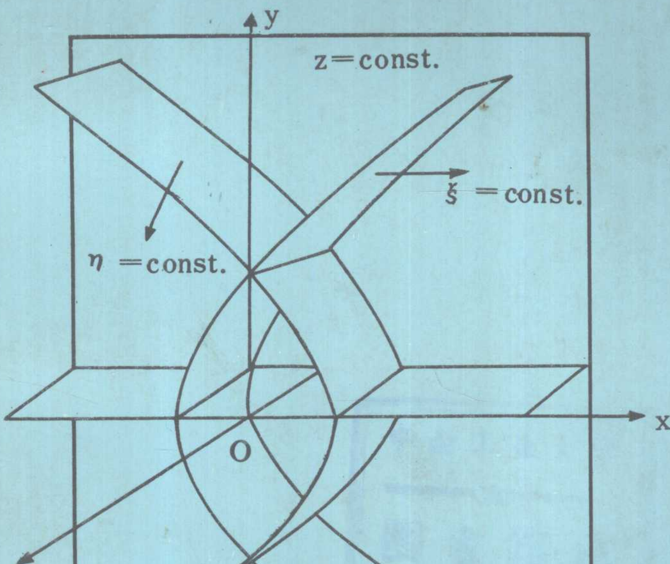
大學用書

工程數學（一）

向量分析

劉文義 編著



大行出版社印行

大 學 用 書

向 量 分 析

劉 文 義 著

大行出版社印行

中華民國 六十一年九月 日初版
書名：向量分析
編者：劉文義
發行人：裴振九
出版者：大行出版社
臺南市民生路22巷2號
郵撥帳號：32936
電話：20916
內政部核准登記內版臺業字第1978號
特價：
編號：Q
同

特價一二五元

左　　序

數學爲習科學之必要工具，而向量分析則又爲數學中之重要基礎，如無良好之基礎，學者曷能閱讀高深之書籍從事專門問題之研究？劉君文義以其從事是科講授多年之經驗，洞悉癥結之所在，了解學生之需要，撰寫是書，藉供校內外人士之閱讀與參考；揆以我國提倡科學歷數十年，而迄今功效不彰，文字實爲最主要之障碍，更書籍雖多如牛毛，而中文著作，則仍屈指可數，非不能也，是不爲也，則劉君此書之成，更有其深遠之意義存焉，余是以樂爲之序。

土木研究所教授

左利時

民國六十一年九月

於成功大學

自　序

由於近代工程科學之急速精進，使得工程界人士欲吸取更多更新的工程知識及理論，則非具有深厚的數學基礎不可；今觀吾國文字方面之數學書籍，適用於工科人士者，並不多見，因此作者乃將授課時所用之講稿，編纂成書，以爲工程界人士之參考。

本書係作者計劃陸續出版中之工程數學叢書裡的第一單元——向量分析——，全書分成五章，第一章的重點爲向量代數及其力學上之應用，並討論到倒基（reciprocal base），以爲第三章之礎石，第二章論述向量之微分，同時解釋一些常用的數學形式在物理應用上之價値；第三章說明了一般座標系統內幾種常見之數學形式之結構，尤其是曲線正交性座標系統之介紹，更爲詳盡，第四章空間曲線之性質，對於研究力學者，更爲不可欠缺，因如能充分地了解空間曲線之性質後，質點在三維空間運動所牽涉到之幾何上的問題，當可迎刄而解；最後一章——第五章——向量之積分，介紹了常用的幾個積分定理；這些積分定理除與流體力學關係密切外，就作者所知，於固體力學上，亦經常使用到。

惟作者才疏學淺，更因匆促成書，錯誤之處在所難免，尙祈先進後學，不吝指正，則感激萬分。

最後，謹對成大土木系大學部蔡相全、翁永裕、黃東碧諸同學之熱忱協助校對與繕寫，致莫大之謝意。

劉　文　義

民國六十一年九月

謹識於：

國立成功大學

土木工程學系四五〇八教授室

向量分析 目次

第一章　向量代數

1—1）純量與向量：

我們都知道，在物理學中對於純量(scalar)物理量和向量（vector）物理量最傳統性的定義是如此：

〝純量物理量係僅具有大小（magnitude）而不具有方向(direction）之物理量；而向量物理量，係此物理量非但具有大小，並需考慮到其方向，才足以說明此物理量者。〞

