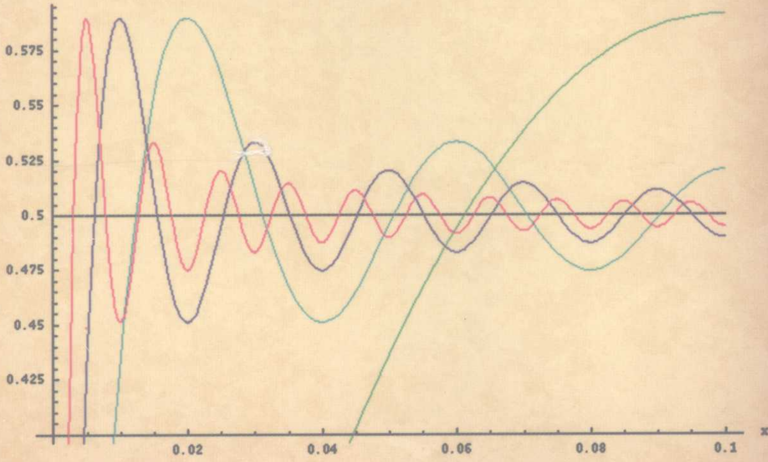
TURING 图灵数学·统计学丛书 26



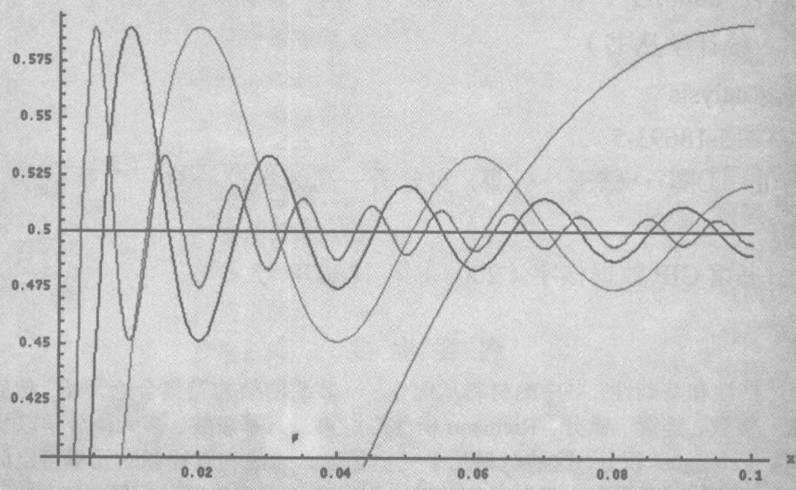
Analysis

陶哲轩实分析

[澳] 陶哲轩 著
王昆扬 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书26



Analysis

陶哲轩实分析

[澳] 陶哲轩 著
王昆扬 译

人民邮电出版社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

陶哲轩实分析/ (澳)陶哲轩著；王昆扬译. —北京：
人民邮电出版社, 2008.11
（图灵数学 · 统计学丛书）
书名原文：Analysis
ISBN 978-7-115-18693-5
Ⅰ. 陶… Ⅱ. ①陶…②王… Ⅲ. 实分析—高等学校—教
材 Ⅳ. O174.1
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 128078 号

内 容 提 要

本书强调严格性和基础性，书中的材料从源头——数系的结构及集合论开始，然后引向分析的基础(极限、级数、连续、微分、Riemann 积分等)，再进入幂级数、多元微分学以及 Fourier 分析，最后到达 Lebesgue 积分，这些材料几乎完全是以具体的实直线和欧几里得空间为背景的. 书中还包括关于数理逻辑和十进制系统的两个附录. 课程的材料与习题紧密结合，目的是使学生能动地学习课程的材料，并且进行严格的思考和严密的书面表达的实践.

本书适合已学过微积分的高年级本科生和研究生学习.

