21

21世纪大学课程辅导丛书

高等数学

典型题

（第3版）

新版

龚冬保 武忠祥 毛怀遂 邸双亮

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

21世纪大学课程辅导丛书

高等数学典型题

（第3版）

新版

龚冬保 武忠祥 毛怀遂 邸双亮

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书收集了千余道高等数学的典型题。题型既有传统的证明题、解析题，又有近年考试中常见的选择题、填空题，即非客观题和客观题。所选的每道题力求有较新颖、独特的解法，并且从分析题意入手，引导出解题的技巧，旨在启发读者学会求解高等数学各类问题的方法和技巧，提高分析问题和解决问题的能力。为了突出一些典型的方法和揭示一些习题的背景，本书几乎对每道题作了注释。

本书可作为大学生学习高等数学的参考书，也可供报考硕士研究生的考生及参加高等数学竞赛的数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型题(第3版)/龚冬保等编著. —新版. —西安：西安交通大学出版社，2008.11
(21世纪大学课程辅导丛书)
ISBN 978-7-5605-1220-4

Ⅰ.高… Ⅱ.龚… Ⅲ.高等数学-高等学校-习题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第159725号

书　　名　高等数学典型题(第3版)
编　　著　龚冬保　武忠祥　毛怀遂　邸双亮
责任编辑　叶涛

出版发行　西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号　邮政编码710049)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　西安市新城区兴庆印刷厂

开　　本　787mm×1092mm　1/16　**印张** 27.5　**字数** 673千字
版次印次　2008年11月新版　2008年11月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-1220-4/O·150
定　　价　36.00元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

丛书总序

“21世纪大学课程辅导丛书”第一版出版已有十年时间，几经再版，深受广大读者的喜爱。为了满足读者朋友的需要，也为了适应高等教育改革的形势和新的教学要求，我们组织作者对本丛书进行了修订，以全新的面貌奉献给大家。

我们出版这套丛书的目的就是为普通高等学校理工类专业的大学生**提供一流的学习资源，使大家共享一流教师的教学经验和教学成果，更好地学习、掌握基础课和专业基础课知识，为今后的学习和深造打下良好的基础。**

西安交通大学是国内仅有的几所具有百年历史的高等学府，是首批进入国家“211工程”建设的七所大学之一，1999年被国家确定为中西部地区惟一一所以建设世界知名高水平大学为目标的学校。西安交大历来重视本科生教学，1996年成为全国首家本科教学评估为优秀的大学。学校拥有国家级、省部级、校级教学名师数十名，具有丰富的、一流的教学资源。

本丛书由西安交通大学长期在教学一线主讲的教授、副教授主编，他们具有丰富的基础课、专业基础课教学和辅导经验。丛书作者们在长期的教学实践中，**深深了解学生在学习基础课、专业基础课时的难点和困惑点之所在，对如何使学生更有效地学习、掌握课程的基本知识和解题技巧进行了深入的探索和研究，并将成果体现于书中。**

本丛书以**普通高等学校的学生为主要对象，不拘泥于某一本教材，而是将有特色和使用量较大的各种版本的教材加以归纳总结，取其精华，自成一体。**书中对课程的基本内容、研究对象、教学要求、学习方法、解题思路等进行了全面、系统的总结和提炼，按基本知识点、重点与难点、典型题解析、自我检测题等环节进行编排；书后附录了自我检测题参考答案和近年来一些院校的期末考试题、考研试题及相应题解。本丛书的指导思想是**帮助学生理清学习思路，总结并掌握各章节的要点；通过各类精选题的剖析、求解和示范，分析解题思路，示范解题过程，总结方法要略，展示题型变化；达到扩展知识视野，启迪创新思维，促进能力提高的目的。**

本丛书既可以单独使用，也可以与其他教材配合使用；既可以作为课程学习时的同步自学辅导教材，也可以作为考研复习时的主要参考资料。

我们衷心希望本丛书成为您大学基础课和专业基础课学习阶段的良师益友，帮助您克服困难，进入大学学习的自由王国；也希望在考研冲刺时本丛书能助您一臂之力，使您一举成功！

在学习使用过程中，您如果发现书中有不妥之处或有好的建议，敬请批评指正并反馈给我们，我们一定会进一步改进自己的工作，力争使您满意。

真诚感谢您使用西安交大版图书。

西安交大出版社网址： http://press.xjtu.edu.cn/
理工医事业部网址： http://lgny.xjtupress.com/
理工医事业部信箱： jdlgy@yahoo.cn

