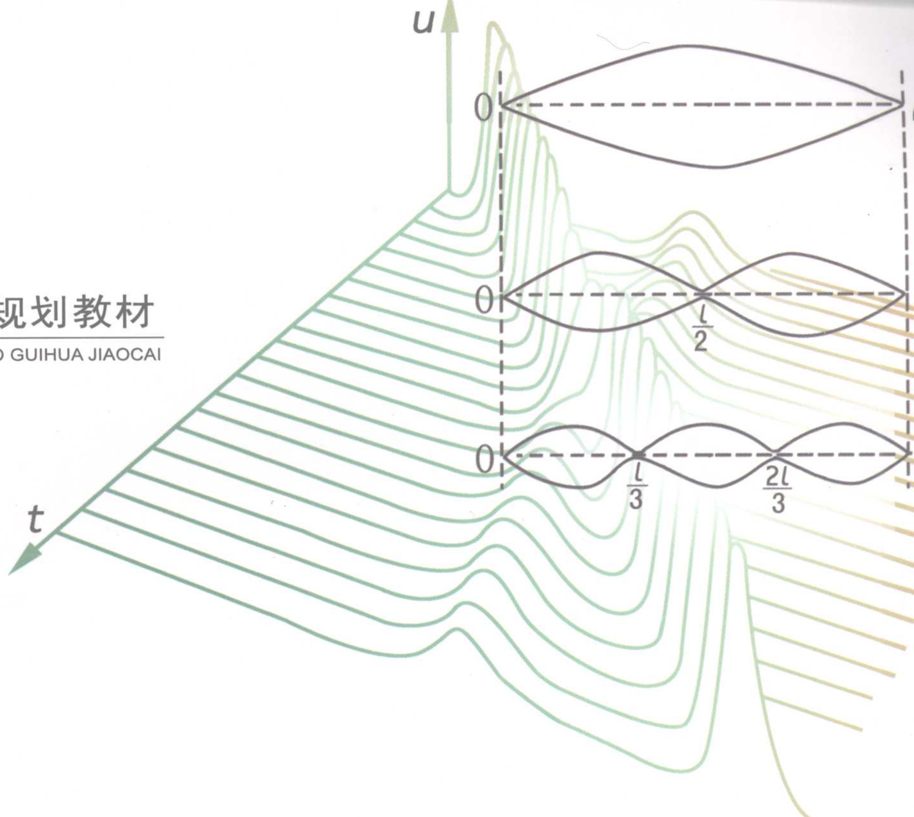


高等学校规划教材
GAODENG XUEXIAO GUIHUA JIAOCAI

冉扬强 主编

数学物理方法

SHUXUE WULI FANGFA

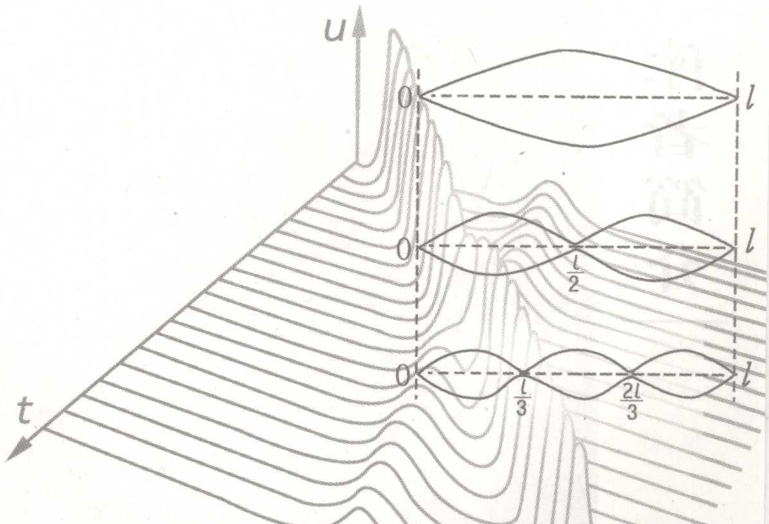
西南师范大学出版社
XINAN SHIFAN DAXUE CHUBANSHE

高等学校规划教材

GAODENG XUEXIAO GUIHUA JIAOCAI

SHUXUEWULIFANGFA

数学物理方法



主编 冉扬强

西南师范大学出版社

XINAN SHIFAN DAXUE CHUBANSHE

内容提要

本书是作者在物理类各专业长期讲授《数学物理方法》的基础上编写的.本书包括复变函数论、数学物理方程、积分变换和特殊函数四部分,重点讲解解析函数的独特性质和应用留数定理计算实积分,特别重视解本征值问题、特殊函数的处理方法及其在物理学中的应用.另外,本书含有大量的与实际问题有关的例题.每章都有一定数量的习题.书末还附有各章习题答案.书中带“*”号的内容有的是与微积分中有关部分平行的内容,有的是要求较高的参考内容,供各专业选用.

本书可作为高等院校物理类、工科类各专业及相近专业的教材和参考书,也可供相关专业的研究生、教师和科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/冉扬强编著.—重庆:西南师范大学出版社,2007.9

高等学校规划教材

ISBN 978-7-5621-4100-6

Ⅰ.数… Ⅱ.冉… Ⅲ.数学物理方法—高等学校—教材 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 100530 号

数学物理方法

冉扬强 主编

责任编辑:李虹利

整体设计:CASPALY 尚品视觉 周娟 钟琛

出版、发行:西南师范大学出版社

重庆·北碚 邮编:400715

网址:www.xscbs.com

印 刷:四川外语学院印刷厂

开 本:787mm×1092mm 1/16

印 张:21

字 数:554 千字