图灵数学 • 统计学丛书

陶哲轩实分析

◆ 著　　[澳] 陶哲轩
　译　　王昆扬
　责任编辑　明永玲
◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编 100061　　电子函件　315@ptpress.com.cn
　网址：http://www.ptpress.com.cn
　北京铭成印刷有限公司印刷
◆ 开本：700×1000　1/16
　印张：29.75
　字数：580 千字　　2008 年 11 月第 1 版
　印数：1–3 000 册　　2008 年 11 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2007-4744 号

ISBN 978-7-115-18693-5/O1

定价：69.00 元

读者服务热线：(010)88593802　印装质量热线：(010) 67129223
反盗版热线：(010) 67171154

版 权 声 明

译者简介

王昆扬 1943 年生于广西河池金城江, 北京师范大学教授、博士生导师. 1985 年获理学博士学位, 导师孙永生教授. 1991 年任教授, 1993 年获博士生导师资格.

主要社会兼职有: 政协北京市第九届委员、第十届委员 (1998—2002, 2003—2007); 教育部高校数学与统计学教指委数学分委委员 (1996—2000, 2001—2005); 中国数学会教育工作委员会主任 (2000—2003);《数学进展》常务编辑委员 (2000—2004—2009);《数学研究与评论》编辑委员 (2006—); *Analysis in Theory and Applications* 编辑委员 (2006—); 德国 *Zbl Math* 评论员; 美国 *Math Review* 评论员.

至今为止, 发表学术论文 65 篇, 教学改革论文 12 篇; 出版学术专著 2 部, 教科书 4 部, 译著 4 部. 主持并完成教育部师范司教改重点项目 JS032A (1998—2000). 两度主持国家理科基地创建名牌课程项目, 四度主持国家自然科学基金自由申请项目 (1992—2003), 两度主持中俄国际学术合作项目, 并且主持 "数学分析" 国家级精品课程 (2005—).

多次获得各项荣誉和奖励, 如 1989 年国家教委科技进步一等奖和国家自然科学四等奖 (合作), 1990 年全国优秀科技图书二等奖, 1997 年宝钢优秀教师奖, 2001 年度宝钢优秀教师特等奖, 全国模范教师称号 (200111004 号), 2002 年全国普通高等学校优秀教材二等奖, 先进工作者称号 (教育部、国家自然科学基金委 2002 年), 2003 年北京市名师奖.

译者的话

我认为国外的好的数学教材, 最好是原文引进. 翻译过来, 不管译得好坏, 都难免串味儿. 但是出版社的明永玲同志告诉我, 这本书暂时只取得翻译的版权, 只好翻译成中文出版. 我知道自己的能力有限, 很难译出原著的风格. 但打开书一看, 就觉得应该把它介绍到中国来, 所以毅然接受了翻译的任务.

我对此书的赞赏, 首先是它的逻辑的严格. 从实数 (甚至自然数) 讲起, 不留任何漏洞. 国内外的实分析教科书, 认真讲实数的实在不多. 其次是 Terence Tao 的认真的教学态度. 他的讲述, 贯穿严谨、透彻的精神, 而其苦口婆心的态度, 分外令人感动. 第三, 此书是基于讲义写成的, 我赞赏它令人读来感到亲切的风格.

王晟同志用 LaTEX 打出了全部译稿, 我对她表示诚挚的感谢.

下面是关于译法的几点说明.

1. 关于人名的译法. 生于公元前, 中文译名已统一的, 用中文, 例如: 欧几里得 (约公元前 330 年 ~ 约公元前 275 年), 阿基米德 (公元前 287 年 ~ 公元前 212 年), 等等. 不太统一的则用原文中的写法. 生于公元后的, 原则上用原名, 查不到原名的, 用原文中的写法.

2. 关于 rational number 的译法. 英语单词 rational 是 “有理” 的意思, 类似于 reasonable. 但作为 number 的定语, 应该是 ratio 即比例的意思, 所以 rational number 应是 ratio-number 即比例数之意. 故通篇译为比例数, 而不是有理数. 相应地, irrational number 译作非比例数或非比数, 而不是无理数.

3. 原书分为两卷出版, 共 600 多页. 中译本开本较大, 页数较少, 把两卷合并出版, 原来的两卷分别作为第一部分和第二部分.

