中学数学解题方法500招丛书

ZHONGXUESHUXUEJIETIFANGFAWULINGLINGZHAOCONGSHU

复数与三角

编写组 编

哈尔滨出版社

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta \pm \alpha)$$

500

招

责任编辑：刘培杰

ISBN 7-80557-795-1

9 787805 577951 >

$ 34.00

ISBN 7-80557-795-1
G·176 定价：8.50 元

· 中学数学解题方法500招丛书 ·

复数与三角

本书编写组

主编　佩　捷　　副主编　骆　明　胡远杰

哈尔滨出版社

(黑)新登字 12 号

书　　名:复数与三角
主　　编:佩　捷
选题策划:刘培杰
责任编辑:刘培杰
封面设计:卞秉利
插图绘制:董　欣
版式设计:刘培杰
校　　对:骆　明
出版发行:哈尔滨出版社
经　　销:全国各地新华书店
激光照排:哈尔滨出版社排版中心
印　　刷:哈尔滨工业大学印刷厂

开本:850×1168mm　1/32　印张:11.5　字数:283 千字
1995 年 5 月第 1 版　1995 年 5 月第 1 次印刷　印数:1—10,000
ISBN7－80557－795－1/G·176　定价:8.50 元

●《中学数学解题
方法500招丛书》●

总 序

刘培杰

俗话说："自古华山一条路"，如果将学数学比做爬山，那么精通之道也只有一条，那就是作题，作大量的习题。

华罗庚曾将光看书不作习题比做"入宝山而空返"。

著名数学家苏步青教授读书时为学好微积分，光是不定积分题就作了近万道。近年来，参加国际中学生数学奥林匹克的中国选手们，则更是因为遍解难题，才得以屡获金牌。正所谓"踏遍坎坷成大路"。

然而解数学题却不是一件容易的事，世界级解题专家、美国数学教育家波利亚曾不无悲观地说："解题同钓鱼术一样永远不会学会"。但解题作为一项有规则的活动还是有一些方法可学，至少是可模仿的。华侨大学的王志雄教授曾说出这样的体会："相对于问题似欲爆炸，题型不断更新，方法是较少也较稳定，如能较深入地、熟练地、灵活地掌握一些重要的解题方法，将使我们如乘快艇，得以优游

于题海之上，达到数学王国的彼岸”。

近年来，由《美国数学月刊》前主编、美籍加拿大老数学家哈尔莫斯（*Halmos, Paul Richard*）一句“问题是数学的心脏”的惊人之语，将解题运动推向高潮。1987 年在上海举行的国际数学教育研讨会上，美国南伊利诺斯大学的 *J. P* 贝克（*Baker*）教授在他的以《解题教学——美国当前数学教学的新动向》为题的报告论文中指出：“如果说确有一股贯穿八十年代初期的潮流的话，那就是强调解题（*Problem Sloving*）的潮流”。

为了配合这股潮流，世界各国大量出版数学问题与解题的丛书，真是汗牛充栋，精品纷现。光是著名的斯普林格出版社（*Sprmger Verlug*）从 1981 年开始出版的一套高水平的《数学问题丛书》至今就已出版了二十多种。我国教育界及出版界十分重视这类书的出版工作，早在 1949 年 2 月，旧中国教育部曾举行会议为补救当时数学教育质量低下提出了四点建议，其中一条是提倡学生自己动手解题并“希各大书局大量编印中学解题参考用书”。最近几年我国各大出版社出版了一些中学数学教育方面的丛书，如江苏教育社的《数学方法论丛书》（13 册），北大出版社的《数学奥林匹克》系列及翻译的美国《新数学丛书》，湖南教育社的《走向数学丛书》，但直至今天似乎还没有迹象表明要推出一套大型解题方法丛书。