版 次:2008 年 8 月第 1 版

印 次:2008 年 8 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 978-7-5621-4100-6

定 价:38.00 元

冉扬强，男，1965 年 1 月出生，博士，教授，硕士生导师。1986 年 7 月毕业于四川师范大学物理系，1986 年 9 月至 1989 年 2 月在核工业西南物理研究院读硕士研究生，专业为核聚变与等离子体物理，其间于 1986 年 11 月至 1987 年 6 月在北京语言学院学习俄语，1989 年 2 月由教育部公派至（原苏联）乌克兰基辅工学院攻读博士学位，专业为理论物理，获乌克兰数学-物理博士学位，1994 年回国。从 1994 年 11 月至今在西南大学物理科学与技术学院工作，2002 年任教授。1999 年 9 月至 2000 年 7 月在复旦大学物理系（国家理科基地）作访问学者，研修《量子力学》。主要从事量子理论、量子信息论、数学物理和薄膜物理等方面的研究，以及大学本科课程《数学物理方法》、《量子力学》、《工程数学》、《高等数学》和硕士研究生课程《高等量子力学》、《量子场论》等的教学。

作者简介

前言

本书是作者在物理类各专业长期讲授《数学物理方法》的基础上编写的.本书包括复变函数论、数学物理方程、积分变换和特殊函数四部分.本书可作为高等院校物理类、工科类各专业及相近专业的教材和参考书,也可供相关专业的研究生、教师和科研人员参考.

《数学物理方法》既是理论物理学的基础,又是物理学与数学联系的桥梁.如果能结合"四大力学",牢固掌握数学物理方法的知识和技能,就能为以后的学习和工作带来极大的方便.

《数学物理方法》课程是既具有数学类型又具有物理类型的二重性课程.为了课程教学的需要,本书在不失严密性及逻辑性的基础上,强调运算性和实用性,力求和物理专业的其他专业课,如电动力学、量子力学、统计物理学等相衔接,引导读者迅速掌握这些数学工具并应用于物理问题.本教材以讲授古典数学物理中的常用方法为主,适当介绍近年来的新发展,为后继的专业课程研究有关的数学物理问题做准备,也为今后工作中遇到的数学物理问题的求解提供基础.

