§5.1　動差母函數…………………………………………… 105
§5.2　單變數函數之動差母函數…………………………… 116
§5.3　多變數動差母函數…………………………………… 124
§5.4　特性函數……………………………………………… 130

第6章　樣本分配(Ⅰ)

§6.1　和、差的分配………………………………………… 139
§6.2　同一母體抽取樣本之和的分配……………………… 140
§6.3　平均值的分配………………………………………… 141
§6.4　樣本平均值之差的分配……………………………… 153
§6.5　樣本比率之差的分配………………………………… 154
§6.6　樣本分配之二項分配及 *Poisson* 分配……………… 155

§6.7 期待值E及變異數V之代數計算法…………………… 158

第7章 樣本分配(Ⅱ)

§7.1 χ^2 分配………………………………………………… 163
§7.2 t 分配…………………………………………………… 177
§7.3 F分配…………………………………………………… 184
§7.4 最大值分配……………………………………………… 195
§7.5 最小值分配……………………………………………… 200
§7.6 全距差的分配…………………………………………… 201
§7.7 樣本標準偏差的分配…………………………………… 204
§7.8 平方和之分配…………………………………………… 207
§7.9 中位數的分配…………………………………………… 208
§7.10 *Cochran* 定理………………………………………… 210
§7.11 允許界限………………………………………………… 214

第8章 統計的估計

§8.1 點的估計………………………………………………… 217
§8.2 最適估計法……………………………………………… 230
§8.3 平均值~~區間~~估計…………………………………… 256
§8.4 百分率(*proportion*)區間估計……………………… 278
§8.5 變異數區間估計………………………………………… 292
§8.6 指數分配、卜阿松分配、一致分配等區間估計…… 300

第9章 統計的假設檢定

§9.1 假設檢定………………………………………………… 319

§9.2 有關常態母體之母平均檢定…………………………329
§9.3 有關2組常態母體平均值之差的檢定………………342
§9.4 有關2項母體百分率之檢定…………………………361
§9.5 有關2組2項母體百分比之差之檢定………………366
§9.6 關於常態母體之母變異數之檢定……………………370
§9.7 關於2組常態母體之等變異數之檢定………………375
§9.8 適合度之檢定（χ^2檢定）…………………………381
§9.9 分類表之獨立性檢定……………………………………389
§9.10 拒絕檢定…………………………………………………399
§9.11 指數分配之平均值之檢定……………………………402
§9.12 *Poisson* 分配之平均值檢定…………………………406
§9.13 適度比之檢定法…………………………………………411

第10章 相關與迴歸

§10.1 相關係數…………………………………………………425
§10.2 廻歸方程式………………………………………………433
§10.3 複相關……………………………………………………439
§10.4 相關係數的估計及檢定…………………………………446
§10.5 廻歸係數之估計及檢定…………………………………452

第11章 非參數法

§11.1 *Spearman* 之順位相關係數…………………………463
§11.2 *Kendall* 之順位相關係數……………………………466
§11.3 *Tchebycheff's* 不等式…………………………………473
§11.4 大數法則…………………………………………………477

§11.5 中心極限定理 …… 478

第12章 樣本抽樣法

§12.1 簡單隨機抽樣法 …… 481
§12.2 分層抽樣法 …… 489
§12.3 族羣抽樣法 …… 501
§12.4 2階段抽樣法 …… 505

第13章 管制圖法

§13.1 統計之品質管制意義及原理 …… 511
§13.2 $\bar{x}$之管制圖（引用σ或s之情況）…… 516
§13.3 $\bar{x}$之管制圖（引用R之情況）…… 520
§13.4 標準偏差S，全距差R之管制圖 …… 522
§13.5 不良率P，不良個數nP之管制圖 …… 525
§13.6 管制圖法之檢討 …… 529

第14章 抽樣檢查

§14.1 抽樣檢查的意義 …… 533
§14.2 作業特性曲綫（*O.C.* 曲綫）…… 534
§14.3 平均檢查個數 …… 545
§14.4 逐次抽樣檢查 …… 546