就如體積，質量和功，這些物理量不論參考座標系統如何選取，只要量取物理量之單位（unit）選定後，就可以明白地用一數據說明了此物理量；這就是沒具有方向性的純量；反過來說，對於速度，加速度和力，這些物理量，即使已決定了量取該物理量大小之單位，但是還需將參考座標系統確定後，方能以〝一組有序數據〞說明此物理量；此即是具有方向性的向量。

這個被採用為區分純量和向量的傳統性概念，也許就數學家的觀點而言是不夠嚴密的，不過就物理界和工程上而論，使用以上觀念以區分純量和向量物理量已足夠所需；又因在物理和工程應用上，一般皆以存在於三維空間（three dimension space）之向量為研究對象，因此本書所討論之向量空間亦僅限於維度小於或是等於三之向量空間。

書寫上，對於向量之記法，習慣上皆在英文字母上，加一箭號如 $\vec{v}$，$\vec{a}$ 或是用粗寫大寫英文字母如 **V** 表示之，以別於純量的記法；而本書將採用字母上加一箭號以代表向量，如為純量則以細寫字母表示之。

表示一向量，通常以一直線段表示之，此直線段之方向（所謂直線段之方向，習慣上在直線段上加一箭頭，箭頭所指的方向，即為該直線段之方向。）即與向量之方向一致；又當用以量取向量大小之單位與直線段間之長短關係建立後，則直線段之長度即代表該向量之大小。

向量之大小，亦稱為向量之絕對值（absolute value of the

vector），其記法：係在代表向量之字母兩旁加上兩豎（即絕對值符號）或以純量記法表示之，例如：

$$A = |\vec{A}|$$

不論向量的方向如何，如果向量的絕對值為一單位大小時，稱之為單位向量（unit vector）。

又當一向量之絕對值為零時，稱為零向量（zero vector），其記法為$\vec{O}$，當然零向量的方向是不確定的。

向量除上述用一單一字母加上一箭號表示外，亦可在兩字母上加上一箭號表示之；例如圖1—1表示之向量，其起點為A，終點為B；而其方向係由A指向B者；則以$\overrightarrow{AB}$記法表之。

圖 1—1

按向量可分為三類：

第一類為自由向量（Free vector）：此類向量只有大小，方向，並無需深究其存於空間之何處；因此如為自由向量之物理量；此物理量在空間之任何位置所產生效應，當不因空間位置之不同而異。

第二類是為線性向量（line vector, localized vector）：此種向量，不僅大小，方向一定，同時還局限於僅可在空間上某一定直線上移動，方可使此線性向量之物理量對外之效應保持不變。

第三類是為限制向量（bound vector）：屬於此類向量之物理量，非惟大小，方向一定，並且需將此物理量固定於空間某處，其對外效應方能不變。

事實上任何一向量物理量常很難依此三種向量分類法加以區分，也許在某一問題中，此向量物理量被考慮為自由向量，在另一問題中亦很可能被考慮成線性向量或是限制向量；就如作用力而言，如在一三力平衡之靜定問題中只欲求某一未知力之大小，方向而已時，儘可以將此作用力考慮成自由向量而直接書畫力圖即可解得；可是在一剛

體平衡中，如非但欲求一未知力之大小，方向，並需確定其位置時，則必需將作用力考慮成線性向量了。但又在處理彈性體之平衡問題中，除非將所有作用力考慮成限制向量則無法得解；故知對某一向量物理量，有時是很難明白地說明該屬於那一類型之向量了。

本書將以自由向量做為研論〝向量分析〞之起點，至於線性向量和限制向量，只需將自由向量之數學理論，稍加推繹，則不難知矣。

1—2）向量之相等，加法與減法：

兩向量相等（equal）即表示此兩向量大小（或是絕對值）相等，且方向一致者；又假定兩向量之大小相等，但方向相反者，則此兩向量中之一向量將被稱為另一向量之負向量（Negative vector）。