哈尔滨出版社做为一“边陲小社”，出版这样一套丛书，尽管深感力所不逮，但总可算做一块引玉之砖。

最后编者有二点忠告：一是本《丛书》是一套入门书，不能包解百题，本《丛书》在编写之初曾以“贪大求全”为原则，试图穷尽一切方法，妄称“解题精技，悉数其间”。然而这实在是不可能的，也是不必要的。正所谓“有法法有尽，无法法无穷”。况且即使是已有的方法也不能生搬硬套。我国继徐光启和李善兰之后的清末第三大数学家华衡芳（1835—1902）曾指出：解题要随

机应变，不能“执一而论”，死记硬背为“呆法”，“题目一变即无所用之矣”，须“兼综各法”以解之，方可有效。数学家惠特霍斯(*Whitworth*)说过“一般的解题之成功，在很大的程度上依赖于选择一种最适宜的方法”。

二是读者读本《丛书》一定要亲自动手解题。正如陕西师大罗增儒副教授所指出：解题具有探索性与实战性的特征，解题策略要在解题中掌握。

最后，我们送给读者一句德国著名数学家普林斯海姆（1850～1941，*Pring sheim*，*Alfred*）的名言

不下苦功是不能获得数学知识的，而下苦功却是每个人自己的事，数学教学方法的逻辑严格性并不能在较大程度上去增强一个人的努力程度。

愿读完本《丛书》后，解题对你不再是难事。

一九九四年夏，序于松花江畔

目　　录

第一部分　复数

(一)怎样用复数相等的定义证题 …………………………（1）

(二)怎样用共轭复数的性质解题 ………………………（9）

(三)怎样证明某一复数为实数 …………………………（14）

(四)怎样用复数乘除法几何意义解题 …………………（19）

(五)怎样求复数的模和幅角范围 ………………………（28）

(六)怎样使用复数模不等式 ……………………………（33）

(七)怎样求复数模的极值 ………………………………（38）

(八)怎样利用复数变量代换求一类函数的最值 ………（43）

(九)怎样利用复数求某些无理函数的最值 ……………（46）

(十)怎样用复数解一类三角问题 ………………………（51）

(十一)怎样用复数法证明一类三角恒等式 ……………（56）

(十二)怎样用复数解反三角函数问题 …………………（64）

(十三)怎样用复数解解析几何问题 ……………………（68）

(十四)怎样在圆的复数方程中使用配积技巧 …………（76）

(十五)怎样用复数解对称型问题 ………………………（79）

(十六)怎样求复平面上的轨迹问题 ……………………（83）

(十七)怎样求复平面上有关动点的轨迹 ………………（92）

(十八)怎样利用复数比定理证平面几何题 ……………（97）

(十九)怎样用复平面上正三角形的一个充要条件解题 ……………………………………………………………（101）

(二十)怎样用复数求一类函数迭代式……………………（104）

第二部分 三角

(二十一)怎样用三角函数的定义解题…………………… (108)
(二十二)怎样在代数中使用三角代换…………………… (114)
(二十三)怎样求三角函数连乘积的值…………………… (120)
(二十四)怎样用 $\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}$ 的结果解题…………………… (125)
(二十五)怎样应用函数值相同解三角方程…………… (129)
(二十六)怎样运用三角知识讨论方程解的个数……… (133)
(二十七)怎样求方程 $x^2f(x)+xg(x)+q(x)=0$ 的实根 ……………………………………………………… (136)
(二十八)怎样对三角方程通值式进行化简与增根的分离 ……………………………………………………… (140)
(二十九)怎样判断三角方程的解集是否相等………… (149)
(三十)怎样应用 $a\sin x+b\cos x=c$ 的判别式 ………… (155)
(三十一)怎样对 $f(x)=a\sin x+b\cos x$ 进行求值、化简、证明 ……………………………………………… (158)
(三十二)怎样用解析法解三角问题…………………… (162)
(三十三)怎样用辅助无素法证明三角不等式………… (168)
(三十四)怎样利用参数方程和图象法解三角不等式 ……………………………………………………… (175)
(三十五)怎样在三角恒等变形中消元………………… (186)
(三十六)怎样求三角函数式的最值(Ⅰ)……………… (194)
(三十七)怎样求三角函数式的最值(Ⅱ)……………… (206)
(三十八)怎样求$\frac{f(\cos^2\theta)}{g(\sin^2\theta)}$型三角函数的极值 ………… (213)
(三十九)怎样求函数 $y=a\sin^2x+b\sin x+c$ 的极值 … (216)
(四十) 怎样在三角中运用比例性质解题…………… (220)
(四十一)怎样应用三角公式$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$解题 ……………………………………………………… (223)