第15章 變異分析法

§15.1 1元配置法（*one-way classification*）…… 550
§15.2 2元配置法（*two-way classification*）…… 559

§15.3 三元配置法（*three-way classification*）………… 564
§15.4 拉丁方格法（*Latin square*）………………………… 569
§15.5 結構模式………………………………………………… 574

(附 表)

一、 平方及平方根表
二、 常態分配表
三、 t 分配表
四、 χ^2 分配表
五、 卜阿松分配表
六、 指數分配表
七、 2 項分配表
八、 F 分配表
九、 Z 變換表
十、 r 表
十一、 隨機數碼表（*Random Table*）
十二、 常用對數表
十三、 *Thorndike* 曲線

【例 2】　$\mu_k = E[(X-\mu)^k]$ 作 $\mu'_k = E(X^k)$ 代入式爲何？但 $\mu_1' = E(X) = \mu$

〔解〕：$(X-\mu)^k$ 之 2 項展開：

$$(X-\mu)^k = \binom{k}{0}\mu^0 X^k - \binom{k}{1}\mu\ X^{k-1} + \binom{k}{2}\mu^2 X^{k-2}$$

$$-\cdots\cdots+\binom{k}{k-1}\mu^{k-1}X^1 + (-1)^k\binom{k}{k}\mu^k X^0$$

$$= X^k - k\mu X^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}\mu^2 X^{k-2}$$

$$-\cdots\cdots + k\mu^{k-1}X + (-1)^k\mu^k$$

$$\therefore \mu_k = E(X^k) - k\mu E(X^{k-1}) + \frac{k(k-1)}{2}\mu^2 E(X^{k-2})$$

$$-\cdots\cdots + k\mu^{k-1}E(X) + (-1)^k\mu^k$$

$$= \mu'_k - k\mu\mu'_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}\mu^2\mu'_{k-2}$$

$$-\cdots\cdots + k\mu^{k-1}\mu'_1 + (-1)^k\mu^k$$

$$= \mu'_k - k(\mu'_1)(\mu'_{k-1}) + \frac{k(k-1)}{2}(\mu_1')^2(\mu'_{k-2})$$

$$-\cdots\cdots + k(\mu'_1)^{k-1}(\mu'_1) + (-1)^k(\mu'_1)^k \qquad \#$$

〔註〕：此式作 k 次動差計算上頗爲簡捷。

【例 3】　試以 $\mu'_k = E(X^k)$ 表示，於 $E[(X-\mu)^k]$ 中之 $k = 2, 3, 4$ 時，之原點爲中心之動差。

〔解〕：

$$E[(X-\mu)^2] = E[X^2 - 2\mu X + \mu^2]$$

$$= E(X^2) - \mu^2$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \mu'_2 - (\mu'_1)^2$$

第 1 章

統計的基礎

§1-1　統計資料

由**母體**(population)中抽出其中一部份**樣本**(sample)作觀測、實驗，藉以分析其結論判斷母體的特性，爲當今管理科學領域中不可或缺之決策工具之一。構成母體或樣本之單位或成份之要素(element)，其母數、樣本數多寡，或**抽樣**(sampling)方法之數理依據，均爲統計分析對象。故於統計資料中，無論**計量值**(variable)或**計數值**(attribute)之分類，均應以函數之**隨機機率變數**(random variable)來表達統計之**次數分配**(frequency distribution)。

母體之特性值稱之**參數**(parameter)分別有母平均、母變異數等，而樣本之集團特性值稱之**統計量**(statistic)分別有樣本平均、樣本變異數等。故統計量爲樣本變數之函數。吾人主要乃在於探討瞭解母體與樣本的關係。