对学物理的人来说,学数学要遵循从"特殊到一般"的学习和研究方法.例如,从物理上归结出数学问题时,往往得到一个特殊的方程式,首先总是问:"怎么求解?"而不会首先去关心这个方程的解是否"存在"或"唯一",后一问题主要依靠数学家去解决.因为一般说来,我们不具备这种能力.因此,学习《数学物理方法》,主要矛盾是如何学习和掌握各种具体的计算方法,逐步培养利用数学物理方法的知识解决物理问题的能力.本书的编写就是为了适应这个需要.另外,虽然同类优秀教材已很多,但难度适合一般本科院校的同类教材较少,作者想编写一本适合一般本科院校少学时《数学物理方法》课程教学的教材.本书的编写也是为了这个目的.

本书以数学物理方程和特殊函数部分为重点,主要讲解数学物理方程的常用解法和最常用的两类特殊函数.在复变函数部分,重点讲解应用留数定理计算实积分.在数学物理方程部分,加强了对分离变量法的讲解,特别重视解本征值问题.实际上,它们已成为本书的核心内容.对格林函数法也特别重视.在积分变换部分,以傅里叶变换和拉普拉斯变换为例讨论积分变换,强调了积分变换的应用.在特殊函数部分,重点讨论应用较广的勒让德多项式与球函数、贝塞尔函数,特别重视特殊函数的处理方法及其在物理学中的应用,有了这些知识,就很容易类似地研究其他特殊函数.另外,本书含有大量的与实际问题有关的例题.每章都有一定数量的习题,其中有的是基本要求的习题,有的是要求较高的习题,供读者选做.书末还附有各章习题答案.书中带"*"号的内容有的是与微积分中有关部分平行的内容,有的是要求较高的参考内容,如果讲授学时有限,可以不讲或由学生自学.

对于初学者来说，如何才能学好《数学物理方法》？学习要有正确的方法，正如华罗庚先生所说，读书要经过由“薄”到“厚”、再到“薄”的过程，才能真正把这门课程融会贯通起来. 在学习《数学物理方法》时应该仔细阅读、刻苦钻研每一部分内容，包括每一步的推导，有时还要自己动手推导，并要多问为什么，搞清楚知识的来龙去脉. 等到学完以后，把所有内容联系起来，融会贯通，把知识点及计算的方法等归类. 要学好《数学物理方法》，还必须勤于思考，多做练习，“熟能生巧”. 做练习的时候和做好以后，还要多想，想一想每一步有什么根据，还有没有其他方法.

《数学物理方法》与《高等数学》是分不开的，它涉及一元和多元微积分学、幂级数、傅里叶级数、微分方程、场论等. 因此，在学习《数学物理方法》的各章节时，应该回忆或复习《高等数学》中有关知识. 当学完《数学物理方法》以后，读者会发现，您的数学分析水平将有大幅提高. 当然，《数学物理方法》还与物理学有关，如果读者能结合物理学来学，也会给这门课程的学习带来方便.

本书参考了国内外同类优秀教材和参考书，作者从中学到了很多知识，受益匪浅，作者在此表示衷心的感谢. 同时向对本书提出宝贵意见和建议的专家表示衷心的感谢. 本书的写作和出版得到西南大学和西南师范大学出版社的大力支持，在此深表谢意.

本书中的错误和不足之处，恳请专家和读者批评指正.

作　　者

2007 年 5 月于西南大学

CONTENTS | 目录

CONTENTS 目录

第一篇　复变函数论

在《高等数学》课程中，我们学习了实变函数（自变量为实数的函数）的基本概念和理论及其一些应用. 由于理论的探讨、科学的发展和应用的需要，又出现了复变函数. 自变量为复数的函数就是复变函数. 复变函数的理论和方法在数学、自然科学和工程技术中有着重要的应用，是解决流体力学、电磁学、弹性力学、热学等的平面场问题的有力工具. 而自然科学和工程技术的发展又极大地推动了复变函数的发展，丰富了它的内容. 例如《量子力学》中的波函数是复数的事实说明了复数有对应的物理实在.

