中等职业教育国家规划教材

全国中等职业教育教材审定委员会审定

CELIANGPI

测量平差

测量工程技术专业

主编 颜 平

中国建筑工业出版社

测量平差

中　等　职　业　教　育　国　家　规　划　教　材
全国中等职业教育教材审定委员会审定

测　量　平　差

（测量工程技术专业）

主　　编　颜　平
责任主审　田青文
审　　稿　张　勤　李家权

中国建筑工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

测量平差/颜平主编.—北京：中国建筑工业出版社，2003
中等职业教育国家规划教材．测量工程技术专业
ISBN 7-112-05424-9

Ⅰ.测...　Ⅱ.颜...　Ⅲ.测量平差-专业学校-教材　Ⅳ.P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 041152 号

本书是教育部规划的中等职业学校测量工程技术专业系列教材之一。全书共六章，包括：误差理论与测量平差的准则，条件平差，间接平差，测角网、测边网和边角网的平差，导线网平差，误差椭圆等。

本书可供中等职业学校测量工程技术专业的学生使用，也可供相关技术人员参考。

中等职业教育国家规划教材
全国中等职业教育教材审定委员会审定

测　量　平　差

（测量工程技术专业）

主　　编　颜　　平
责任主审　田青文
审　　稿　张　勤　李家权

*

中国建筑工业出版社出版（北京西郊百万庄）
新华书店总店科技发行所发行
北京云浩印刷有限责任公司印刷

*

开本：787×1092毫米　1/16　印张：11　字数：265千字
2003年6月第一版　2005年1月第二次印刷
印数：2001—4000册　定价：**14.00**元

ISBN 7-112-05424-9
TU·4748（11038）

本社网址：http://www.china-abp.com.cn
网上书店：http://www.china-building.com.cn

中等职业教育国家规划教材出版说明

为了贯彻《中共中央国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》精神，落实《面向21世纪教育振兴行动计划》中提出的职业教育课程改革和教材建设规划，根据教育部关于《中等职业教育国家规划教材申报、立项及管理意见》（教职成［2001］1号）的精神，我们组织力量对实现中等职业教育培养目标和保证基本教学规格起保障作用的德育课程、文化基础课程、专业技术基础课程和80个重点建设专业主干课程的教材进行了规划和编写，从2001年秋季开学起，国家规划教材将陆续提供给各类中等职业学校选用。

国家规划教材是根据教育部最新颁布的德育课程、文化基础课程、专业技术基础课程和80个重点建设专业主干课程的教学大纲（课程教学基本要求）编写，并经全国中等职业教育教材审定委员会审定。新教材全面贯彻素质教育思想，从社会发展对高素质劳动者和中初级专门人才需要的实际出发，注重对学生的创新精神和实践能力的培养。新教材在理论体系、组织结构和阐述方法等方面均作了一些新的尝试。新教材实行一纲多本，努力为教材选用提供比较和选择，满足不同学制、不同专业和不同办学条件的教学需要。

希望各地、各部门积极推广和选用国家规划教材，并在使用过程中，注意总结经验，及时提出修改意见和建议，使之不断完善和提高。

教育部职业教育与成人教育司

2002年10月

前　　言

本书是教育部规划的中等职业学校测量工程技术专业系列教材之一，是根据教育部新颁教学大纲编写的。

全书共六章，分为三大部分：第一部分（第一章）介绍了衡量精度的指标、两个传播律和测量平差应遵循的准则；第二部分（第二章、第三章）系统阐述了条件平差、间接平差等经典的平差理论和方法；第三部分（第四章～第六章）讨论各种平面控制网平差计算及精度评定的基本方法。

本书编写力求深入浅出、通俗易懂，尽量做到重点突出，循序渐进。在内容的编排上考虑了教学中各门课程的相互配合与衔接，融入当前测量平差的新理论，注意中等专业学校职业教育学校教材的特点，着重基本概念的讲解和基本方法的传授。为保持理论联系实际、强调基本技能等特点，本书提供了丰富的实例，每章后附有思考题及习题，并在教材的最后给出习题的参考答案，以增加思考性和教材的完整性。

全书共分六章，编写分工如下：第一章、第二章、第四章由颜平老师编写；第三章由庄宝杰老师编写；第五章、第六章由潘国锋老师编写。本书由颜平老师任主编，由长安大学的田青文老师负责主审，由张勤、李家权两位老师审稿。