西安交通大学出版社
2008年6月

第 3 版前言

本书自出版以来，受到广大同学和老师的欢迎和肯定。同时，我们也收到不少读者的意见，这一切是对编者的极大鼓励与鞭策。

近年来我国的高等教育发展很快，作为非数学类的各个专业，“高等数学”这门基础课程，无论从教学内容、教学要求都发生了很大的变化。硕士研究生入学考试，也将数学科目定为 150 分，其中高等数学部分占一半以上的分数。为了适应以上的变化，我们对本书第 2 版作了较大的修改：

1. 编写体系上，内容按教学顺序分节，将原来每章的客观题不再作为各章的独立一节放置，而将其分散到各相应的内容部分，这样，有利于和教学同步，也使题目的编排更符合逻辑，便于读者使用。

2. 删去了一些偏题，另增了一些新题，增加的包括一些基本题、新颖的题及一些应用题。

3. 对第 2 版中的错误作了纠正。

本书自问世以来，得到广大读者的关爱，使编者更感到责任重大。因此，计划不断修改，争取修改一次前进一步，使它真正成为广大读者的良师益友。

编者

第1版前言

为学好高等数学，要做一定数量的习题。在做数学练习题时，不少人采用“套公式”的方法，这样，只有通过大量的练习，才能获得一些数学知识，很难学会分析问题和解决问题的方法，所以，“套公式”的方法是不可取的。本书力图给读者展示另一种解题方法：从分析题目的条件与结论间的逻辑关系入手，理清解题思路，再一步一步地做下去；遇到需用的公式，自然地提取使用，这样能清楚地判断结论的正确性。我们认为坚持这样的解题方法，不但能对所学知识加深理解，还有利于培养数学的思维能力。这就是我们写这本书的目的。为此我们针对本课程的内容精选和编制了近千道典型题目，用上面所述方法作了解答，有些题目的解法独特、新颖，多数题目在书的旁边，对该题解题思路、技巧作了注释。因此，解答的正文步骤较简略，希望读者在阅读本书时能边看边推导，并能用我们介绍的一些方法和技巧，去解答更多的题。最好主动地去想一些更好的解题方法。

本书可作为高等数学的教学参考书，对报考硕士研究生以及准备参加数学竞赛的数学爱好者，本书更有参考价值。

本书的第1章、第2章、第7章由毛怀遂编写；第3章和第8章由邱双亮编写；第4章、第5章、第6章由武忠祥编写；第9章、第10章由龚冬保编写，最后由龚冬保统稿。写这样的书，对我们来说也是个尝试，希望对读者有所启发，但限于作者的水平，本书难免有疏漏与不足之处，恳请读者批评指正。

编者衷心感谢陆庆乐教授，他仔细地审校了全书，并提出了许多宝贵的意见，感谢西安交通大学出版社的支持，使本书得以出版问世。

编　　者

目　　录

第 1 章　函数 极限 连续

1.1　函数及其性质

1-1　已知 $f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)$ 的定义域为________.

解　依题意得 $\sin\varphi(x)=1-x^2$，所以

$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$$

$$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$$

注意 $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$

所以 $$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$$ 填 $\underline{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}$

1-2　函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$ 的定义域为(　).

(A)　$x\in\mathbf{R}$，但 $x\neq 0$　　(B)　$x\in\mathbf{R}$，但 $1+\dfrac{1}{x}\neq 0$

(C)　$x\in\mathbf{R}$，但 $x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}$　　(D)　$x\in\mathbf{R}$，但 $x\neq 0,-1$

解　由　$x\neq 0,\ 1+\dfrac{1}{x}\neq 0,\ 1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\neq 0$

分母不能取零.

得　$x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}$　　选 (C)

1-3　函数 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 的值域是(　).

此题可看作是求函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 的值域，这样就把问题简化了.

(A)　$[-1,1]$　　(B)　$\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

(C)　$[0,1]$　　(D)　$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

解　因为　$1+x^2\geqslant 2\mid x\mid$

所以　$$-\frac{1}{2}\leqslant\frac{x}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}$$　选 (B)

1-4　设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $y=x-[x]$ 是(　).

(A) 无界函数　　(B) 周期为 1 的周期函数

(C) 单调函数　　(D) 偶函数

解　$y = x - [x]$ 的图像如图 1.1 所示。

选 (B)

画草图是帮助解题的一种方法.