4. 原书用语相当口语化 (例如常有 We are done 等语), 读来亲切、轻松. 译文尽力保持这种风格, 也许有的句子译得不一定能准确表达原文的风格, 但相信意思不会错.

5. 正文编排的体例与原书基本一致.

请读者把对于译稿的任何意见用 E-mail 发给我, 地址是:

wangky@bnu.edu.cn

王昆扬　于北京师范大学

2007 年 12 月 20 日

献给我的父母,感谢他们所做的一切

前　言

此书的材料来源于 2003 年我在加州大学洛杉矶分校教授高等本科水平实分析系列课程的讲义. 本科生普遍认为实分析是最难学的课程之一, 这不仅是由于许多抽象概念 (例如拓扑、极限、可测性, 等等) 初次遇到, 而且也是由于课程所要求的证明的高度严格性. 由于认识到这个困难, 老师常常面临困难的选择, 要么降低课程的严格性水平而使其容易一些, 要么保持严格的标准而去面对众多学生、甚至很多优秀学生在与课程的材料进行艰难奋斗时的求助与企盼.

面对此种困境, 我尝试用一种稍许不同的方式来处理这门课程. 按照典型的方式, 在实分析中一系列导引内容是预先假定了的, 假定学生已经熟知实数, 熟知数学归纳法, 熟悉初等微积分, 并且熟悉集合论的基础知识, 然后一下子就进入课程的核心内容, 例如极限概念. 通常确实会给进入课程的学生轻描淡写地展示一下这些预备性的知识, 但在绝大多数情况下, 这些材料都不是认真地叙述的. 例如, 极少有学生能够真正地**定义**实数, 甚或真正地**定义**整数, 尽管他们可以直觉地想象这些数字并熟练地对它们进行代数运算. 我觉得这好像是失去了一个良好的机会, 在学生首次遇到的课程当中, 实分析 (与线性代数和抽象代数一样) 是这样的一门课, 人们确实必须全力抓住一个真正严格的数学证明的本质. 正因如此, 这门课程提供了一个极好的机会去回顾数学的基础, 特别是提供了一个做出实数的真正精确的解释的机会.

于是我这样来安排这门课. 在第一周, 我描述分析中的一些众所周知的 "**悖论**", 在这些悖论中, 平常的算律 (例如极限与求和的交换, 或求和与积分的交换) 以不严格的方式加以使用而导出像 $0=1$ 那样的荒谬的结果. 这就启发我们提出这样的要求: 回到事物的开端, 甚至回到自然数的真正的定义, 并且要求从头检验全部的基础原理. 例如, 第一个习题就是 (只使用 Peano 公理) 验证自然数的加法是结合的 (即 $(a+b)+c=a+(b+c)$ 对于一切自然数 a, b, c 成立, 见习题 2.2.1). 那么, 即使是在第一周, 学生也必须使用数学归纳法来写出严格的证明. 当推导出自然数的全部基本性质之后, 我们就转向整数 (其原始定义是自然数的形式差); 一旦学生验证了整数的一切基本性质, 我们就转向比例数[①] (其原义是整数的形式比); 而后我们就 (经由 Cauchy 序列的形式极限) 转到实数. 与此同时, 还要涉及集合论的基础, 例如演示实数的不可数性. 仅在此后 (大约十讲之后) 我们才开始进入人们通常认为的实分析的核心内容 —— 极限、连续性、可微性, 等等.

