国家自然科学基金（10671214）
福建省自然科学基金（S0650024） 资助

上海市重点图书

ZHENGTI FINSLER JIHE

整体 Finsler 几何

吴炳烨 著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

国家自然科学基金(10671214)
福建省自然科学基金(S0650024) 资助

上 海 市 重 点 图 书

整体 Finsler 几何

吴炳烨 著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

Finsler 几何就是没有二次型限制的 Riemann 几何. 20 世纪末以来，在几何大师陈省身等人的大力倡导下，Finsler 几何越来越受到人们的重视，发展迅猛，并且已在控制论、相对论等方面得到应用. 本书介绍 Finsler 几何的基础知识与基本理论，并结合作者的研究成果介绍国内外的最新进展. 主要内容包括 Minkowski 空间，Finsler 流形，联络与曲率，测地线，Finsler 几何中的比较定理及 Finsler 子流形几何等.

本书理论体系完备，讲解深入浅出，可使具有 Riemann 几何基础的读者能在较短的时间内掌握 Finsler 几何基本理论并进入前沿研究领域.

本书可作为基础数学微分几何课程的研究生教材、本科高年级选修课教材或教学参考书，也可供相关研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

整体 Finsler 几何/吴炳烨著. —上海：同济大学出版社，2008. 3

ISBN 978-7-5608-3729-1

Ⅰ. 整…　Ⅱ. 吴…　Ⅲ. 整体几何—研究生—教材　Ⅳ. O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 195877 号

国家自然科学基金(10671214)、福建省自然科学基金(S0650024)资助　上海市重点图书

整体 Finsler 几何

吴炳烨　著

责任编辑　曹　建　　责任校对　徐春莲　　封面设计　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www. tongjipress. com. cn

(地址：上海市四平路 1239 号　邮编：200092　电话：021－65985622)

经　销　全国各地新华书店

印　刷　同济大学印刷厂

开　本　787mm×960mm　1/16

印　张　8.25

印　数　1—3100

字　数　165000

版　次　2008 年 3 月第 1 版　　2008 年 3 月第 1 次印刷

书　号　ISBN 978-7-5608-3729-1/O・313

定　价　20.00 元

前　言

Finsler 几何就是没有二次型限制的 Riemann 几何. B. Riemann 早在 1854 年的著名就职演说中就提出了后来所称的 Finsler 几何的概念. 他看到了度量的二次型情况(即通常的 Riemann 度量)与一般情况的区别，并选择前者为代表进行研究. 直到 1918 年，P. Finsler 才研究了一般度量情况下曲线与曲面的几何. 此后，人们习惯地把一般度量情况的几何称为 Finsler 几何. 20 世纪末以来，在几何大师陈省身等人的大力倡导下，Finsler 几何越来越受到人们的重视，发展迅猛，并且已在控制论、相对论等方面得到应用.

本书围绕 Finsler 几何中作者工作过的几个方面展开有关的理论，介绍这些方面的基础理论、主要定理与方法，并反映作者本人的研究成果. 本书的内容可分为两部分. 前三章是 Finsler 几何的基本理论，主要包括 Minkowski 空间，Finsler 流形，联络与曲率，测地线与 Jacobi 场等，它们是研究整体 Finsler 几何的基础. 后三章结合作者本人的研究兴趣，介绍了 Finsler 几何中的比较定理，Finsler 流形的刚性性质以及 Finsler 子流形几何等方面的研究近况与最新进展.

本书写作目的是帮助具有 Riemann 几何基础的读者能在较短的时间内掌握 Finsler 几何基本理论并进入前沿研究领域. 限于作者的学术水平，书中难免有不少欠妥甚至错误之处，恳请读者批评指正.

在此，要特别感谢沈一兵教授和忻元龙教授多年来对作者的辛勤培养与大力支持，也要感谢作者在学习与研究 Finsler 几何过程中的几位良师益友，他们是：沈忠民教授、莫小欢教授与程新跃教授. 本书部分书稿及书样校对是作者访问美国 Notre Dame 大学期间完成的，在此对 Pit-Mann Wong 教授表示衷心感谢.

最后，对同济大学出版社的大力支持谨致深切谢意. 本书出版得到国家自然科学基金(批准号：10671214)与福建省自然科学基金(批准号：S0650024)的部分资助，在此一并致谢.