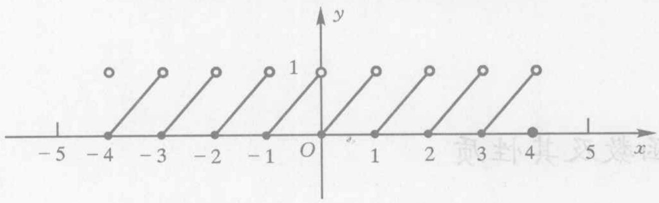

图 1.1

1-5　设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，且它们可以构成复合函数 $f[f(x)]$，$g[f(x)]$，$f[g(x)]$，$g[g(x)]$，则其中为奇函数的是（　）.

(A) $f[f(x)]$　　(B) $g[f(x)]$

(C) $f[g(x)]$　　(D) $g[g(x)]$

选 (A)

利用奇偶函数的性质可得.

$f[f(-x)]$

$= f[-f(x)]$

$= -f[f(x)]$

1-6　设 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \leqslant 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$，则 $f(-x)$ 等于（　）.

(A) $\begin{cases} -e^{-x}, & x \leqslant 0 \\ -\cos x, & x > 0 \end{cases}$　　(B) $\begin{cases} e^{x}, & x \leqslant 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} -\cos x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geqslant 0 \end{cases}$　　(D) $\begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ e^{x}, & x \geqslant 0 \end{cases}$

选 (D)

本题主要检查对函数概念掌握的情况. 从 $-x \leqslant 0$ 及 $-x > 0$ 入手进行讨论.

1-7　设 $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leqslant 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$，$g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x, & x \geqslant 0 \end{cases}$，则 $f[g(x)] = $（　）.

(A) $\begin{cases} x^2+2, & x < 0 \\ 1-x, & x \geqslant 0 \end{cases}$　　(B) $\begin{cases} 1-x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geqslant 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 1-x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geqslant 0 \end{cases}$　　(D) $\begin{cases} x^2+2, & x < 0 \\ 1+x, & x \geqslant 0 \end{cases}$

解　由 $g(x) \leqslant 0$ 得 $x \geqslant 0$ 时，$g(x) = -x \leqslant 0$.

所以　$x \geqslant 0$ 时　　$f[g(x)] = 1 + x$

由　$g(x) > 0$ 得　$x < 0$ 时，$g(x) = x^2 > 0$

所以　$x < 0$ 时　　$f[g(x)] = x^2 + 2$

选 (D)

复合函数的概念是学习导数和积分的一个重要环节，一定要熟练掌握. 本题要从复合函数 $f[g(x)]$ 的内层 $g(x)$ 开始讨论.

1-8　试求下列函数的定义域

1)　$f(x) = \lg(1 - \lg x)$

2) $f(x)=\arccos\dfrac{x}{[x]}$,$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

解 1) 要使 $f(x)$ 有意义,x 应满足 $x>0$ 且 $1-\lg x>0$

即
$$0<x<10$$
故 $f(x)$ 的定义域为$(0,10)$.

2) 要使 $f(x)$ 有意义,x 应满足 $-1\leqslant\dfrac{x}{[x]}\leqslant 1$ 且 $[x]\neq 0$,

而
$$x-1<[x]\leqslant x$$

当 $x<0$ 时, $0<\dfrac{x}{[x]}\leqslant 1$

当 $0\leqslant x<1$ 时, $\dfrac{x}{[x]}$ 无意义

当 $x\geqslant 1$ 时, $1\leqslant\dfrac{x}{[x]}$

最后一个不等式的等号仅当 $x\in\mathbf{N}$ 时成立,故 $f(x)$ 定义域为 $\{x\mid x<0$ 或 $x=1,2,3,\cdots\}$.

对应法则和定义域是函数的两个基本要素.应当养成这样的习惯:遇到函数就要注意它的定义域.

1-9 设 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,试求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域$(a>0)$.

解 由 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,得
$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases},\ \text{即}\ \begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$$
故
$$a\leqslant x\leqslant 1-a$$
从而当 $a=1-a$ 即 $a=1/2$ 时,函数仅在 $x=1/2$ 一点有定义;当 $0<a<1/2$ 时,函数的定义域为$[a,1-a]$;当 $a>1/2$ 时无解.即定义域为空集.

这些不等式由构成复合函数的原则得到

1-10 设 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$,求 $f(x-2)$.

本题主要讨论对应法则,且以复合函数为主.