在编写过程中，较广泛地参考了兄弟院校的教材和有关单位的文献、资料，在此表示衷心感谢。尽管我们尽了很大的努力，由于编者业务水平有限，书中难免有错漏，恳请读者批评指正。

编者

目　录

第一章　误差理论与测量平差的准则……………………………………………… 1
第一节　偶然误差的特性……………………………………………………… 1
第二节　衡量精度的指标……………………………………………………… 4
第三节　协方差与协方差传播律……………………………………………… 8
第四节　协因数与协因数传播律 …………………………………………… 15
第五节　广义传播律在测量中的应用 ……………………………………… 18
第六节　测量平差的任务与准则 …………………………………………… 23
第二章　条件平差 ……………………………………………………………… 28
第一节　条件平差原理 ……………………………………………………… 28
第二节　条件方程 …………………………………………………………… 33
第三节　法方程的组成 ……………………………………………………… 36
第四节　法方程的解算 ……………………………………………………… 41
第五节　条件平差的精度评定 ……………………………………………… 52
第六节　水准网条件平差示例 ……………………………………………… 62
第三章　间接平差 ……………………………………………………………… 66
第一节　间接平差原理 ……………………………………………………… 66
第二节　误差方程 …………………………………………………………… 70
第三节　法方程的组成与解算 ……………………………………………… 74
第四节　单位权中误差的计算 ……………………………………………… 77
第五节　未知数函数的中误差 ……………………………………………… 78
第六节　未知数的中误差与权系数 ………………………………………… 82
第七节　水准网间接平差示例 ……………………………………………… 86
第四章　测角网、测边网和边角网的平差 …………………………………… 90
第一节　概述 ………………………………………………………………… 90
第二节　测角网条件平差 …………………………………………………… 91
第三节　测边网条件平差…………………………………………………… 105
第四节　边角网条件平差…………………………………………………… 110
第五节　测角网间接平差…………………………………………………… 113
第六节　测边网和边角网间接平差………………………………………… 125
第五章　导线网平差…………………………………………………………… 135
第一节　概述………………………………………………………………… 135
第二节　单一附合导线按条件平差………………………………………… 136
第三节　导线网按条件平差………………………………………………… 145

第四节　导线网按间接平差 …… 147
第六章　误差椭圆 …… 150
第一节　概述 …… 150
第二节　点位误差 …… 151
第三节　误差曲线与误差椭圆 …… 155
第四节　相对误差椭圆 …… 160
习题参考答案 …… 165

第一章　误差理论与测量平差的准则

大量观测数据的处理与测量误差的分析，是测量工作重要的理论问题和实践环节。《测量平差》就是用误差理论、最小二乘原理对外业观测的数据作数学分析处理，并评定其精度的一门学科。本章将叙述偶然误差的特性、衡量精度的指标、测量平差的准则，并着重阐明误差理论中的基本问题——广义传播律。

第一节　偶然误差的特性

一、观测条件与观测误差

测量实践表明，在一定的观测条件下，测量所得数据中必然包含有误差。尽管随着科学技术的不断发展，人们能够把误差控制得愈来愈小，但却不能消除它们。产生误差的原因很多，概括起来有三个方面：测量仪器、观测者和外界条件。在测量界，人们习惯把引起测量误差的三个主要因素综合起来统称为观测条件。很显然，观测条件好，观测成果的质量就好；反之，观测成果的质量就差。

根据观测误差对观测结果的影响性质，可将观测误差分为系统误差和偶然误差两种。

系统误差：在相同的观测条件下获得的观测列中，如果误差在数值、符号上保持不变，或按一定的规律变化，那么，这种误差就称为系统误差。系统误差具有一定的累积性，它对成果的质量影响显著。因此，在测量工作中，常在观测方法和观测程序上采取必要的措施，以限制或削弱系统误差的影响。此外，也可以采用计算的方法加以改正。

偶然误差：在相同的观测条件下作一系列的观测，如果观测误差在大小和符号上均呈现出偶然性，即从表面现象看，该列误差的大小和符号没有规律性，但就大量误差的总体而言，却具有一定的统计规律，这种误差称为偶然误差。产生偶然误差的原因较多而且往往是不固定和难以控制的。因此，偶然误差的数值会忽大忽小，其符号或正或负。就个别偶然误差而言，无论是数值的大小或符号的正负都不能预先知道。所以，观测结果不可避免地包含着偶然误差，并且不可能被消除，只好选择好的观测条件来削弱它。