(四十二)怎样应用三角函数线解题………………………… (231)
(四十三)怎样取反三角函数………………………………… (236)
(四十四)怎样用反三角函数解题…………………………… (240)
(四十五)怎样证明反三角函数恒等式(Ⅰ)……………… (248)
(四十六)怎样证明反三角函数恒等式(Ⅱ)……………… (252)
(四十七)怎样用取正余弦法证明反三角函数恒等式 ………
……………………………………………………………… (256)
(四十八)怎样用反三角函数表示非定义区间角的方法 ……
……………………………………………………………… (261)
(四十九)怎样求反三角函数的数列和…………………… (266)
(五十) 怎样用构造辅助方程法解三角问题………… (271)
(五十一)怎样利用单位圆解题…………………………… (275)
(五十二)怎样用半单位圆的性质解题…………………… (285)
(五十三)怎样利用单位圆证明三角不等式……………… (290)
(五十四)怎样使用点$(\cos\theta,\sin\theta)$在单位圆上解题 …… (293)
(五十五)怎样利用单位圆实现数形“迁移”……………… (298)
(五十六)怎样利用三角函数定义结合图象解三角不等式 …
……………………………………………………………… (303)
(五十七)怎样解关于三角形的定形问题………………… (308)
(五十八)怎样证明单有三角恒等式……………………… (314)
(五十九)怎样证明三角条件等式………………………… (319)
(六十) 用三角法求 $y=\sqrt{ax+b}\pm\sqrt{cx+d}$型函数的值域
……………………………………………………………… (327)
(六十一)怎样求函数 $u=\dfrac{b\sin\theta+d}{a\cos\theta+c}$的值域 …………… (330)
(六十二)怎样求一些正(余)切函数的最小正周期…… (335)
(六十三)怎样解证有关最小正周期问题………………… (342)
(六十四)怎样用最小正周期解三角方程………………… (347)

（六十五）怎样求关于形如 $arcsin(sinx)$ 的值 ………… （350）
（六十六）怎样解涉及和（差）角范围的问题…………… （352）

怎样用复数相等的定义证题

两个复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 相等，当且仅当它们的实部和虚部都相等，即 $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c, b=d$.

$a+bi=0 \Leftrightarrow a=b=0$. ($a$、$b$、$c$、$d \in R$)

下面介绍如何运用这个概念解题

例 1 求证 $\sin(4\arcsin x)=4x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot(1-2x^2)$. ($|x|\leqslant 1$)

证明 $\because (\cos\alpha+i\sin\alpha)^4=1\cdot(\cos 4\alpha+i\sin 4\alpha)=\cos 4\alpha+i\sin 4\alpha$

又 $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4=[(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2]^2=[(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha\cdot i]^2=(\cos^4\alpha-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^4\alpha)+4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)i$

$\therefore \cos 4\alpha+i\sin 4\alpha=(\cos^4\alpha-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^4\alpha)+4\sin\alpha\cdot\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)i$.

根据复数相等的定义得：$\sin 4\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$. 令 $\alpha=\arcsin x$

代入上式则有：$\sin(4\arcsin x)=4\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x)$. $[\cos^2(\arcsin x)-\sin^2(\arcsin x)]=4x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot[(\sqrt{1-x^2})^2-x^2]=4x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot(1-2x^2)$.

即 $\sin(4\arcsin x)=4x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot(1-2x^2)$.