解 为了求 $f(x-2)$,先求 $f(x)$,我们先给出求 $f(x)$ 的两种方法:

1) $f(x+2)=2^{(x+2)^2-4}-(x+2)+2$

配方法

所以
$$f(x)=2^{x^2-4}-x+2$$

2) 令 $x=t-2$,代入得

变量代换法

$$f(t)=2^{t^2-4}-t+2$$
所以
$$f(x)=2^{x^2-4}-x+2$$
$$f(x-2)=2^{(x-2)^2-4}-(x-2)+2=2^{x^2-4x}-x+4$$

1-11 设
$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\geqslant 0\\-e^x, & x<0\end{cases},\qquad \varphi(x)=\ln x$$

两个函数是否可以构成复合函数,要根据复合函

1) 求 $f[\varphi(x)]$ 及其定义域；

2) 可以复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数吗？

解 1) 因为 $\varphi(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 $(-\infty,+\infty)$，而 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 所以 $\varphi(x)$ 的值域在 $f(x)$ 的定义域内，故 $f[\varphi(x)]$ 有意义，因而

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\varphi^2(x), & \varphi(x)\geqslant 0\\ -\mathrm{e}^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<0\end{cases}$$

即
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\ln^2 x, & x\geqslant 1\\ -x, & 0<x<1\end{cases}$$

从上式可看出 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是 $(0,+\infty)$.

2) 由于 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty,0]$，$\varphi(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，它们无公共的部分，所以不能复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数.

数的法则分别考查这两个函数的定义域及值域.

复合函数中内层函数的值域与外层函数的定义域之交集必须是非空集.

1-12 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases},\quad \psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$$

求：1) $\varphi[\varphi(x)]$； 2) $\varphi[\psi(x)]$.

解 1) 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$

$$\varphi[\varphi(x)]\equiv 1,\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

2) 因为
$$\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, |\psi(x)|\leqslant 1\\ 0, |\psi(x)|>1\end{cases}$$

而仅当 $|x|=1$ 时， $\psi(x)=1$

$|x|\neq 1$ 时， $1<\psi(x)\leqslant 2$

故
$$\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, & |x|=1\\ 0, & |x|\neq 1\end{cases}$$

易知 $\varphi[\psi(x)]$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

复合函数类似“代入”. 但要注意定义域的变化. 复合后最好写下复合函数的定义域.

1-13 试说明 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

是一个初等函数.

解 因为
$$\begin{aligned}f(x)&=1-|x-1|\\ &=1-\sqrt{(x-1)^2},\quad x\in[0,2]\end{aligned}$$

所以由初等函数的定义知 $f(x)$ 是一个初等函数.

本题说明分段函数也有可能是初等函数.

1-14 求 c 的一个值，使

$$(b+c)\sin(b+c)-(a+c)\sin(a+c)=0,$$

这里 $b>a$，均为常数.

解 令 $f(x)=x\sin x$

此解法巧妙地运用了函数的奇偶性，使问题得以解

则 $f(x)$ 是一个偶函数，依题意即求 c 使

$$f(b+c)=f(a+c)$$

成立.$(a\neq b)$

所以
$$a+c=-(b+c)$$
$$c=-\frac{1}{2}(a+b)$$

决. 若是用解方程的方法那将是困难的. 读者不妨一试.

1-15 求下列函数的反函数

1) $$y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$$

2) $$y=\begin{cases}x, & x<1\\ x^3, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 3^x, & x>2\end{cases}$$

解 1) 所给函数的定义域及值域分别是$[-\sqrt{2}/2,1]$，$[0,\sqrt{3\pi}]$. 由 $y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$ 解得

$$x=\sin\frac{1}{4}(y^2-\pi)$$

故 $y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$ 的反函数为

$$y=\sin\frac{1}{4}(x^2-\pi),\qquad x\in[0,\sqrt{3\pi}]$$

注意反函数存在的条件.

注意定义域的范围.

2) 当 $x<1$ 时，$y=x$，
故反函数为

$$y=x,\quad x\in(-\infty,1)$$

当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=x^3$，
故反函数为

$$y=\sqrt[3]{x},\qquad x\in[1,8]$$

当 $x>2$ 时，$y=3^x$，
故反函数为

$$y=\log_3 x,\qquad x\in(9,+\infty)$$

综上所述，所求的反函数为

$$y=\begin{cases}x, & x<1\\ \sqrt[3]{x}, & 1\leqslant x\leqslant 8\\ \log_3 x, & x>9\end{cases}$$

利用几何图形看反函数及其定义域更为清楚，建议读者作出 $y=f(x)$ 的图形.

1-16 设 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8=(2x-1)^8$，求 $a_1+a_2+\cdots+a_7$.

解 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_8x^8$
$$=(2x-1)^8$$

则 $$f(0)=a_0=1$$

把系数及一部分系数和视为函数在特殊点的值，比用二项式系数法好.

$$f(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_8 = 1$$

比较原等式两边 x^8 的系数得 $a_8 = 2^8$.