在测量工作的整个过程中，除了上述两种性质的误差以外，还可能发生错误。例如，照错了目标，读错或记错数据等。一般来说，错误不能算做观测误差。

本教材研究的主要对象是带偶然误差的观测值，即总是假定：错误的观测值已经纠正，含系统误差的观测值已经过适当的改正。因此，在观测值中，仅含有偶然误差或偶然误差占主导地位。

二、偶然误差的特性

任何一个观测量，客观上总存在着一个能代表其真正大小的数值，这个数值就称为该观测量的真值。设进行了 n 次观测，其观测值为 L_1、$L_2\cdots\cdots L_n$，现以 $\tilde{L}_1$、$\tilde{L}_2\cdots\cdots\tilde{L}_n$ 表示观测量的真值。由于观测中存在着误差，因此，真值与观测值之间一定存在着差数，设

为:

$$\Delta_i = \tilde{L}_i - L_i \qquad (i = 1、2、\cdots\cdots n) \tag{1-1}$$

式中 Δ_i 称为真误差，简称误差。

测量平差研究的对象是一系列含有偶然误差的观测值，因此，Δ_i 仅指偶然误差。为了揭示偶然误差的规律性，前人曾在相同的观测条件下，独立地观测了 182 个三角形的全部内角。由于观测值中含有观测误差，因此，每个三角形的三内角之和 $(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)_i$，一般不会等于它的真值 180°。由式（1-1）可求出 182 个三角形内角和的真误差为:

$$\Delta_i = 180° - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)_i \qquad (i = 1、2、\cdots\cdots 182)$$

现将全部误差按其正负分成两组，并将每组中的真误差按从小到大排列，以误差区间 $d\Delta = 0.2''$ 统计出误差落入到各个区间内的个数 μ_i，计算出误差出现在各个区间的频率 f_i，其计算公式为:

$$f_i = \frac{\mu_i}{n} \tag{1-2}$$

式中 n 为误差的总个数。现将统计结果列于表 1-1 中。

表 1-1

误差区间 $d\Delta$	Δ 为负值		Δ 为正值	
	个数 μ	频率 μ/n	个数 μ	频率 μ/n
0″~0.2″	22	0.121	22	0.121
0.2″~0.4″	20	0.110	20	0.110
0.4″~0.6″	16	0.088	14	0.077
0.6″~0.8″	11	0.060	12	0.066
0.8″~1.0″	10	0.055	9	0.049
1.0″~1.2″	6	0.033	7	0.038
1.2″~1.4″	2	0.011	4	0.022
1.4″~1.6″	2	0.011	3	0.016
1.6″~1.8″	1	0.006	1	0.006
1.8″以上	0	0	0	0
总　和	90	0.495	92	0.505

为了形象地表示偶然误差的统计规律，还可以利用直方图来表示误差分布的情况。设以误差 Δ 的数值为横坐标，以 $\frac{\mu_i/n}{d\Delta}$ 为纵坐标，则根据表 1-1 中的数据可绘出直方图如图 1-1 所示。显然，根据直方图上的长方形的高矮及图形的对称性等特点，可直观地看出偶然误差的统计规律。

由于误差的取值是连续的，故当误差的个数 n 无限增多，并将误差区间无限缩小时，则可以想象，图 1-1 中各小长方条顶边的折线就变成一条如图 1-2 所示的光滑曲线。该曲线称为误差分布的概率密度曲线，简称误差曲线。误差曲线上任一点的纵坐标 y 均为横坐标 Δ 的函数，即:

$$y = f(\Delta) \tag{1-3}$$

式中 $f(\Delta)$ 通常称为 Δ 的密度函数。根据科学家高斯的推证，偶然误差 Δ 是服从均值为零的正态分布的随机变量，其密度函数的具体形式为:

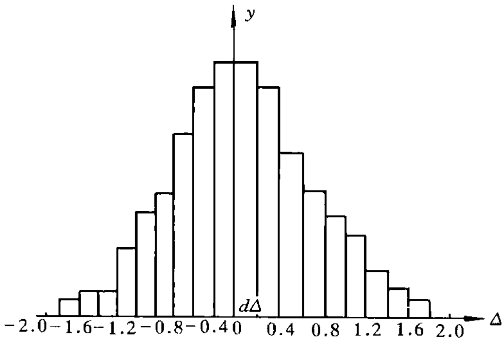

图 1-1

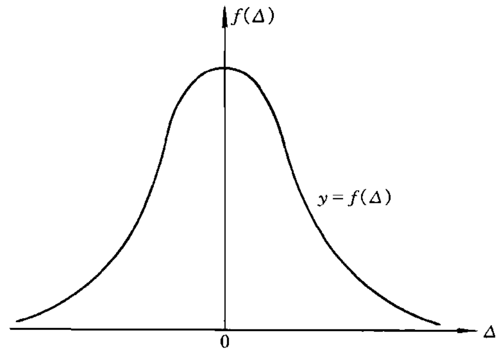

图 1-2

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-4}$$

式中　σ 为均方差。

上面通过列表、绘直方图和密度函数这三种方法，详细地分析了偶然误差出现的规律。大量的实践告诉我们，在其他测量结果中，偶然误差也都显示出上述同样的规律。因此，上述闭合差的分布规律，实际上就是偶然误差所具有的统计规律性。因此，人们将偶然误差的特性阐述如下：

（1）在一定的观测条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定的限值；或者说，偶然误差的绝对值出现在某一限值内的概率为 1；

（2）绝对值较小的偶然误差比绝对值较大的偶然误差出现的可能性大；

（3）绝对值相等的正、负偶然误差出现的可能性相等；

（4）由偶然误差的对称性和抵消性可以看出，偶然误差的理论平均值应为零；

即：

$$\lim_{n \to \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0 \tag{1-5}$$

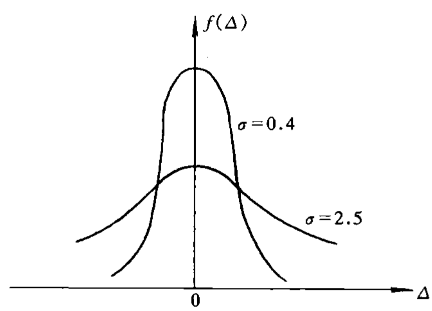

图 1-3

对于一系列的观测而言，不论其观测条件如何，也不论是对同一个量还是对不同的量进行观测，只要这些观测是在相同的条件下独立进行的，则所产生的一组偶然误差必然都具有上述的四个特性。

下面再对误差曲线作进一步的讨论：

（1）由图 1-2 可知，密度函数 $f(\Delta)$ 的图像误差曲线，全部位于横轴的上方。$f(\Delta)$是偶函数，其图像以纵轴为对称轴，它向左右对称地无穷伸延，并以横轴作为渐近线。当 $\Delta=0$ 时，曲线处于最高点，当 Δ 向左右远离纵轴时，曲线逐渐降低，整条曲线呈中间高两边低的钟形。曲线与 X 轴之间所夹的面积代表概率，全部面积总是等于 1。

（2）随着式（1-4）中的 σ 取值不同，曲线的形状也不相同。图 1-3 中分别给出了 σ 为 2.5、σ 为 0.4 的两条曲线：σ 越大，曲线越“矮胖”；σ 越小，曲线越“高瘦”，即参数

σ 决定了曲线的形状。

(3) 对 $f(\Delta)$ 取一阶导数，并令其为零，可知，函数在 $\Delta=0$ 处取得最大值，$f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$；对 $f(\Delta)$ 取二阶导数，并令其为零，则可得 $\Delta=\pm\sigma$，说明 σ 为误差曲线拐点的横坐标。

第二节　衡量精度的指标

测量平差的基本任务之一是衡量测量成果的精度。因此，正确地理解精度的含义并准确地评定观测结果的精度，是非常重要的。

一、精度的含义

设在两种不同的观测条件下进行了两组观测，分别用这两组观测值的真误差作直方图，并画出对应的误差曲线（如图 1-3 所示）。可见，在一定的观测条件下进行一组观测，它总是对应着一种确定不变的误差分布。若观测条件好，小误差出现的个数多，该组观测误差所对应的误差曲线就比较陡峭，表示这组观测质量较好，精度较高。反之，若观测条件较差，观测值的波动大，大误差出现了不少，该组观测误差所对应的误差曲线就比较平坦，表示这组观测质量较差，精度较低。由此可见，所谓精度就是指误差分布的密集或离散的程度。

精度总是对一组观测而言的。在相同的观测条件下进行的一组观测，由于它们对应着同一种误差分布，因此，这一组中的每一个观测值，都是同精度的观测值。例如，在表 1-1 所列的 182 个三角形的真误差中，尽管真误差有大有小，有的为 1.5″，有的为 0.1″，但由于它们所对应的误差分布相同，故这些观测值彼此是同精度的。