对于这种处理方式的回应是相当有趣的. 在最初的几周当中, 学生感觉所讲的材料在概念层面上非常容易, 因为我们只涉及平常的数系的基本知识. 但在理性层

---

① 原文 rational, 中文通常作 "有理数". —— 译者注

面上, 这些材料却是很具挑战性的, 因为我们是从基础的观点来分析这些数系的, 目的是从这些数系的较原始的属性推导出更进一步的事实. 有个学生告诉我, 向他的非高等水平实分析课程的朋友们解释如下事项是何等的困难: (a) 为何他依然在学习怎样证明为什么一切比例数 (rational numbers) 要么是正的, 要么是负的, 要么是零 (习题 4.2.4), 而此时非高等水平的学生已经在区分级数的绝对收敛和条件收敛; (b) 尽管如此, 为什么他认为自己的家庭作业比他的朋友的作业显然要更困难. 另一位学生相当苦恼地对我说, 尽管她能够明显地看到为什么总可以把自然数 n 除以一个正整数 q 而给出商 a 和小于 q 的余数 r(习题 2.3.5), 她还是很难对此写下一个证明. (我告诉她, 在本课程稍后, 她将必能证明那些不能明显地看出其真确性的命题, 她好像并不为此而特别感到欣慰.) 然而, 这些学生非常喜欢家庭作业, 因为当他们坚持下去并获得对于一个直觉的事实的严格证明时, 在他们的思想中, 规范的数学的抽象处理与他们对数学的 (以及对于现实世界的) 不规范的直觉之间建立起了牢固的联系, 这常使他们十分满意. 待到他们被要求给出实分析中令人厌恶的 “埃普西龙–怠尔塔” 证明时, 他们已经有了阐释直觉并具有认识数理逻辑的精妙术语 (如区分量词 “对于一切” 和量词 “存在”) 的大量经验, 从而使得他们能相当顺利地过渡到这种证明, 而我们就能非常精确地同时快速地叙述课程的内容. 到了第十周, 我们就赶上了非高级班的进度, 学生们就该验证 Riemann-Stieltjes 积分的变量替换公式并证明逐段连续函数是 Riemann 可积的了. 到第二十周系列课程结束时, 我们就已 (通过课堂讲述及家庭作业) 完成了 Taylor 级数和 Fourier 级数的收敛理论, 多元可微函数的反函数定理和隐函数定理, 并建立了 Lebesgue 积分的控制收敛定理.

为了纳入这许多材料, 很多关键性的基本结果都留给学生作为家庭作业来证明, 事实上这正是本课程的一个本质精神, 旨在确保学生真正理解所介绍给他们的那些概念. 这种处理方式一直保持在本书中, 大多数习题是证明课文中的引理、命题和定理. 如果希望使用这本书来学习实分析的话, 那么我确实强烈建议做尽可能多的习题, 也包括那些证明 “明显的” 命题的习题. 这决不是一门只经单纯阅读就可轻易理解其精妙之处的课程. 多数章节都配有一些习题, 列于各节的末尾.

对于专业数学工作者来说, 此书的进度可能像是有些慢, 特别是在最初几章, 其中着重强调严格性 (除了那些明确标明是 “非正式的” 讨论之外), 并强调对于许多平常作为不证自明而迅速通过的步骤给予理性的证明. 最初几章中对于平常的数系 (通过令人生厌的论证) 建立了很多 “明显的” 性质, 例如两个正的实数的和还是正的 (习题 5.4.1), 或者给定两个不同的实数, 必可找到一个介于它们之间的比例数 (习题 5.4.5). 在这几个奠基性的篇章中, 同样也对于**非循环论证**进行了强调 —— 不可使用后面的更进一步的结果去证明早先的更原始的结果. 特别是, 通常的代数算律在推导出来之前不予使用 (而且这些算律必须分别对于自然数、整数、比例数

以及实数进行推导). 这样做的理由是, 它能使学生学会在数系的和谐的直觉的背景上, 从有限的假定出发演绎出真确的事实这种抽象说理的艺术; 此种实践的报偿, 其后当必须以同类说理技巧去处理更进一步的概念 (例如 Lebesgue 积分) 时就会兑现.

由于此书是由我关于此课题的讲义引伸出来的, 因而带有强烈的教学色彩; 很多关键性的材料都包含在习题中, 并且在很多情况下我选择给出较长的冗烦的然而是构造性的证明, 而不选取巧妙的抽象的证明. 在更深的课本中, 学生会看到这些材料的更简短的、概念上更为凝练的处理, 那样做比起严格性来要更加强调直觉; 但我觉得, 为了真正懂得研究生层次或更高层次的处理分析学的更现代的、直观的和抽象的手段, 首先了解如何严格地及 "手工地" 做分析是很重要的.