复变函数的发展与数学分析是分不开的，它的许多概念、理论和方法是实变函数在复数领域内的推广和发展，它们有许多相似之处，但复变函数论有它自身的特点，它的中心对象是解析函数，而解析函数具有许多独特的性质. 因此，在学习复变函数论的各章节时，应该回忆或复习实变函数的有关知识，找到复变函数与实变函数的相同点和不同点. 这样，才能抓住本质，融会贯通，把复变函数学好.

本篇主要讨论复变函数的基本概念、理论和方法及其一些应用，逐步培养利用复变函数的知识解决物理问题的能力.

第一章　复数与复变函数

本章介绍复数与复变函数的基本概念，首先简单复习有关复数及其运算规则的知识，然后讨论复球面与无穷远点，最后讨论复变函数的概念.

§ *1.1　复数及其代数运算

本节主要对复数与复数的运算作一次复习.

1. 复数

一个复数可表示为

$$z = x + \mathrm{i}y \tag{1.1}$$

其中 x, y 为实数，分别为复数 z 的**实部**与**虚部**，记为 $x = \mathrm{Re}\, z, y = \mathrm{Im}\, z$；$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$（即 $\mathrm{i}^2 = -1$）—— **虚单位**. 复数的上述表示称为复数的**代数式**.

讨论：

(1) 实部为零的复数 $z = \mathrm{i}y$ 称为纯虚数，虚部为零的复数 $z = x$ 称为实数. 全体实数只是全体复数的一部分.

(2) 若实部 $x = 0$，虚部 $y = 0$，则 $z = 0$，称为复数零. 即：$x + \mathrm{i}y = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0$.

2. 复数的运算

(1) 相等：$x_1 + \mathrm{i}y_1 = x_2 + \mathrm{i}y_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$. (1.2)

(2) 和差：$(x_1 + \mathrm{i}y_1) \pm (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$. (1.3)

(3) 积：$(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)$. (1.4)

(4) 商：$\dfrac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}+\mathrm{i}\,\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}$，$(x_2+\mathrm{i}y_2\neq 0)$. (1.5)

从复数的运算法则的定义中可以很明显地得出复数运算的**交换律**、**结合律**和**分配律**：

交换律：$z_1+z_2=z_2+z_1$，$z_1z_2=z_2z_1$.

结合律：$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$，$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$.

分配律：$(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$.

全体复数在引入相等关系和运算法则以后，称为**复数域**. 在复数域中，复数没有大小之分.

3. 复平面

如果把 x 和 y 当作平面上的点的坐标，复数 z 就跟平面上的点一一对应起来，这个平面叫做**复平面**或 **z 平面**，x 轴称为**实轴**，y 轴称为**虚轴**.

在复平面上(如图 1-1)，从原点到点 $z=x+\mathrm{i}y$ 所引的矢量$\overrightarrow{OP}$与复数 z 也构成一一对应关系，且复数的相加、减与矢量相加、减的法则是一致的，即满足**平行四边形法则**，例如(如图 1-2)：

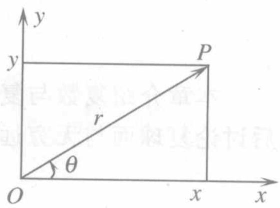


图 1-1

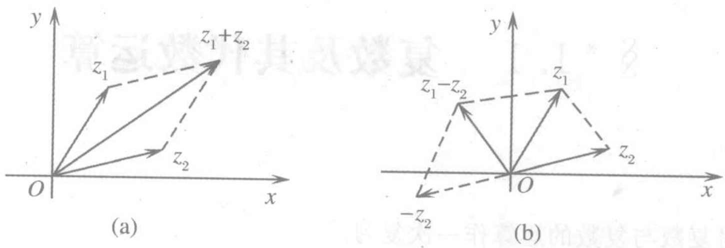


图 1-2

这样，就构成了复数、点、矢量之间的一一对应关系.