吴炳烨

2008 年 1 月

目　次

1 Minkowski 空间

Finsler 几何就是没有二次型限制的 Riemann 几何，Finsler 流形在每一点处的切空间是 Minkowski 空间．本章将介绍 Minkowski 空间的定义、基本例子以及基本几何量，它们是研究 Finsler 流形的基础．

1.1 Minkowski 空间的定义与例子

在给出 Minkowski 空间的定义之前，首先讨论 n 维实数空间 $\mathbb{R}^n$ 上齐次函数的一个非常有用的性质．称 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的**正齐 s 次函数**，若对任意 $y\in\mathbb{R}^n$，$\lambda>0$，有 $f(\lambda y)=\lambda^s f(y)$．下列引理在 Finsler 几何的研究中非常有用．

引理 1.1（Euler 引理）　设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的正齐 s 次函数，则 $f_{y^i}(y)y^i=sf(y)$，这里 f_{y^i} 表示 f 关于 y^i 的偏导数．

证明　在 $f(\lambda y)=\lambda^s f(y)$ 两边对 λ 求导，得 $f_{y^i}(\lambda y)y^i=s\lambda^{s-1}f(y)$．令 $\lambda=1$ 即可得定理的结论．

下面给出 Minkowski 空间的定义．设 V 为一 n 维向量空间．称 V 上函数 $F=F(y)$ 为 V 上的 **Minkowski 范数**，如果它满足下列条件：

(1) 对任意 $y\in V$，$F(y)\geqslant 0$，并且 $F(y)=0$ 当且仅当 $y=0$；

(2) F 是 V 上正齐 1 次函数，即对任意 $y\in V$ 及 $\lambda>0$，$F(\lambda y)=\lambda F(y)$；

(3) F 在 $V\backslash\{0\}$ 上是 C^∞ 的，且对 $y\in V\backslash\{0\}$，由下式定义的 V 上双线性对称形式 $\boldsymbol{g}_y$ 是一内积：

$$\boldsymbol{g}_y(u,v):=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\left[F^2(y+su+tv)\right]_{s=t=0}.$$

这时，称 (V,F) 为 **Minkowski 空间**，$\boldsymbol{g}_y$ **为关于 y 的基本形式**．如果对任意 $y\in V$ 有 $F(y)=F(-y)$，则称 (V,F) 或 F 是**可反的**(reversible)．

设 (V,F) 为一 Minkowski 空间．设

$$S_F=\{y\in V\mid F(y)=1\}.$$

S_F 是 V 包含原点的闭超曲面，它与标准球面 $\mathbb{S}^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ 微分同胚．称 S_F 为 (V,F) 的**单位球面**．取定 V 的一个基 $\{\boldsymbol{b}_i\}$，将 $F(y)=F(y^i\boldsymbol{b}_i)$ 看作 $(y^i)\in\mathbb{R}^n$ 的函数，这里使用了 Einstein 求和约定，即上下指标重复即意味着在各自的范围内求

和. 对 $y \neq 0$,令

$$g_{ij}(y) := \boldsymbol{g}_y(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) = \frac{1}{2}[F^2]_{y^i y^j}(y) = F_{y^i}(y) F_{y^j}(y) + F(y) F_{y^i y^j}(y). \tag{1.1}$$

则有

$$\boldsymbol{g}_y(u, v) = g_{ij}(y) u^i v^j, \quad u = u^i \boldsymbol{b}_i, \quad v = v^i \boldsymbol{b}_i. \tag{1.2}$$

由于 Minkowski 范数是正齐 1 次函数,由 Euler 引理得

$$F(y) = \sqrt{g_{ij}(y) y^i y^j}, \quad y = y^i \boldsymbol{b}_i.$$

当(V,F) 可反时,易知 $g_{ij}(y) = g_{ij}(-y)$,从而 $\boldsymbol{g}_y(u,v) = \boldsymbol{g}_{-y}(u,v)$.

对任意 $y \neq 0$,V 有下面的直和分解:

$$V = \mathbb{R} \cdot y \oplus W_y,$$

其中,W_y 是 $\mathbb{R} \cdot y$ 在 V 中关于内积 $\boldsymbol{g}_y$ 的正交补,即

$$W_y = \{w \in V \mid \boldsymbol{g}_y(y, w) = 0\} \subset V.$$

设

$$\boldsymbol{h}_y(u, v) := \boldsymbol{g}_y(u, v) - \frac{1}{F^2(y)} \boldsymbol{g}_y(y, u) \boldsymbol{g}_y(y, v).$$

称 $\boldsymbol{h}_y$ 为关于 $\boldsymbol{y}$ 的角形式(angular form),它在给定基下的分量是

$$h_{ij}(y) := \boldsymbol{h}_y(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) = g_{ij} - \frac{1}{F^2} g_{ip} y^p g_{jq} y^q = F F_{y^i y^j}.$$

显然,$\boldsymbol{h}_y(y, u) = 0, \forall u \in V$,并且对 $u = w + \lambda y \in V$,其中 $w \in W_y$,有

$$\boldsymbol{h}_y(u, u) = \boldsymbol{g}_y(w, w) \geqslant 0,$$

且等号成立当且仅当 $u = \lambda y$. 因此 $\boldsymbol{h}_y$ 在 V 上半正定,而在 W_y 上正定.

下面证明 Minkowski 空间的两个基本不等式.