二、衡量精度的指标

为了衡量观测值精度的高低，可用误差分布表、直方图或误差曲线来表达一组观测值精度的高低。但这样做很不方便，有时甚至很困难。人们希望对精度有一个数字概念，能用它来反映误差分布的密集或离散的程度，并用该数字来作为衡量精度的指标。

衡量精度的指标有很多种，常用的有以下几种。

（一）方差与中误差

设在一定的观测条件下，得到一组独立的观测值 L_1、L_2……L_n，它们的真误差分别为 Δ_1、Δ_2……Δ_n，则称这组独立真误差 Δ_i 平方的理论平均值为这组误差（或这组观测值）的方差，记为：

$$\sigma^2=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta\Delta]}{n} \tag{1-6}$$

称方差的平方根 σ 为这组误差（或这组观测值）的均方差（或标准差），即：

$$\sigma=\pm\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{1-7}$$

因不同的 σ 将对应着不同形状的误差曲线，即 σ 愈小，曲线愈陡峭，σ 愈大，则曲线愈平缓。σ 的几何意义是：误差曲线拐点的横坐标，对于一个确定的误差分布，就有一个对应的、惟一确定的 σ 值。因此，σ 的数值可以反映出精度的高低。于是常用方差 σ^2、

均方差 σ 作为衡量精度的指标。

应当指出，上面关于方差和均方差的计算式只有在观测个数 n 足够大时才成立。实际工作中观测个数总是有限的，由有限个观测值的真误差只能求得方差和均方差的估值。方差 σ^2 的估值用符号 $\hat{\sigma}^2$ 表示，均方差 σ 的估值用符号 $\hat{\sigma}$ 表示。在测绘界习惯用 m^2 和 m 分别表示方差和均方差的估值，并称 m 为中误差，其计算公式为：

$$m = \hat{\sigma} = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{1-8}$$

（二）平均误差

在一定的观测条件下，一组独立误差绝对值的理论平均值，称为这组误差（或这组观测值）的平均误差，记为：

$$\theta = \lim_{n\to\infty}\frac{[|\Delta|]}{n} \tag{1-9}$$

可以证明，平均误差 θ 与相应的均方差 σ 之间存在以下理论关系式：

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.7979\sigma \approx \frac{4}{5}\sigma\\ \sigma &= \theta\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1.2533\theta \approx \frac{5}{4}\theta\end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

由式（1-10）可以看到：不同大小的 θ 对应着不同的 σ，也就对应着不同的误差分布曲线。因此，可以用平均误差 θ 作为衡量精度的指标。

由于实际工作中观测值的个数 n 总是个有限数，故常用有限个观测误差来计算平均误差的估值 $\hat{\theta}$，即：

$$\hat{\theta} = \pm\frac{[|\Delta|]}{n} \approx \frac{4}{5}m \tag{1-11}$$

【例 1-1】 为了检定一台经纬仪的测角精度，现对某一精确测定的水平角（$\beta = 78°42'35''$）作了 24 次观测（其观测结果列于表 1-2 中），试计算观测值的方差、中误差和平均误差。

表 1-2

观 测 值	Δ	观 测 值	Δ	观 测 值	Δ
78°42′33.7″	+1.3	78°42′33.0″	+2.0	78°42′32.5″	+2.5
36.1	-1.1	35.8	-0.8	35.7	-0.7
36.2	-1.2	34.5	+0.5	33.8	+1.2
36.0	-1.0	33.7	+1.3	36.3	-1.3
37.0	-2.0	34.4	+0.6	33.2	+1.8
34.8	+0.2	35.3	-0.3	35.5	-0.5
34.4	+0.6	37.0	-2.0	35.7	-0.7
36.2	-1.2	34.2	+0.8	34.2	+0.8

解：按式（1-1）可计算出各个观测值的真误差 Δ_i，并将它们对应填在表 1-2 中。根据表 1-2 中的数据可算得：

$$\hat{\sigma}^2 = m^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{n} = \frac{37.34}{24} = 1.56$$

$$\hat{\sigma} = m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} = \pm 1.25''$$

$$\hat{\theta} = \pm\frac{[|\Delta|]}{n} = \pm\frac{26.4}{24} = \pm 1.10''$$

均方差、平均误差都可以作为衡量精度的指标。实际工作中，由于观测值的个数是有限的，仅能计算出均方差和平均误差的估值，它们与理论值之间有一定的差异。当然，n 值愈大，这一差异将愈小，就愈能反映观测精度。由于当 n 不大时，中误差 m 比平均误差 $\hat{\theta}$ 更能反映大的真误差的影响。因此，测绘界通常都采用中误差作为衡量精度的指标。