4. 复数的三角形式和指数形式

用极坐标 r,θ 代替直角坐标 x 和 y 来表示复数 z. 有

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

则复数 z 可表示为：

$$z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.6}$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 叫做复数 z 的**模**，记为 $|z|$；θ 称为复数 z 的**辐角**，记为 $\mathrm{Arg}\,z$. 上式称为复数的**三角式**. 利用欧拉公式 $e^{\mathrm{i}\theta}=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，复数 z 可表示为

$$z=re^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.7}$$

上式称为复数的**指数式**.

讨论：

(1) 复数的辐角不能唯一地确定. 如果 θ_0 是其中一个辐角，则 $\theta=\theta_0+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 也是其辐角，把属于$[-\pi,\pi)$的辐角称为**主值辐角**，记为 $\arg z$.

(2) 复数“零”的辐角无定义，其模为零.

(3) 当 $r=1$ 时，$z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=e^{\mathrm{i}\theta}$ 称为**单位复数**.

利用复数的指数形式作乘除法比较简单，如：

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot r_2e^{\mathrm{i}\theta_2}=r_1r_2e^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}\tag{1.8}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2e^{\mathrm{i}\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}\tag{1.9}$$

所以有

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},(z_2\neq 0)$$

$$\mathrm{Arg}\,(z_1\cdot z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2\tag{1.10}$$

$$\mathrm{Arg}\,\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{Arg}\,z_2$$

根据图 1-1 和图 1-2，还可以得出三角不等式

$$\begin{gathered}|x|\leqslant|z|,\ |y|\leqslant|z|,\ |z|\leqslant|x|+|y|\\ |z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|,\ |z_1|-|z_2|\leqslant|z_1-z_2|\end{gathered}\tag{1.11}$$

5. 共轭复数

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=re^{\mathrm{i}\theta}$ 的**共轭复数**为

$$\bar{z}=x-\mathrm{i}y=r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)=re^{-\mathrm{i}\theta}\tag{1.12}$$

或称复数 z 与 $\bar{z}$ **共轭**.

共轭复数具有下列性质：

(1) $z\cdot\bar{z}=x^2+y^2=r^2=|z|^2$.

(2) $\bar{\bar{z}}=z$.

(3) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\,z,z-\bar{z}=2\mathrm{iIm}\,z$.

(4) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2,\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\,\bar{z}_2,\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$. (1.13)

6. 复数的乘幂与方根

非零复数 z 的正整数次幂 z^n 为

$$z^n=r^ne^{\mathrm{i}n\theta}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)\tag{1.14}$$

当 $r=1$ 时，

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$$

上式为**棣摩弗公式**.

非零复数 z 的正整数次根式 $\sqrt[n]{z}$ 为

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\tag{1.15}$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

讨论：给定的 $\sqrt[n]{z}$ 可以取 n 个不同的值，它们沿中心在原点，半径为 $\sqrt[n]{r}$ 的圆周等距地分布着.

7. 复球面与无穷远点

复数的另一种几何表示，就是建立复平面与球面上的点的对应.

把一个球放在复平面上，球的南极 S 跟复数平面相切于原点，通过点 O 作一垂直于 z 平面的直线与球面交于点 N，N 称为球的北极. 在复平面上任取一点 z，它与球的北极 N 的连线跟球面相交于 $P(z)$，这样就建立起复平面上的有限远点跟球面 N 以外的点的一一对应，这个球叫做**复数球**(图 1-3).