引理 1.2 设(V,F) 是 Minkowski 空间,则

(1) F 满足

$$F(u + v) \leqslant F(u) + F(v), \quad u, v \in V, \tag{1.3}$$

且等号成立当且仅当 $u = 0$ 或存在 $\lambda \geqslant 0$ 使 $v = \lambda u$;

(2) Cauchy-Schwarz 不等式. 设 $y \neq 0$,则对任意 $u \in V$,有

$$\boldsymbol{g}_y(y, u) \leqslant F(y) F(u), \tag{1.4}$$

且等号成立当且仅当存在 $\lambda \geqslant 0$ 使得 $u = \lambda y$.

证明 先证(1). 不妨设 $u,v \in V\backslash\{0\}$. 若 u,v 线性无关,令 $y(t) = tu + (1-t)v$, 则 $y(t) \neq 0, t \in [0,1]$. 考虑函数 $\varphi(t) = F(y(t))$,则

$$\varphi''(t) = F_{y^i y^j}(y(t))(u^i - v^i)(u^j - v^j) = \frac{1}{F(y(t))}\boldsymbol{h}_{y(t)}(u-v, u-v) > 0,$$

这里不取等号是因为 u,v 线性无关的缘故. 因此,$\varphi = \varphi(t)$ 是严格凸函数. 由凸函数的性质知

$$2\varphi\left(\frac{1}{2}\right) < \varphi(0) + \varphi(1),$$

即

$$F(u+v) < F(u) + F(v).$$

若 u,v 线性相关,则存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使 $v = \lambda u$. 当 $1+\lambda \geqslant 0$ 时,

$$F(u+v) = F((1+\lambda)u) = (1+\lambda)F(u) \leqslant F(u) + F(\lambda u) = F(u) + F(v),$$

且等号成立当且仅当 $\lambda \geqslant 0$. 当 $1+\lambda < 0$ 时,

$$\begin{aligned} F(u+v) &= F(-(1+\lambda)(-u)) = -(1+\lambda)F(-u) \\ &= -F(-u) + F(\lambda u) < F(u) + F(v), \end{aligned}$$

因此(1)得证.

下证(2). 对 $w \in W_y$,令 $\varphi(t) = F^2(y+tw)$,那么,由式(1.1),式(1.2)及 Euler 引理得

$$\varphi'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[F^2(y+tw)]|_{t=0} = 2F(y)F_{y^i}(y)w^i = 2\boldsymbol{g}_y(y,w) = 0,$$

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= 2[F_{y^i}(y+tw)w^i]^2 + 2F(y+tw)F_{y^i y^j}(y+tw)w^i w^j \\ &= 2\boldsymbol{g}_{y+tw}(w,w) \geqslant 0, \end{aligned}$$

上式中等号成立当且仅当 $w = 0$. 由此易知,$\varphi(0) \leqslant \varphi(t)$, $\forall\, t \neq 0$,等号成立当且仅当 $w = 0$. 特别地,有

$$F(y) \leqslant F(y+w), \quad w \in W_y, \tag{1.5}$$

等号成立当且仅当 $w = 0$. 对任意 $u \in V$,设 $u = \lambda y + w$,其中 $\lambda \in \mathbb{R}$, $w \in W_y$. 我们有

$$\boldsymbol{g}_y(y,u) = \lambda \boldsymbol{g}_y(y,y) = \lambda F^2(y). \tag{1.6}$$

若 $\lambda \leqslant 0$,则由式(1.6)知式(1.4)成立,且等号成立当且仅当 $\lambda = 0$ 与 $u = 0$. 若 $\lambda > 0$,由式(1.5)与式(1.6)得

$$\boldsymbol{g}_y(y,u) = \lambda F(y)F(y) \leqslant \lambda F\left(y + \frac{1}{\lambda}w\right)F(y) = F(u)F(y).$$

等号成立当且仅当 $w = 0$,即 $u = \lambda y, \lambda \geqslant 0$,引理证完.

由式(1.3)可知,当 F 可反时,它是向量空间 V 上在通常意义下的范数. 另外,容易证明,当 (V,F) 可反时,式(1.4)可改写为

$$|\boldsymbol{g}_y(y,u)| \leqslant F(y)F(u), \tag{1.4$'$}$$

但是式(1.4)$'$ 对一般的 Minkowski 空间不一定成立,见下面的例 1.4.

下面给出几个重要的 Minkowski 空间的例子.