(三) 极限误差

观测必然要产生误差，那么，多大的误差算是正常情况下出现的偶然误差？多大的误差是由于观测条件不好而造成的粗差，其相应的观测值应返工重测？这就需要规定出一个标准来判断，这个标准就是极限误差。

由概率论、误差理论及实践证明：在大量同精度观测的一组误差中，绝对值大于一倍均方差的偶然误差出现的可能性是 31.7%；大于二倍均方差的偶然误差出现的可能性是 4.5%，大于三倍均方差的偶然误差出现的可能性非常小只有 0.3%，实际上就是不可能出现的。即误差出现在 $(-\sigma, +\sigma)$，$(-2\sigma, +2\sigma)$，$(-3\sigma, +3\sigma)$ 中的概率分别为：

$$\begin{aligned} P(-\sigma < \Delta < +\sigma) &\approx 68.3\% \\ P(-2\sigma < \Delta < +2\sigma) &\approx 95.5\% \\ P(-3\sigma < \Delta < +3\sigma) &\approx 99.7\% \end{aligned} \tag{1-12}$$

因此，人们通常以三倍均方差作为偶然误差的极限误差，即：

$$\Delta_{限} = 3\sigma \tag{1-13}$$

若对观测的要求较为严格，也可规定二倍均方差为极限误差，即：

$$\Delta_{限} = 2\sigma \tag{1-14}$$

实用上以均方差的估值中误差 m 代替 σ，即以 3m 或 2m 作为极限误差。

极限误差在实际测量工作中是经常采用的。测量规范中明确规定了各类不同等级测量的极限误差值。在测量工作中，如果某误差超过极限误差，就认为该误差是粗差，其相应的观测值应舍去不用或返工重测。

(四) 相对中误差

对于某些观测结果，有时单靠中误差还不能完全表达观测结果精度的高低。例如，分别丈量了 2000m 和 20m 两段距离，观测值的中误差均为 ±2cm。虽然两者的中误差相同，但就单位长度的精度而言，两者并不相同。很显然，前者的精度比后者要高。因此，人们常采用另一种方法去衡量精度，这就是相对中误差。

所谓相对中误差，就是观测值的中误差与观测值之比。相对中误差是一个无量纲的数。为了便于比较，在测量中通常将其分子化为 1，即用 $1/N$ 表示。例如，上述两段距离，前者的相对中误差为 1/100000，而后者的相对中误差为 1/1000，显然，2000m 距离的量测精度高。

与相对误差相对应，真误差、中误差和平均误差均称为绝对误差。

三、权

为了比较各观测值之间的精度，除了可以用方差以外，还可以通过方差之间的比例关

系来衡量观测值之间的精度高低。这种表示各观测值方差之间的比例关系的数字特征，称之为权。

权就是衡量轻重的意思。在平差计算中，如果有一组观测值是等精度的，那么在平差计算时就应将它们同等对待，因此说这组观测值是等权的。而对于一组不等精度的观测值，在平差计算时就不能同等对待。容易理解，精度高的观测值在平差结果中应占较大的比重，或者说应具有较大的权。反之，精度低的观测值在平差结果中就占较小的比重，或者说应具有较小的权。因此，权起了权衡各观测量在平差结果中所占分量的作用。

在实际工作中，观测值的方差在平差计算之前往往是不知道的，而各观测值在平差计算中所占的比重，却可以根据事先给定的条件予以确定，然后根据平差的结果进而求出方差。因此，在平差计算中，权起着非常重要的作用。

设有观测值 L_i（$i=1$、$2\cdots\cdots n$），它们的方差 σ_i^2（$i=1$、$2\cdots\cdots n$），如选定任一常数 σ_0，则权定义为：

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \tag{1-15}$$

式中　p_i 为观测值 L_i 的权。

由上式可知，观测值 L_i 的权 p_i 与方差 σ_i^2 成反比。方差越小，其权越大。所以，权的大小也可以说明观测值本身精度的高低。但由于 σ_0 可以任意选定，故观测值的权不是惟一的，是随着 σ_0 的不同而变化的。就是说，选定了一个 σ_0，就有一组对应的权。或者说，有一组权，必有一个对应的 σ_0 值。

由权的定义式（1-15），可以写出各观测值的权之间的比例关系为：

$$p_1 : p_2 : \cdots\cdots : p_n = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} : \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2} : \cdots\cdots : \frac{\sigma_0^2}{\sigma_n^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} : \cdots\cdots : \frac{1}{\sigma_n^2} \tag{1-16}$$