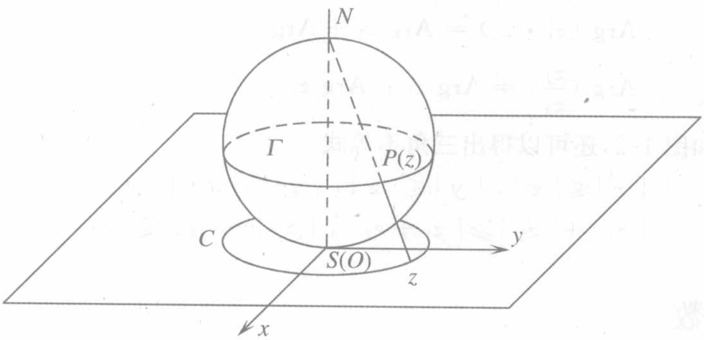


图 1-3

考察平面上一个以原点为圆心的圆周 C，在球面上对应的也是一个圆周 Γ(即纬线)，当圆周 C 的半径越来越大时，圆周 Γ 就越趋于北极 N. 因此，我们可以把北极 N 与平面上的一个模为无穷大的假想点相对应，这个假想点称为**无穷远点**，并记为 ∞. 无穷远点的辐角没有明确意义. 复平面加上 ∞ 点后，称为**扩充平面**(或**闭平面**，**全平面**)，与它所对应的就是整个球面，称为**复球面**，原来的复平面称为**开平面**.

讨论：

(1) 复平面上的无穷远点($z=\infty$)，只有一点，即当 $r\to\infty$ 时 $z=re^{i\theta}$ 的极限点(不论 θ 取何值)，所以 $z\to\infty$ 是指沿任意方向趋于 ∞.

(2) 无穷远点 ∞ 的运算与实变函数中的无穷大量 ∞ 的运算相似. 例如：

$a\pm\infty=\infty\pm a=\infty\ (a\neq\infty)$，$a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty\ (a\neq 0)$，

$\dfrac{a}{\infty}=0\ (a\neq\infty)$，$\dfrac{\infty}{a}=\infty\ (a\neq\infty)$，$\dfrac{a}{0}=\infty\ (a\neq 0)$，$\dfrac{0}{0}$ 仍为不定型.

注：在本书以后各处，所讲“复平面”指的是开平面，如涉及闭平面一定强调这个“闭”字。

§1.2　复变函数的基本概念

下面讨论复变数及复变函数问题. 复变函数的基本概念是实变函数基本概念的推广，因此我们所叙述的复变函数的概念、极限概念、函数连续与可微等概念与高等数学中的概念叙述相似.

与实变数一样，复变数也有自己的变化范围，经常遇到的变化范围为区域. 首先，我们讨论区域的有关概念.

1.区域与约当曲线

(1) 区域的概念

区域的定义：设有非空点集 D，如果满足：

① **开集性**：在 D 中的每一点 z，都必有以点 z 为圆心的一个充分小的圆全含于 D 内(即圆内的每点都是 D 内的点)；

② **连通性**：D 内任意两点都可以用一条由 D 内的点所构成的折线连接，则称 D 为**区域**(图 1-4).

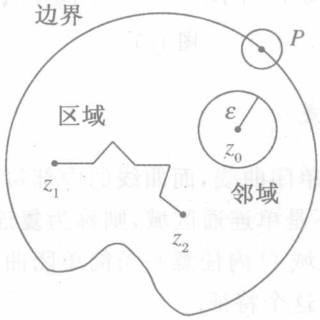


图 1-4

最简单的区域就是邻域，所谓**点 a 的 ε 邻域**，是指满足 $|z-a|<\varepsilon$ 的点所组成的集合，即以 a 为心，ε 为半径的圆的内部(图 1-4).

无穷远点的 ε 邻域定义为以原点为心的某圆周的外部，即 ∞ 的 ε 邻域是指合乎条件 $|z|>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 的点集.

(2) 界点、边界、闭区域

若点 P 不属于区域 D，但在 P 的任意邻域内总包含有 D 中的点，则点 P 叫做区域 D 的**界点**. D 的所有界点的集合叫做 D 的**边界**(图 1-4). 区域 D 与它的边界一起构成**闭区域**或**闭域**，用 $\overline{D}$ 表示. 无穷远点是开平面的界点，是闭平面的内点. 闭平面是唯一的无边界的区域.