例 1.3 设 $\langle , \rangle$ 是向量空间 V 上的一个内积,$\{\boldsymbol{b}_i\}$ 是 V 的任一基. 令

$$\alpha = \sqrt{\langle y,y \rangle} = \sqrt{a_{ij}y^i y^j}, \quad y = y^i \boldsymbol{b}_i,$$

其中 $a_{ij} = \langle \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j \rangle$. 显然,$\alpha$ 是 V 上的 Minkowski 范数,并且 $\boldsymbol{g}_y(u,v) = \langle u,v \rangle$ 与 $y \in V$ 无关. 称 α 为 **Euclid 范数**,(V,α) 为 **Euclid 空间**. 如所周知,具有相同维数的 Euclid 空间相互等距同构. $\mathbb{R}^n$ 上的标准 Euclid 范数 $|\cdot|$ 是

$$|y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y^i)^2}, \quad y = (y^i) \in \mathbb{R}^n.$$

例 1.4 设 $\alpha = \sqrt{\langle y,y \rangle} = \sqrt{a_{ij}y^i y^j}$ 为向量空间 V 上的 Euclid 范数,$\beta = b_i y^i \in V^*$ 为 V 上的线性泛函. 令

$$F(y) = \alpha(y) + \beta(y). \tag{1.7}$$

直接计算可得

$$g_{ij} = \frac{F}{\alpha}\left\{a_{ij} - \frac{y_i}{\alpha}\frac{y_j}{\alpha} + \frac{\alpha}{F}\left(b_i + \frac{y_i}{\alpha}\right)\left(b_j + \frac{y_j}{\alpha}\right)\right\}, \tag{1.8}$$

$$\det(g_{ij}) = \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)^{n+1} \det(a_{ij}), \tag{1.9}$$

其中,$y_i = a_{ik}y^k$. 令

$$\|\beta\|_\alpha := \sup_{y \in V \setminus \{0\}} \frac{\beta(y)}{\alpha(y)} = \sup_{\alpha(y)=1} \beta(y),$$

则由求条件极值的 Lagrange 乘子法易知 $\|\beta\|_\alpha = \sqrt{a^{ij}b_i b_j}$,其中 $(a^{ij}) = (a_{ij})^{-1}$. 由式(1.9)易知,(g_{ij}) 是正定矩阵当且仅当 $\|\beta\|_\alpha < 1$. 因此,当且仅当 $\|\beta\|_\alpha$

<1 时，F 是 V 上的 Minkowski 范数，我们称它是 V 上的 **Randers 范数**. 当 $\beta\neq 0$ 时，Randers 范数是非 Euclid 范数，它是不可反的.

考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的 Randers 范数 $F(y)=|y|+by^1, 0<b<1$. 特别地，取 $y=(1,0,\cdots,0)=-u$，则 $F(y)=1+b, F(u)=1-b$，且由式(1.8)可知 $g_y(y,u)=-(1+b)^2$. 于是 $|g_y(y,u)|=(1+b)^2>(1+b)(1-b)=F(y)F(u)$，即式(1.4)$'$ 不成立.

例 1.5 考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 上函数

$$F(y)=((y^1)^4+3c(y^1)^2(y^2)^2+(y^2)^4)^{\frac{1}{4}},\quad y=(y^1,y^2)\in\mathbb{R}^2.$$

直接计算得

$$g_{11}:=\frac{1}{2}(F^2)_{y^1y^1}=\frac{2(y^1)^6+9c(y^1)^4(y^2)^2+6(y^1)^2(y^2)^4+3c(y^2)^6}{2F^6},$$

$$g_{12}:=\frac{1}{2}(F^2)_{y^1y^2}=\frac{(9c^2-4)(y^1)^3(y^2)^3}{2F^6}=g_{21},$$

$$g_{22}:=\frac{1}{2}(F^2)_{y^2y^2}=\frac{3c(y^1)^6+6(y^1)^4(y^2)^2+9c(y^1)^2(y^2)^4+2(y^2)^6}{2F^6},$$

$$\det(g_{ij})=g_{11}g_{22}-(g_{12})^2=\frac{3(2c(y^1)^4+(4-3c^2)(y^1)^2(y^2)^2+2c(y^2)^4)}{4F^4}.$$

显然，$g_{11}>0$ 及 $g_{22}>0$ 当且仅当 $c>0$. 现假定 $c>0$，考虑 $\det(g_{ij})$ 的符号，得

$$\begin{aligned}&2c(y^1)^4+(4-3c^2)(y^1)^2(y^2)^2+2c(y^2)^4\\&\quad=2c((y^1)^4+2\delta(y^1)^2(y^2)^2+(y^2)^4),\end{aligned}$$

其中 $\delta:=(4-3c^2)/(4c)$. 上述多项式对任意 $y\neq 0$ 是正的当且仅当 $\delta>-1$，而显然 $\delta>-1$ 当且仅当 $c<2$. 综上所述，F 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 Minkowski 范数当且仅当 $0<c<2$，此时 F 是可反的.