上式说明，σ_0 是可以任选的，但不论 σ_0 选用何值，一组权之间的比例关系始终不变。对于一组观测值，其权之比等于相应方差的倒数之比。权的意义就在于这种相对性，它的作用是衡量观测值之间的相对精度。因此，常称观测值的权为观测值的相对精度指标，而称观测值的方差为绝对精度指标。

必须注意：为了使权能起到比较精度高低的作用，在同一个问题中只能选定一个 σ_0 值。不能同时选用几个不同的 σ_0，否则就破坏了权之间的比例关系。

【例 1-2】 设有三个观测值 L_1、L_2、L_3，其方差分别为：$\sigma_1^2=2$、$\sigma_2^2=4$、$\sigma_3^2=6$，现分别选 σ_1^2 及 8 作为 σ_0^2 计算权：

当 $\sigma_0^2 = 2$ 时：$p_1 = 1; p_2 = \frac{1}{2}; p_3 = \frac{1}{3}$　　　当 $\sigma_0^2 = 8$ 时：$p_1 = 4; p_2 = 2; p_3 = \frac{4}{3}$

此例说明，比例常数 σ_0 的改变，并不影响权之间的比例关系，即：

$$p_1 : p_2 : p_3 = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 4 : 2 : \frac{4}{3}$$

可见，一组权可以同乘或同除某数而不破坏权的相对性。离开了权的相对性，单纯看某观测值的权是大是小就没有意义。

从上面的讨论还可以看出，σ_0 在定权时只起着一个比例常数的作用，但 σ_0 值一经选定，它就有着具体的含义。若令 $\sigma_i=\sigma_0$，并代入式（1-15），则 $p_i=1$。可见，凡是观测值

的方差等于 σ_0^2 时，其权必然等于 1；或者说，权为 1 的观测值的方差必然等于 σ_0^2。因此，通常称 σ_0^2 为单位权观测值的方差（简称单位权方差或方差因子）；把权等于 1 的观测值，称为单位权观测值。例如，在例 1-2 中，当 $\sigma_0^2=\sigma_1^2$ 时，$p_1=1$，σ_1^2 是单位权方差，L_1 就是单位权观测值。当 $\sigma_0^2=\sigma_3^2$ 时，$p_3=1$，σ_3^2 是单位权方差，L_3 就是单位权观测值。

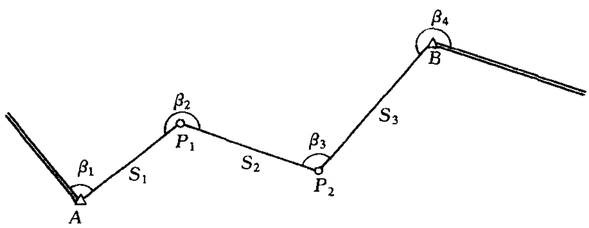

图 1-4

【例 1-3】 某附合导线如图 1-4 所示，现观测了四个角度 β_1、β_2、β_3、β_4 和三条边长 S_1、S_2、S_3。设它们的中误差分别为 $m_{\beta_1}=m_{\beta_2}=m_{\beta_3}=m_{\beta_4}=\pm 1.8''$，$m_{s_1}=\pm 0.6\text{cm}$，$m_{s_2}=\pm 0.8\text{cm}$，$m_{s_3}=\pm 0.9\text{cm}$。试确定角度观测值和边长观测值的权。

解： 以角度观测值为单位权观测值，并用方差的估值代入进行计算。现令 $\sigma_0=\hat{\sigma}_\beta=m=\pm 1.8''$，由此可得：

$$p_{\beta_1}=p_{\beta_2}=p_{\beta_3}=p_{\beta_4}=\frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_\beta^2}=1$$

$$p_{s_1}=\frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_{s_1}^2}=9.00\,\frac{('')^2}{\text{cm}^2};p_{s_2}=\frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_{s_2}^2}=5.06\,\frac{('')^2}{\text{cm}^2};p_{s_3}=\frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_{s_3}^2}=4.00\,\frac{('')^2}{\text{cm}^2}$$

从上例可见，用权衡量各观测值之间的相对精度，可以是同一类的观测值，也可以是不同类的观测值。在确定一组同类元素的观测值的权时，所选取的单位权方差 σ_0^2 的单位一般与观测值方差 σ_i^2 的单位相同。确定两种不同类型的观测值的权时，若某类观测量的权是无单位的，则另一类观测值的权必然是有单位的，这种情况在平差计算中是常常会遇到的。