这样，比较难于着手证的三角式，由于使用了复数相等的定义证明就化难为易了. 下面我们再来用这一概念证明条件等式.

例 2 若 $\cos a+i\sin a$ 是方程 $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的解. (a_1、a_2、$\cdots$、$a_n\in R$)求证：$a_1\sin a+a_2\sin 2a+\cdots\cdots+a_n\sin na=0$

证明 将解代入原方程得：$(cos\alpha+isin\alpha)^n+a_1(cos\alpha+isin\alpha)^{n-1}+\cdots+a_n=0$，将此式两边同除以$(cos\alpha+isin\alpha)^n$则有：$1+a_1(cos\alpha+isin\alpha)^{-1}+a_2(cos\alpha+isin\alpha)^{-2}+\cdots+a_n(cos\alpha+isin\alpha)^{-n}=0$ 即 $1+a_1(cos\alpha-isin\alpha)+a_2(cos2\alpha-isin2\alpha)+\cdots+a_n(cosn\alpha-isinn\alpha)=0$

$(1+a_1cos\alpha+a_2cos2\alpha+\cdots+acosn\alpha)-i(a_1sin\alpha+a_2sin2\alpha+\cdots+asinn\alpha)=0$ 由复数相等的定义得：$a_1sin\alpha+a_2sin2\alpha+\cdots+asin\alpha=0$

例 3 若 $a_0+a_1w+a_2w^2+a_3w^3+\cdots+a_{2n}w^{2n}=0(n\in N, a_0、a_1、a_2、a_3、\cdots a_{2n}\in R, w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$求证：$a_0+a_3+a_6+\cdots=a_1+a_4+a_7+\cdots=a_2+a_5+a_8+\cdots$

证明 $\because a_0+a_1w+a_2w^2+a_3w^3+\cdots a_2w^{2n}=(a_0+a_3w^3+a_6w^6+\cdots)+(a_1w+a_4w^4+a_7w^7+\cdots)+(a_2w^2+a_5w^5+a_8{}^8+\cdots)=(a_0+a_3w^3+a_6w^3+\cdots)+(a_1w+a_4w+a_7w+\cdots)+(a_2w^2+a_5w^2+a_8w^2+\cdots)=(a_0+a_3+a_6+\cdots)w^3+(a_1+a_4+a_7+\cdots)w+(a_2+a_5+a_8+\cdots)w^2$

即$(a_0+a_3+a_6+\cdots)+(a_1+a_4+a_7+\cdots)w+(a_2+a_5+a_8+\cdots)w^2=0$

设 $A=a_0+a_3+a_6+\cdots$,

$B=a_1+a_4+a_7+\cdots$,

$C=a_2+a_5+a_8+\cdots$.

则有 $A+Bw+Cw^2=0, A+B(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+C(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=0$

$\frac{1}{2}[2A-(B+C)]+\frac{\sqrt{3}}{2}(B-C)i=0$ 由两复数相等的定义得：

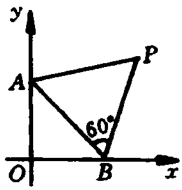
$$\begin{cases}\frac{1}{2}[2A-(B+C)]=0 \text{ 解得 } A=B=C\\ \frac{\sqrt{3}}{2}(B-C)=0\end{cases}$$

即 $a_0+a_3+a_6+\cdots=a_1+a_4+a_7+\cdots=a_2+a_5+a_8+\cdots$

这一概念还可运用到解析几何题的有些证明过程中：

例 4 如图，边长 a 的等边$\triangle PAB$，顶点 A 在虚轴上移动，顶点 B 在实轴上移动，求证复平面内表示复数 Z 的点 $P(x,y)$ 满足方程 $x^2+\sqrt{3}xy+y^2=\frac{a^2}{4}$.