例 1.6 设 (V,Φ) 为 Minkowski 空间，$v\in V$ 满足 $\Phi(-v)<1$. 则闭超曲面 $S_\Phi+\{v\}=\{y+v\mid y\in S_\Phi\}$ 仍包含 V 的原点. 定义 $F:V\to[0,\infty)$ 如下：对任意 $y\in V\backslash\{0\}$，$F(y)$ 等于满足如下条件的唯一正数 t：

$$\frac{y}{t}\in S_\Phi+\{v\}.$$

再补充定义 $F(0)=0$. 容易验证 F 满足 Minkowski 范数定义中的性质(1)与(2)，并且 $S_F=S_\Phi+\{v\}$. 由此可知 F 由下面方程确定：

$$F(y)=\Phi(y-F(y)v). \tag{1.10}$$

取定 V 的一个基 $\{\boldsymbol{b}_i\}$，将 $F(y)=F(y^i\boldsymbol{b}_i)$ 看作 $(y^i)\in\mathbb{R}^n$ 的函数. 设 $g_{ij}{}^F(y)=\frac{1}{2}[F^2]_{y^iy^j}(y)$，则利用式(1.10)可以证明 (g_{ij}^F) 是正定矩阵(证明留给读者)，即 F 满足 Minkowski 范数定义中的性质(3)，从而 F 也是 Minkowski 范数，我们称它为**由 (Φ,v) 生成的 Minkowski 范数**. 容易验证，若 $F=F(y)$ 由 (Φ,v) 生成，则 $\Phi=\Phi(y)$ 由 $(F,-v)$ 生成.

1.2 Legendre 变换

设 (V,F) 为 Minkowski 空间，$\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ 为 V 的任一基. 设 V^* 为 V 的对偶空间，$\theta^1,\cdots,\theta^n$ 为其对偶基. V 到 V^* 的 **Legendre 变换** $l:V\to V^*$ 定义是

$$l(y):=\begin{cases}\boldsymbol{g}_y(y,\cdot)\in V^*, & \forall\, y\in V\backslash\{0\};\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

从定义易知 Legendre 变换在给定基下的表达式是

$$l(y)=g_{ij}(y)y^j\theta^i,\quad y=y^i\boldsymbol{b}_i\in V\backslash\{0\}. \tag{1.11}$$

对任意 $\xi\in V^*$，定义

$$F^*(\xi):=\sup_{y\in V\backslash\{0\}}\frac{\xi(y)}{F(y)}=\sup_{y\in S_F}\xi(y). \tag{1.12}$$

易知它满足

$$F^*(\lambda\xi)=\lambda F^*(\xi),\quad F^*(\xi+\eta)\leqslant F^*(\xi)+F^*(\eta),\quad \xi,\eta\in V^*,\quad \lambda>0.$$

称 F^* 为 F 的**对偶范数**. 关于 Legendre 变换有以下性质：

引理 1.7 Legendre 变换 $l:V\backslash\{0\}\to V^*\backslash\{0\}$ 是 $V\backslash\{0\}$ 到 $V^*\backslash\{0\}$ 上的光滑微分同胚，并且对任意 $y\in V\backslash\{0\}$，余向量 $\xi=l(y)=\boldsymbol{g}_y(y,\cdot)\in V^*$ 满足

$$F(y)=F^*(\xi)=\frac{\xi(y)}{F(y)}. \tag{1.13}$$

证明 从 Legendre 变换的表达式(1.11)知它是 $V\backslash\{0\}$ 到 $V^*\backslash\{0\}$ 中的光滑映射，要证明它是光滑微分同胚，只需证明它既是单射又是满射. 假设存在 y，$u\in V\backslash\{0\}$ 使 $l(y)=l(u)$，即

$$\boldsymbol{g}_y(y,w)=\boldsymbol{g}_u(u,w),\quad \forall\, w\in V.$$

取 $w=u$ 得

$$F^2(u)=\boldsymbol{g}_u(u,u)=\boldsymbol{g}_y(y,u)\leqslant F(y)F(u),$$

因此，

$$F(u) \leqslant F(y).$$

同理，

$$F(y) \leqslant F(u).$$

所以，$F(y)=F(u)$，并且

$$\boldsymbol{g}_y(y,u)=F^2(u)=F(y)F(u).$$

由引理 1.2(2) 知 $y=u$，这证明 l 是单射. 下证 l 也是满射. 任取 $\xi \in V^*\setminus\{0\}$，注意到 $S_F=\{y\in V \mid F(y)=1\}$ 是 V 的紧致无边界超曲面，必存在 $u \in S_F$ 使得

$$\xi(u)=F^*(\xi)=\sup_{y\in S_F}\xi(y).$$

令 $y=\xi(u)u$，则

$$F(y)=\xi(u)=F^*(\xi)=\frac{\xi(y)}{F(y)}.$$

若能证明 $\xi=l(y)$，则 l 是满射，且上式就是式(1.13). 下证 $\xi=l(y)$，即证

$$\xi(v)=\boldsymbol{g}_y(y,v),\quad \forall v\in V.$$

对 $t\in\mathbb{R}$，当 $y+tv\neq 0$ 时，

$$\xi\Big(\frac{y+tv}{F(y+tv)}\Big)\leqslant F^*(\xi)=\xi(u),$$

从而

$$\xi(y+tv)\leqslant F(y+tv)\xi(u).$$

当 $y+tv=0$ 时，上式显然成立，且从 y 的定义知当 $t=0$ 时，上式取等号. 因此，函数 $f=f(t)=\xi(y+tv)-F(y+tv)\xi(u)\leqslant 0$，且 f 在 $t=0$ 处达到极大值. 由式(1.1) 及 Euler 引理知

$$\boldsymbol{g}_y(y,v)=g_{ij}(y)y^iv^j=F(y)F_{y^i}(y)v^i,$$

由极大值原理得

$$0=f'(0)=\xi(v)-F_{y^i}(y)v^i\xi(u)=\xi(v)-\boldsymbol{g}_y(y,v),$$

引理获证.