故 $$a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = 1 - a_0 - a_8 = -256$$

1-17 设 $f(x) = x/\sqrt{1+x^2}$, $f_1(x) = f[f(x)]$, $f_2(x) = f[f_1(x)]$, $f_{n+1}(x) = f[f_n(x)]$ $(n = 1,2,\cdots)$. 试求 $f_n(x)$ 的解析表达式.

先一步一步复合，从特殊中归纳出一般规律，再用数学归纳法证明.

解 $$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f_1(x) = f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f_2(x) = f[f_1(x)] = \frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

一般地，可用数学归纳法证明

$$f_n(x) = f[f_{n-1}(x)] = \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}} \qquad (n = 2,3,4,\cdots)$$

1-18 设对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$，存在常数 $c \neq 0$，使 $f(x+c) = -f(x)$. 证明 $f(x)$ 是周期函数.

证明函数是周期函数的关键是要找到正常数 T. 这里 $T = 2|c|$.

证 因为对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$f(x+c) = -f(x)$$

所以对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$f(x+2c) = f[(x+c)+c] = -f(x+c) = f(x)$$

故 $f(x)$ 是周期函数.

1-19 设 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 是定义在$(-\infty, +\infty)$上的单调增函数，且 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. 证明 $f[f(x)] \leqslant g[g(x)] \leqslant h[h(x)]$.

注意复合函数的单调性.

证 因为 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$上单调增加，所以对任何 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$，$x_2 > x_1$，有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2), \quad g(x_1) \leqslant g(x_2), \quad h(x_1) \leqslant h(x_2)$$

又对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

所以 $$f[f(x)] \leqslant f[g(x)] \leqslant g[g(x)]$$
$$g[g(x)] \leqslant g[h(x)] \leqslant h[h(x)]$$

即 $$f[f(x)] \leqslant g[g(x)] \leqslant h[h(x)]$$

1-20 设 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$上有定义，且对任意 $x, y \in (-\infty,$

这类题一般要

$+\infty$) 有

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|$$

证明 $F(x)=f(x)+x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

证 任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_2>x_1$，那么由题给条件有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|=x_2-x_1$$

而 $f(x_1)-f(x_2)\leqslant|f(x_2)-f(x_1)|<x_2-x_1$

所以 $f(x_1)+x_1<f(x_2)+x_2$

从而 $F(x_1)<F(x_2)$，故 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

从定义出发去解. $\pm[f(x_1)-f(x_2)]\leqslant|f(x_2)-f(x_1)|$. 我们取其对证明结论有用的一个.

1.2 数列的极限

1-21 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]=$ ________.

先求根号下的和，再将分子有理化.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2n}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

填 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

1-22 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{28}+\cdots+\dfrac{1}{9n^2-3n-2}\right)=$ ________.

本题利用的是分拆法. 其目的是求出前 n 项的和.

解 原式

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$$

填 $\dfrac{1}{3}$

1-23 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$ ________.

解 1 是利用夹逼准则.

解 1 因为

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\dfrac{1}{2}$

所以，原式 $=\frac{1}{2}$

解2 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2+n+k}-\frac{k}{n^2}\right)$

解2则是用无穷小分析法. $\frac{k}{n^2+n+k}$ 与 $\frac{k}{n^2}$ 是等价无穷小. 故想到用 $\frac{k}{n^2}$ 代替 $\frac{k}{n^2+n+k}$，而证明它们差之和趋于0.

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2}$，

及 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2+n+k}-\frac{k}{n^2}\right)\right|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k(n+k)}{n^2(n^2+n+k)}$

$\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2}{n^2}=\frac{2}{n}\to 0,\ \left(\frac{k(n+k)}{n^2+n+k}\leqslant 2\right)$

填 $\frac{1}{2}$

1-24 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=0$，则下列断言正确的是（　）.

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散

(B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小

(D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小

本题的关键是利用极限的运算法则.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x_n}(x_ny_n)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=0$

平时做选择题，应练习举例否定不正确选项的方法.

注：取 $x_n=n,y_n=\frac{1}{n^2}$，知(A)不正确.

取 $x_n=\frac{1-(-1)^n}{2}n,y_n=\frac{1-(-1)^{n+1}}{2}n$，知(B)不正确.

取 $x_n=\frac{1}{n^2},y_n=n$，知(C)不正确.

选 (D)

1-25 设 $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

连乘式首先要变形，约去公因子，化简后再求极限.

解 $x_n=\frac{2-1}{2}\times\frac{3-1}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

1-26 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$.

有理化分子也是求极限的好方法.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}+1}=\frac{1}{2}$