(3) 简单曲线或约当曲线

如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个连续的实变函数，则方程组

$$x=x(t)\ ,\ y=y(t)\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \tag{1.16}$$

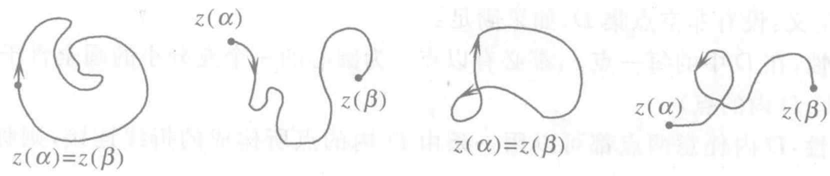
代表一条平面曲线，称为连续曲线，如果用

$$z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)(\text{或记为 } z=z(t),\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)) \tag{1.17}$$

来表示，这就是平面曲线的复数表示式. 如果在区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 具有连续导数，且 $(x'(t))^2+(y'(t))^2\neq 0$，则称曲线为**光滑曲线**. 若函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 具有分段连续导数，则曲线称为**分段光滑曲线**.

若曲线 $c:z=z(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 为一条连续曲线，$z(\alpha)$ 与 $z(\beta)$ 分别称为 c 的起点与终点. 对于 $t_1\neq t_2$，t_1 与 t_2 不同时是 $[\alpha,\beta]$ 的端点，有 $z(t_1)=z(t_2)$，则 $z(t_1)$ 称为曲线 c 的**重点**. 没有重点的连续曲线称为**简单曲线或约当曲线**. 如果简单曲线 c 的起点与终点重合，即 $z(\alpha)=z(\beta)$，则称曲线为**简单闭曲线或约当闭曲线**(图 1-5(a)). 分段光滑的简单闭曲线称为**围线**. 规定曲线段的方向为从起点到终点. 对于围线，当观察者绕围线环行时，如果研究的区域在观察者的左手方，这方向为正向，反之为负向.

因此，连续曲线有以下四种情况：



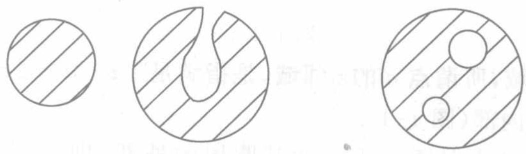
(a) 简单，闭　(b) 简单，不闭　(c) 不简单，闭　(d) 不简单，不闭

图 1-5

(4) 单连通域与复连通域

如果在区域 D 内任作一条简单闭曲线，而曲线的内部每一点都属于 D，则称 D 为**单连通区域**(图 1-6(a)). 如果一个区域不是单连通区域，则称为**复连通区域**(图 1-6(b)).

单连通区域的重要特征是：区域 D 内任意一条简单闭曲线，在 D 内可以经过连续的变形而缩成一点，而复连通区域不具有这个特征.



(a) 单连通区域　(b) 复连通区域

图 1-6

2. 复变函数的定义

设 D 为复数 $z=x+iy$ 的集合，如果对于集合 D 中的每一个复数 z，通过一定的对应规则 f，都有一个或几个复数 $w=u+iv$ 与之对应，则称 w 为 z 的**复变函数**，记为

$$w=f(z) \tag{1.18}$$

z 称为**自变量**(或**宗量**)，D 称为函数的**定义域**，而对应值 w 的全体所构成的复数集称为函数的**值域**. 如果 z 的一个值只有一个复数 w 与之对应，则称为**单值函数**；如果 z 的一个值有两个或两个以上的复数 w 与之对应，则称为**多值函数**.

把复变函数 $w=f(z)$ 的实部和虚部分别记作 $u(x,y)$，$v(x,y)$，则

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \tag{1.19}$$

这就是说，复变函数可以归结为一对二元实函数. 因此，实变函数论的许多定义、公式、定理都可以直接移植到复变函数论中，如复变函数的极限和连续性等.

如果要用图形描述 $w=f(z)$，可取两张复平面，分别称为 z 平面与 w 平面，而把复变函数