引理 1.8 向量空间 V 上任一 Minkowski 范数的对偶范数 F^* 是 V^* 上的

Minkowski 范数,并且对 $\xi = l(y)$,有

$$g^{*ij}(\xi) := \frac{1}{2}[F^{*2}]_{\xi_i\xi_j}(\xi) = g^{ij}(y), \tag{1.14}$$

其中,$(g^{ij}(y)) = (g_{ij}(y))^{-1}$.

证明 显然 F^* 满足 Minkowski 范数定义中的条件(1) 与(2). 由于 $(g^{ij}(y))$ 是正定矩阵,要证引理,只需证明式(1.14) 成立. 写

$$\xi = \xi_i\theta^i = l(y) = l(y^i \boldsymbol{b}_i),$$

则由式(1.11) 得 $\xi_i = g_{ij}y^j$,从而

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial y^j}(y) = g_{ij}(y).$$

从式(1.13) 得 $F^2(y) = F^{*2}(\xi)$,两边关于 y^i 求偏导数,结合上式得

$$[F^2]_{y^i}(y) = [F^{*2}]_{\xi_k}(\xi)g_{ki}(y). \tag{1.15}$$

结合 Euler 引理知

$$g^{*kl}(\xi)\xi_l = \frac{1}{2}[F^{*2}]_{\xi_k}(\xi) = \frac{1}{2}g^{ik}(y)[F^2]_{y^i}(y) = y^k,$$

从而

$$g^{*kl}(\xi)\xi_l \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} = y^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} = y^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = 0.$$

对式(1.15) 关于 y^j 求偏导数,最终有

$$\begin{aligned} g_{ij}(y) = \frac{1}{2}[F^2]_{y^iy^j}(y) &= \frac{1}{2}[F^{*2}]_{\xi_k\xi_l}(\xi)g_{ik}(y)g_{jl}(y) + \frac{1}{2}[F^{*2}]_{\xi_k}(\xi)\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j}(y) \\ &= g^{*kl}(\xi)g_{ik}(y)g_{jl}(y) + g^{*kl}(\xi)\xi_l\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j}(y) = g^{*kl}(\xi)g_{ik}(y)g_{jl}(y), \end{aligned}$$

由此即知式(1.14) 成立.

由上讨论知 Legendre 变换 $l:(V,F) \to (V^*,F^*)$ 是保范映射. 对 $\xi \in V^*\backslash\{0\}$,设 $\boldsymbol{g}^{*\xi}$ 为 V^* 关于 ξ 的基本形式,则有

$$\boldsymbol{g}^{*\xi}(\zeta,\eta) = g^{*ij}(\xi)\zeta_i\eta_j, \quad \zeta = \zeta_i\theta^i, \quad \eta = \eta_i\theta^i.$$

由式(1.11) 及引理 1.8 易知 $y = l^{-1}(\xi)$ 由下式确定:

$$\zeta(y) = \boldsymbol{g}^{*\xi}(\xi,\zeta), \quad \forall\, \zeta \in V^*, \tag{1.16}$$

即

$$y = l^{-1}(\xi) = y^k \boldsymbol{b}_k = g^{*kl}(\xi)\xi_l \boldsymbol{b}_k. \tag{1.17}$$

我们可类似定义 Legendre 变换 $l^*: V^* \to V^{**}$ 及 V^{**} 上的 Minkowski 范数 F^{**}. 对任一 $y \in V$,令 $y^{**}(\xi) = \xi(y)$, $\forall \xi \in V^*$,则 $y^{**} \in V^{**}$. 将 y 与 y^{**} 视为等同,则 $V = V^{**}$. 在这样的观点下,易知 $l^{-1} = l^*$, $F = F^{**}$.