第三节　协方差与协方差传播律

上一节介绍了衡量精度的指标，通常采用方差或均方差来衡量观测值的精度。在实际工作中，往往会遇到这样一个问题，即有些量的大小并不是直接测定的，而是由观测值通过一定的函数关系间接计算出来的。例如，已知水平距离 D，垂直角观测值 α，则三角高程测量计算高差的公式为：

$$h=D\text{tg}\alpha+i-t$$

式中　h 就是观测值的函数。类似的例子还可以举出很多。现在的问题是，如何衡量这些观测值函数的精度？观测值的方差与观测值函数的方差之间，存在着怎样的关系？这就是协方差传播律要解决的问题。

一、协方差

在一定范围内能以一定的概率随机地取得各种不同数值的量，称为随机变量。在测量工作中，观测误差和观测值都是随机变量。对于一个随机变量 x，可根据式（1-6），将其方差定义为：

$$\sigma_x^2=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta_x\Delta_x]}{n}\tag{1-17}$$

如果有另一个随机变量 y，根据式（1-6）同样可以将其方差定义为：

$$\sigma_{y}^{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{[\Delta_{y}\Delta_{y}]}{n} \tag{1-18}$$

当讨论两个或多个随机变量时，就要考虑描述它们之间相互关系的数学特征——协方差。设有随机变量 x 和 y，则它们的协方差定义为：

$$\sigma_{xy} = \lim_{n \to \infty} \frac{[\Delta_{x}\Delta_{y}]}{n} \tag{1-19}$$

可见，协方差是两种真误差 Δ_{x}、Δ_{y} 所有可能取值的乘积的理论平均值。显然，协方差描述了两个随机变量之间的关系。因测量上所涉及到的观测值和观测误差都是服从正态分布的随机变量，故当 $\sigma_{xy}=0$ 时，就表示 x 和 y 这两个随机变量的误差是不相关的，或者说，x 和 y 是互相独立的两个随机变量。若 $\sigma_{xy} \neq 0$，则表示它们的误差是相关的，即 x 和 y 是相关的、不独立的。

实际工作中，因 n 总是有限值，所以只能求得协方差的估值，且记为：

$$m_{xy} = \hat{\sigma}_{xy} = \frac{[\Delta_{x}\Delta_{y}]}{n} \tag{1-20}$$

二、协方差阵

由两个随机变量推广之，设有 n 个随机变量 x_1、x_2……x_n，对测量工作来说，这 n 个随机变量可以是等精度的独立观测值，也可以是不等精度的相关观测值，还可以是观测值的函数，故统称为 n 个随机变量。由它们组成的 $n \times 1$ 阶列矩阵为：

$$\underset{n\times 1}{X} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots\cdots \quad x_n]^{T} \tag{1-21}$$

式中　X 称为 n 维随机向量。

则 n 维随机向量 X 的方差 D_{XX} 定义为 n 阶方阵

$$\underset{n\times n}{D}_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^{2} & \sigma_{x_1x_2} & \cdots\cdots & \sigma_{x_1x_n} \\ \sigma_{x_2x_1} & \sigma_{x_2}^{2} & \cdots\cdots & \sigma_{x_2x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \sigma_{x_nx_1} & \sigma_{x_nx_2} & \cdots\cdots & \sigma_{x_n}^{2} \end{bmatrix} \tag{1-22}$$

D_{XX}阵中的主对角线元素 $\sigma_{x_i}^{2}$ 为各个随机变量 x_i 的方差，而非对角线元素 $\sigma_{x_ix_j}$ 为两两随机变量 x_i 关于 x_j（$i \neq j$）的协方差，故称 D_{XX}为随机向量 X 的方差－协方差阵，简称 X 的方差阵或自协方差阵。

可以证明：$\sigma_{x_ix_j}=\sigma_{x_jx_i}$，故 D_{XX}为 n 阶对称方阵。

当随机向量 X 中的任意两个随机变量，两两相互独立时，则有 $\sigma_{x_ix_j}=\sigma_{x_jx_i}=0$（$i \neq j$），此时随机向量 X 的方差－协方差阵为一对角阵，即：

$$\underset{n\times n}{D}_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^{2} & & & \\ & \sigma_{x_2}^{2} & & \\ & & \cdots & \\ & & & \sigma_{x_n}^{2} \end{bmatrix} \tag{1-23}$$