证明 设 $Z_A=y_0i$，$Z_B=\sqrt{a^2-y_0^2}$，则向量$\overrightarrow{BA}$对应的复数是 $-\sqrt{a^2-y_0^2}+y_0i$，向量$\overrightarrow{BP}$对应的复数是 $x-\sqrt{a^2-y_0^2}+yi$ 又向量$\overrightarrow{BP}$是向量$\overrightarrow{BA}$绕 B 点按顺时针方向旋转 60°而得到的．由复数乘法的几何意义知，$\overrightarrow{BP}$对应的复数是 $(-\sqrt{a^2-y_0^2})\cdot[\cos(-60°)+i\sin(-60°)]=(-\sqrt{a^2-y_0^2}+y_0i)\cdot(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\left(-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-y_0^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y_0\right)+(\frac{1}{2}y_0+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2-y_0^2})i$.



因为相等的向量表示同一个复数，所以有 $(x-\sqrt{a^2-y_0^2})+yi=(\frac{-1}{2}\sqrt{a^2-y_0^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y_0)+(\frac{1}{2}y_0+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2-y_0^2})i$. 由两复数相等的定义得：

$$\begin{cases} x-\sqrt{a^2-y_0{}^2}=-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-y_0{}^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y_0 \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2-y_0{}^2}+\frac{1}{2}y_0 \end{cases}$$

即$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-y_0{}^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y_0 & (1) \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2-y_0{}^2}+\frac{1}{2}y_0 & (2) \end{cases}$

(1)·(2)得：$xy=(\frac{1}{2}\sqrt{a^2-y_0{}^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y_0)\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2-y_0{}^2}+\frac{1}{2}y_0)=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2-y_0^2)+\frac{1}{4}y_0\cdot\sqrt{a^2-y_0{}^2}+\frac{3}{4}y_0\sqrt{a^2-y_0{}^2}+\frac{\sqrt{3}}{4}y_0{}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+y_0\cdot\sqrt{a^2-y_0{}^2}$.

$(1)^2+(2)^2$ 得：$(\frac{1}{2}\sqrt{a^2-y_0{}^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y_0)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2-y_0{}^2}+\frac{1}{2}y_0)^2=\frac{1}{4}(a^2-y_0{}^2)+\frac{2\sqrt{3}}{4}y_0\cdot\sqrt{a^2-y_0{}^2}+\frac{3}{4}y_0{}^2+\frac{3}{4}(a^2-y_0{}^2)+\frac{2\sqrt{3}}{4}y_0\sqrt{a^2-y_0{}^2}+\frac{1}{4}y_0{}^2=x^2+y^2$

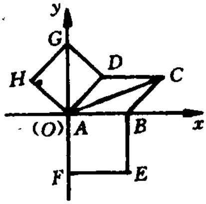
$$x^2+y^2=a^2+\sqrt{3}y_0\sqrt{a^2-y_0{}^2}=a^2+\sqrt{3}(xy-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2)$$
$$=\frac{a^2}{4}+\sqrt{3}xy$$

$x^2+y^2-\sqrt{3}xy=\frac{a^2}{4}$所以表示复数$Z=x+yi$的点$P(x,y)$满足方程

$$x^2-\sqrt{3}xy+y^2=\frac{a^2}{4}.$$

平面几何中有些比较复杂的证明题，如果利用复数相等的定义去证问题就变得比较简单了.

例5 以平行四边形 $ABCD$ 的两邻边为一边分别在形外作正方形 $ABEF$ 和 $ADGH$，求证 AC 和 HF 互相垂直并且相等.



证明 如图，建立坐标系（确定复平面），设点 H、F、C 对应的复数分别是 $a+bi$、$-mi$、$x+yi$（a、b、$-m$、x、$y\in R$）则 $\overrightarrow{FH}$ 对应的复数是：$(a+bi)-(-mi)=a+(b+m)i$，$\overrightarrow{AD}$ 对应的复数是：$(a+bi)\cdot(-i)=b-ai$，$\overrightarrow{AC}$ 对应的复数是：$(b-ai)+m=(b+m)-ai$（∵ $\overrightarrow{AB}$ 对应的复数是：$(-mi)\cdot i=m$）.