例 1.9 考虑向量空间 V 上的 Randers 范数 $F = \alpha + \beta$,其中 α 是 Euclid 范数,β 是 V 上的线性泛函,满足 $\|\beta\|_\alpha = \sup_{\alpha(y)=1}\beta(y) < 1$. 设 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ 为 V 的基,$\theta_1, \cdots, \theta_n$ 为其对偶基. 设

$$\alpha(y) = \sqrt{a_{ij}y^i y^j}, \quad \beta(y) = b_i y^i, \quad y = y^i \boldsymbol{b}_i.$$

则 $\|\beta\|_\alpha = \sqrt{a^{ij}b_i b_j}$,其中 $(a^{ij}) = (a_{ij})^{-1}$. 用求条件极值的 Lagrange 乘子法易证,V^* 上对偶 Randers 范数 F^* 仍然是 Randers 范数,即 $F^* = \alpha^* + \beta^*$. 这里 V^* 上的 Euclid 范数 α^* 与线性泛函 β^* 可表示成

$$\alpha^*(\xi) = \sqrt{a^{*ij}\xi_i \xi_j}, \quad \beta^*(\xi) = b^{*i}\xi_i, \quad \xi = \xi_i \theta^i,$$

其中

$$a^{*ij} = \frac{(1 - \|\beta\|_\alpha^2)a^{ij} + b^i b^j}{(1 - \|\beta\|_\alpha^2)^2},$$

$$b^{*i} = -\frac{b^i}{1 - \|\beta\|_\alpha^2},$$

这里 $b^i := a^{ij}b_j$. 设 $(a_{*ij}) = (a^{*ij})^{-1}$,则有

$$a_{*ij} = (1 - \|\beta\|_\alpha^2)(a_{ij} - b_i b_j).$$

从而 $\|\beta^*\|_{\alpha^*} := \sup_{\alpha^*(\xi)=1}\beta^*(\xi)$ 满足

$$\|\beta^*\|_{\alpha^*}^2 = a_{*ij}b^{*i}b^{*j} = \frac{1}{1 - \|\beta\|_\alpha^2}(a_{ij} - b_i b_j)b^i b^j = \|\beta\|^2.$$

这说明 β 及 β^* 关于 α 及 α^* 的长度是相等的. 由式(1.8)与式(1.11)可知,Legendre 变换 $l: V \to V^*$ 由下式确定:

$$\xi = l(y) = g_{ij}(y)y^j\theta^i = F(y)\left(\frac{a_{ij}y^j}{\alpha(y)} + b_i\right)\theta^i,$$

而逆变换是

$$y = l^{-1}(\xi) = g^{*kl}(\xi)\xi_l \boldsymbol{b}_k = F^*(\xi)\left(\frac{a^{*kl}\xi_l}{\alpha^*(\xi)} + b^{*k}\right)\boldsymbol{b}_k.$$

1.3 度量结构与体积形式

设(V,F)为一n维 Minkowski 空间. 对任意$u,v\in V$,令$d(u,v)=F(v-u)$,由 Minkowski 范数的性质知$d:V\times V\to\mathbb{R}$满足以下性质:

(1) 正定性. $d(u,v)\geqslant 0,\forall u,v\in V$,并且$d(u,v)=0$当且仅当$u=v$.

(2) 三角不等式. $d(u,v)\leqslant d(u,w)+d(w,v),\forall u,v,w\in V$.

称d为(V,F)上的**距离函数**. 必须注意的是,这里的距离函数一般不满足以下的对称性:

(3) 对称性. $d(u,v)=d(v,u),\forall u,v\in V$.

只有当F是可反时,d才满足上述对称性,此时d是通常意义下的距离函数.

除了距离概念以外,体积是另一重要的几何概念,而计算体积需先确定体积形式. 如所周知,对于定向向量空间上的 Euclid 范数,存在标准的体积形式. 设$\langle,\rangle$是向量空间V上的一个内积,它确定V上的一个 Euclid 范数α. 设$\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n$是向量空间$V$的任一定向基,$\theta_1,\cdots,\theta_n$为其对偶基. 则$V$上**Euclid 体积形式**$\mathrm{d}V_\alpha$的定义是

$$\mathrm{d}V_\alpha=\sqrt{\det(a_{ij})}\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_n,$$

其中$a_{ij}=\langle\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{b}_j\rangle$. 易知 Euclid 体积形式与定向基的选取无关. 设$\mathcal{U}\subset V$是V中任一紧致区域,则它**关于$\boldsymbol{\alpha}$的(Euclid)体积**$\mathrm{vol}_\alpha(\mathcal{U})$(或$\mathrm{vol}(\mathcal{U})$)是

$$\mathrm{vol}_\alpha(\mathcal{U})=\int_{\mathcal{U}}\mathrm{d}V_\alpha.$$

设$\boldsymbol{b}=\{\boldsymbol{b}_i\}_{i=1}^n$为$V$的一个定向基,$\theta=\{\theta^i\}_{i=1}^n$为$V^*$上的对偶基. 记$\boldsymbol{F}$及$\boldsymbol{B}$分别为$V$上所有 Minkowski 范数的全体及定向基的全体所构成的集合. 设$(\widetilde{V},\widetilde{F})$为另一$m$维 Minkowski 空间,这里$m\geqslant n$. 称$\boldsymbol{F}$**为由$\widetilde{\boldsymbol{F}}$诱导**,如果存在基$\widetilde{\boldsymbol{b}}=\{\widetilde{\boldsymbol{b}}_\alpha\}_{\alpha=1}^m$及$z=(z_i^\alpha)\in GL(n,m)$使$F(\boldsymbol{b}_i)=\widetilde{F}(z_i^\alpha\widetilde{\boldsymbol{b}}_\alpha)$,这里$GL(n,m)$是由$n\times m$满秩矩阵组成的集合. 要定义 Minkowski 空间V上一般的 Finsler 体积元,我们自然要求相应的体积形式在(V,F)上是有意义的(即与基选取无关),并且当F是 Euclid 范数时,它就是通常的 Euclid 体积形式. 另外,为便于计算,它还应满足一定的可微条件. 这就引出下面的定义[31].