§1-2 統計計算

平均及變異數（ mean and variance ）

數據量或資料（ date ）之集中趨勢值或離中趨勢值之計算，通常以**算術平均**（ arithmetic mean ）之定義而計算者頗爲廣泛被運用。

於 n 個 X 觀測值（ x_1 , x_2 , …… , x_n ）中，其平均爲：

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad (1.2.1)$$

其變異數爲：

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \qquad (1.2.2)$$

或 $$s^2=\frac{1}{n}\sum_i x_i^2-\bar{x}^2$$

變異數之正平方根稱爲**標準偏差** s （ standard deviation ），且以各變數對平均值差平方之代數和稱爲**偏差平方和**（ sum of square 簡稱 S ）。

$$S=\sum(x_i-\bar{x})^2 \qquad (1.2.4)$$

不偏變異數（ unbiase variance ）

因樣本變異數 s^2 不宜作母變異數 σ^2 之估計值，即 $\sigma^2\neq E(s^2)$ 惟由樣本之**不偏變異數 V 或** $\hat{\sigma}^2$ ，則可作母變異數 σ^2 之估值，即 $\sigma^2=E(V)$。故 V 在抽樣理論中居於相當重要的地位。至於不偏變異數經定義爲：

$$V=\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\phi}$$

$$=\frac{1}{\phi}\left[\sum x_i^2-\frac{(\sum x_i)^2}{n}\right] \qquad (1.2.5)$$

而 $\phi=n-1$ 稱之爲自由度(degree of freedom)。

配合次數分配之平均及變異數

於連續性變量 X 中，其觀測值介之某區間，如分割數段小區間稱爲組距(class)，則各組距所對應出現之**次數**(frequency)所作成表謂**次數分配表**，即 $F_i=f_1+f_2+\cdots\cdots+f_i$。則平均及變異數分別爲：

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i$$

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2-\bar{x}^2 \qquad (1.2.6)$$

復置 X 與 U 二變量間之關係爲 $X=x_0+cU$，即 $x_i=x_0+cu_i$ ($i=1, 2, \cdots\cdots, n$)時，則 X 與 U 之平均值及變異數分別爲：

$$\bar{x}=c\bar{u}+x_0 \qquad \text{但 } \bar{u}=\frac{1}{n}\sum f_i u_i \qquad (1.2.7)$$

$$s^2(x)=c^2\cdot s^2(u)=c^2\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i u_i^2-\bar{u}^2\right] \qquad (1.2.8)$$

【例 1 】　試以次表 1.2.1 資料求算 256 人購買汽油之平均值及變異數。

表 1.2.1 汽油購買量之次數分配表 單位：公升

油　　量	組距值 (x_i)	次數 (f_i)	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$	u_i	$f_i u_i$	$f_i u_i^2$	$f_i u_i^3$	$f_i u_i^4$
0.0～ 2.0	1.0	9	9	9	−3	−27	81	−243	729
2.0～ 4.0	3.0	22	66	198	−2	−44	88	−176	352
4.0～ 6.0	5.0	57	285	1425	−1	−57	57	−57	57
6.0～ 8.0	7.0	64	448	3136	0	0	0	0	0
8.0～10.0	9.0	46	414	3726	1	46	46	46	46
10.0～12.0	11.0	33	363	3993	2	66	132	264	528
12.0～14.0	13.0	18	234	3042	3	54	162	486	1458
14.0～16.0	15.0	7	105	1575	4	28	112	448	1792
合　　計	/	n = 256	1,924	17,104	/	66	678	768	4,962

〔計算〕：

$$\bar{x} = \frac{1}{256} \times 1,924 = 7.5156$$

$$s^2 = \frac{1}{256} \times 17,104 - (7.5156)^2 = 10.3283$$

$$\bar{x} = c\,\bar{u} + x_0 = 2 \times 0.2578 + 7 = 7.5156$$

$$s^2 = c^2 \left[\frac{1}{n} \sum f_i u_i^2 - \bar{u}^2 \right]$$

$$= 2^2 \left[\frac{1}{256} \times 678 - (0.2578)^2 \right] = 10.3280 \quad \#$$

動差（moment）

X 變量特性質一元化之計算可以 k 次之動差作計算手段。

(1)以原點為中心之 k 次動差（ k order moment about the