因 $\overrightarrow{FH}$ 对应的复数 $Z=a+(b+m)i$. $Z\overline{Z_C}=[a+(b+m)i]\cdot(x-yi)=(ax+by+my)+(mx+bx-ay)i$

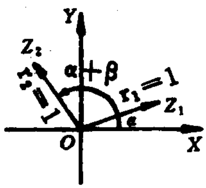
∵相等向量表示同一个复数，∴ $x+yi=(b+m)-ai$ 由复数相等的定义得：$x=b+m$，$y=-a$，将 $x=b+m$，$y=-a$ 代入 $Z\cdot\overline{Z_C}$ 的实部 $ax+by+my=a(b+m)-ab-am=0$

∴ $\overrightarrow{EH}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 互相垂直即 $FH\perp AC$

又 $\overrightarrow{FH}$ $|FH|=|Z|=\sqrt{a^2+(b+m)^2}$，$\overrightarrow{AC}$ $|AC|=\sqrt{(b+m)^2+(-a)^2}=\sqrt{a^2+(b+m)^2}$ ∴ $FH=AC$

∴ AC 和 FH 互相垂直且相等.

证明三角恒等式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 和 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，课本上的证明过程比较麻烦，我们利用复数相等的定义进行证明就非常简捷，并且一次就获得两处恒等式的证明.



例6 证明两角和的正余弦公式

证明 设复平面内任意一点 Z_1 对应的复数的辐角 α，其模为 1，另一点 Z_2 对应的辐角为 $\alpha+\beta$，其模为 1，则 $\vec{OZ}$ 对应的复数的三角形式为 $Z_1=cos\alpha+isin\alpha$ $\vec{OZ_2}$ 对应的复数的三角形式是 $Z_2=cos(\alpha+\beta)+isin(\alpha+\beta)$

又 $\vec{OZ_2}$ 是 $\vec{OZ_1}$ 绕 O 点按逆时针方向旋转 β 后得到的，由复数乘法的几何意义知，$\vec{OZ_2}$ 对应的复数是：

$(cos\beta+isin\alpha)\cdot(cos\beta+isin\beta)=(cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta)+(sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta)i$ $\therefore$ $cos(\alpha+\beta)+isin(\alpha+\beta)=(cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta)+(sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta)i$ 由两复数相等的定义得：$sin(\alpha+\beta)=sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta$ $cos(\alpha+\beta)=cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta$

例 7 求证：(1) $sin\alpha+sin2a+sin3a+\cdots+sinna$

$$=\frac{sin\frac{n}{2}a\cdot sin\frac{n+1}{2}a}{sin\frac{a}{2}}$$

(2) $cos\alpha+cos2a+cos3a+\cdots+cosna$

$$=\frac{sin\frac{n}{2}a\cdot cos\frac{n+1}{2}a}{sin\frac{a}{2}}(n\in N)$$

证明 设 $S_n=sin\alpha+sin2a+sin3a+\cdots\cdots+sinna$

$T_n=cos\alpha+cos2a+cos3a+\cdots\cdots+cosna$. $A=cos\alpha+isin\alpha$ 则有

$T_n+iS_n=(cos\alpha+isin\alpha)+(cos2\alpha+isin2\alpha)+(cos3\alpha+isin3\alpha)+\cdots+(cosn\alpha+isinn\alpha)$

$$=A+A^2+A^3+\cdots+A^n=\frac{A(1-A^n)}{1-A}$$

$$=\frac{(cos\alpha+isin\alpha)\cdot(1-cosn\alpha-isinn\alpha)}{1-cos\alpha-isin\alpha}$$

$$=\frac{(1-cosn\alpha+isin\alpha)\cdot(cos\alpha+isin\alpha)\cdot((1-cosn\alpha-isinn\alpha)}{(1-cos\alpha)^2+sin^2\alpha}$$