设$\sigma:\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{B}\to\mathbb{R}$为满足下列条件的映射:

(1) 对任意$F\in\boldsymbol{F}$及$\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{B}$,有$\sigma(F,\boldsymbol{b})>0$;

(2) 对任意$Q\in GL(n,n)$,$\sigma(F,Q\boldsymbol{b})=\det(Q)\sigma(F,\boldsymbol{b})$;

(3) 若F是 Euclid 范数,即$F(y)=\sqrt{\langle y,y\rangle},\forall y\in V$,则$\sigma(F,\boldsymbol{b})=$

$\sqrt{\det(\langle \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j\rangle)}$；

(4) 若 $F \in \boldsymbol{F}$ 由 $\widetilde{V}$ 上的 $\widetilde{F}$ 所诱导，即存在 $z \in GL(n,m)$ 使 $F(\boldsymbol{b}_i) = \widetilde{F}(z_i{}^{a}\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_a)$，那么 $\sigma(F,\boldsymbol{b})$ 关于 $z = (z_i^a)$ 是可微的.

则 n 次形式 $\mathrm{d}V_F^\sigma = \sigma(F,\boldsymbol{b})\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n$ 在 V 上是有意义的，称 σ 为 **Finsler 体积元**，而称 $\mathrm{d}V_F^\sigma$ 为 (V,F) **上由 σ 确定的 Finsler 体积形式**. 设 $\mathcal{U} \subset V$ 是 V 中任一紧致区域，则它**关于体积元 σ 的体积** $\mathrm{vol}_F^\sigma(\mathcal{U})$ 是

$$\mathrm{vol}_F^\sigma(\mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} \mathrm{d}V_F^\sigma.$$

应该指出的是，更一般的体积形式已在文献[24]中考虑，它实际上是正则的 Haar 测度，而与 Minkowski 范数无关. 在这里我们强调了 σ 与 F 之间的关系.

下面我们给出标准的例子. 设 $\mathbb{B}^n(1)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中标准的单位球体. (V,F) 上的 **Busemann-Hausdorff 体积形式**定义为 $\mathrm{d}V_F^{\sigma_{BH}} = \sigma_{BH}(F,\boldsymbol{b})\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n$，其中体积元 σ_{BH} 的定义是

$$\sigma_{BH}(F,\boldsymbol{b}) = \frac{\mathrm{vol}(\mathbb{B}^n(1))}{\mathrm{vol}\{(y^i) \in \mathbb{R}^n : F(y^i\boldsymbol{b}_i) \leqslant 1\}}, \tag{1.18}$$

这里 vol 表示 Euclid 体积. 设 $B_F = \{y \in V : F(y) < 1\}$，则由式(1.18)易知

$$\mathrm{vol}_F^{\sigma_{BH}}(B_F) = \mathrm{vol}(\mathbb{B}^n(1)). \tag{1.19}$$

对一般的 Minkowski 范数，Busemann-Hausdorff 体积形式不能由范数显式表示. 但对 Randers 范数，我们能计算其 Busemann-Hausdorff 体积形式. 设 $F = \alpha + \beta$ 是 n 维向量空间 V 上的 Randers 范数. 为方便计，取 V 关于 $\langle , \rangle$ 的标准正交基 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$，使 $\beta = by^n$，其中 $b = \|\beta\|_\alpha$. 它的对偶基设为 $\theta_1, \cdots, \theta_n$. 则 $a_{ij} = \delta_{ij}$，从而 $\mathrm{d}V_\alpha = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n$. 另一方面，

$$\begin{aligned}\Omega_F := \{(y^i) \in \mathbb{R}^n : F(y^i\boldsymbol{b}_i) \leqslant 1\} &= \{(y^i) \in \mathbb{R}^n : \sqrt{(y^1)^2 + \cdots + (y^n)^2} + by^n \leqslant 1\} \\ &= \left\{(y^i) \in \mathbb{R}^n : (y^1)^2 + \cdots + (y^{n-1})^2 + (1-b^2)\left(y^n + \frac{b}{1-b^2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{1-b^2}\right\}.\end{aligned}$$

作变换 $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (y^i) \mapsto (\bar{y}^i)$，使

$$\bar{y}^1 = y^1,$$

$$\cdots$$

$$\bar{y}^{n-1} = y^{n-1},$$

$$\bar{y}^n = \sqrt{1-b^2}\left(y^n + \frac{b}{1-b^2}\right).$$