此书中的叙述十分强调严格性及形式化, 但这并不是说基于此书的讲课必须遵循同样的方式. 实际上在我自己的教学中, 我曾用课堂上的时间来揭示隐于概念之后的直观形象 (画很多非规范的图形并举例), 从而给课文中的正式表示提供一个补充的观点. 作为家庭作业而设置的习题在概念和直观形象之间提供了本质的桥梁, 要求学生把直观与形式理解两者结合起来, 以做出对一个问题的正确证明. 我发现对于学生来说, 这是最困难的工作, 因为它要求对所学内容的真确理解而不只是记住或含混不清地吸收. 然而我从学生那里得到的反馈是, 由于上述缘故家庭作业是非常必要的, 同时也是非常有益处的, 因为这些作业使他们把相当抽象的数学的形式处理与他们对于譬如数、集合以及函数等基本概念的天然的直觉联系了起来. 当然, 为达成这种联系, 一个好的助教的帮助是非常宝贵的.

至于基于此书的课程的考试, 我建议或者采用可以看书或笔记的开卷方式, 以与课本中的习题类似的题目 (但宜更短, 别设置不常见的圈套) 来考试, 或者采用回家作答方式, 以比课本的习题更难的题目进行考试. 课程的题材实在太宽泛了, 以致没法强迫学生记住那些定义和定理, 所以我不赞成闭卷考试, 也不赞成基于对书本的反刍式的压缩所做的考试. (实际上, 在我自己的考试中我总是附上一纸, 列出与考题相关的关键性的定义和定理.) 使考试类似于课程所设置的家庭作业, 将同时有助于启发学生尽可能认真地复习和理解他们的家庭作业中的问题 (相对于使用卡片或其他此类手段来死记材料而言), 这不仅对于考试, 而且对于一般地做数学都是一个好的准备.

此书中的某些材料对于主题而言不是很本质的, 若时间不够则可删去. 例如, 对于分析学而言, 集合论并不像数系那么基本, 关于集合论的两章 (第 3 章和第 8 章) 可以不太严格地较快地通过, 或者作为阅读材料. 关于逻辑学以及十进制系统的附录原本就是可选的或补充的阅读材料, 大概不必在课堂上讲授; 关于逻辑学的附录特别适合于配合最初几章同时阅读. 还有第 16 章 (关于 Fourier 级数) 在课文的其他地方用不到, 因此可以删去.

由于篇幅的缘故，此书分成两卷[①]. 第一卷稍长，但若删去或削减一些非本质的材料，则可用大约三十讲完成. 第二卷不时地涉及第 1 卷，但也可以给从别处学完分析学初等课程的学生讲授. 此卷也用大约三十讲完成.

对于我的学生，其通过了实分析的整个课程，更正了赖以编成此书的讲稿中的若干错误，并给予了其他的有价值的反馈者，谨表深深的感谢. 我也非常感谢很多对本书作出更正并提出很多重要改进意见的匿名的评论者.

陶哲轩

① 中译本将两卷合为一本出版. —— 编者注

目　录

第 一 部 分

第 1 章　引　　论

§1.1　什么是分析学

本书是对于实分析的一个高等本科水平的介绍. **实分析**指的是：实数的分析、实数序列和实数级数的分析以及实值函数的分析. 与实分析相关却又不同的有复分析、调和分析以及泛函分析等. **复分析**指的是：复数的分析及复函数的分析. **调和分析**涉及对于调和 (振动) 如正弦振动的分析, 以及这些振动如何经由 Fourier 变换合成其他函数. **泛函分析**则重点聚焦于函数 (以及它们怎样构成如向量空间之类的东西). **分析学**是对这些对象进行严格研究的学科, 它着重于尽力明白、准确地弄清这些对象的定性的和定量的性状. 实分析是微积分的理论基础, 而**微积分**是人们用以处理函数的那些计算规则的汇集.

本书中我们将研究许多你从初等微积分中熟知的对象：数、序列、级数、极限、函数、定积分、导数等. 你已经具有大量的对于这些对象进行**计算**的经验, 但此处我们将更多地集中于这些对象的基础理论. 我们将涉及如下的一些问题：

1. 什么是实数? 有没有最大的实数? 在 0 之后, "接下去的" 实数是什么?(也就是说最小的正实数是什么?) 你能不能把一个实数分成无限多份? 为什么像 2 这样的数具有平方根, 而像 -2 这样的数就没有? 如果存在无限多个实数也存在无限多个比例数, 那么, 实数比比例数 "更多" 这话从何谈起?

2. 怎样取一个实数序列的极限? 哪些序列有极限而哪些没有? 如果你可以制止一个序列跑向无穷, 这是否意味着此序列终究会停止变化而收敛? 你能把无限多个实数都加起来而仍得到一个有限的实数吗? 你能把无限多个比例数加在一起而终止于一个非比例数吗? 如果你重新排列一个具有无限和的级数的元素, 所得到的和依然一样吗?

3. 什么是函数? 说一个函数连续指的是什么? 可微指的是什么? 可积指什么? 有界指什么? 你能把无限多个函数加在一起吗? 取函数序列的极限是什么意思? 你会微分一个函数的无限级数吗? 求积分是什么意思? 如果函数 $f(x)$ 当 $x=0$ 时取值 3 而当 $x=1$ 时取值 5(即 $f(0)=3$ 且 $f(1)=5$), 那么当 x 在 0 和 1 之间走动时, 它必须取到介于 3 和 5 之间的每个中间值吗? 为什么?

根据你的微积分知识, 你可能已经知道如何回答其中的一些问题, 不过这些东西对于微积分课程来说大体上只是第二位重要的. 那里所强调的是使你实施计算, 例如计算 $x\sin x^2$ 从 $x=0$ 到 $x=1$ 的积分. 但既然你熟悉这些对象并已知道如何

进行各种计算, 我们就要回到理论, 并力图**真正**理解所发生的事情.

§1.2 为什么要做分析

谈到分析, 一个合情合理的问题是问 "为什么做分析?". 了解事情**为何**起作用, 在一定的哲学意义上是件乐事. 但一个务实的人或许会争辩说, 人们只需要知道对于处理现实生活问题, 事情**怎样**起作用就够了. 你在入门课程中接受的微积分训练肯定使你能初步解决许多物理、化学、生物、经济、计算机科学、金融、工程或其他某些你终身要从事的行业中的问题 —— 你肯定会使用链式法则, L'Hôpital 法则或分部积分等诸如此类的法则, 而不知道这些法则为何起作用, 或者不知道对于这些法则是否有什么例外之处. 但是, 如果使用法则时不知道这些法则是从何而来, 对它们的使用有何限制, 那么就可能产生麻烦. 让我举一些熟知的法则的例子来说明, 如果不知其分析基础而滥用就可能导致灾难.

例 1.2.1(用零相除) 此事你很熟悉: 消去律 $ac = bc \Longrightarrow a = b$, 当 $c = 0$ 时不成立. 例如, 等式 $1 \times 0 = 2 \times 0$ 成立, 但若盲目把 0 消去就得到 $1 = 2$, 这不成立. 在这种情况下, 显然是做了用零相除之事, 但在其他情况下, 事情可能更为隐蔽.

例 1.2.2(发散级数) 你大概见过像下面的无穷和

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

那样的几何级数. 你也大概见过求此级数的和的下述花招: 如果把级数的和叫作 S, 然后两边通乘以 2, 就得到

$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2 + S$$

于是 $S = 2$, 从而级数的和是 2. 但是, 如果你对级数

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$$

使用同样的花招, 就得荒谬的结果

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots = S - 1 \Longrightarrow S = -1.$$

于是, 同一个理由证明了 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$ 并给出了 $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = -1$. 为什么我们相信第一个等式而不相信第二个? 一个类似的例子是级数

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

可以写成

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S,$$