兩向量之加法（Addition of two vectors）所採用之法則，為我們所熟知的平行四邊形定律；如欲求圖1—2中之圖 a）$\vec{A}$，$\vec{B}$向量之和時，首先我們在圖 1—2 中圖 b）上由一共同點 a 繪出 $\overrightarrow{ab}=\vec{A}$，和$\overrightarrow{ac}=\vec{B}$，再從 b，c 兩點分別畫線段 $\overline{bd}$ 平行 $\overline{ac}$，$\overline{cd}$平行 $\overline{ab}$，則$\overrightarrow{ab}$和$\overrightarrow{ac}$（即$\vec{A}$和$\vec{B}$）向量之和，即為通過 $\overline{ab}$，$\overline{ac}$共同點 a，此平行四邊形之對角線$\overline{ad}$所示之向量$\overrightarrow{ad}$（或有人認為，欲求兩向量之和，可以用〝箭尾連箭頭〞的三角形法則得之。例如在圖1—2中之圖 b）上，先作一向量$\overrightarrow{ab}$等於$\vec{A}$，再從$\overrightarrow{ab}$向量之箭頭 b 點作一向量$\overrightarrow{bd}$等於$\vec{B}$，使其箭尾和

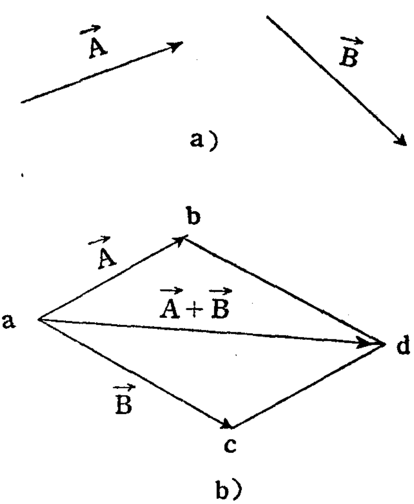


圖　1—2

$\overrightarrow{a\,b}$箭頭相合，則$\overrightarrow{a\,b}$，$\overrightarrow{b\,d}$兩向量之和，即是以 a 爲起點， d 爲終點之向量$\overrightarrow{a\,d}$，按此法雖稱爲三角形法則，其實亦是平行四邊形法則之另一說法而已。）如此定義出來的向量加法法則，是否依然保有純量加法法則的特性呢？此乃一值得深究的問題。

首先我們考慮純量加法的交換律是否依舊適用於向量之加法法則？今觀圖 1—2 中之圖 b），由圖上知：

$$\overrightarrow{a\,b}=\overrightarrow{c\,d}=\vec{A}$$

又：

$$\overrightarrow{a\,c}=\overrightarrow{b\,d}=\vec{B}$$

依向量加法之法則知：

$$\overrightarrow{a\,b}+\overrightarrow{b\,d}=\overrightarrow{a\,d}$$

$$\overrightarrow{a\,c}+\overrightarrow{c\,d}=\overrightarrow{a\,d}$$

即：

$$\vec{A}+\vec{B}=\overrightarrow{a\,d}$$

$$\vec{B}+\vec{A}=\overrightarrow{a\,d}$$

所以：

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

因此知：純量加法交換律照舊是適用於向量加法。

至於純量加法之結合律，向量加法是否仍然保有？現我們看圖 1—3 中，欲求$\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{C}$三向量之和，可先求$\vec{A}$，$\vec{B}$兩向量之和$\vec{D}$，再求$\vec{D}$和$\vec{C}$之和得$\vec{F}$；亦可先求$\vec{B}$，$\vec{C}$之和$\vec{E}$，再求$\vec{A}$，$\vec{E}$之和其結果亦爲$\vec{F}$，故知：

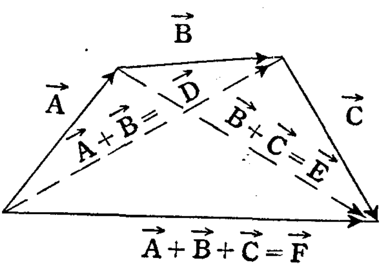


圖 1—3

$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$

之關係是成立的亦即向量之加法，亦可滿足純量加法之結合律。

又欲求兩向量之差，我們先求被當做減數向量之負向量，然後再求此負向量和當做被減數之向量之和；例如，在圖1—4中欲求$\vec{A}-\vec{B}$，則先求$\vec{B}$之負向量$\vec{C}(=-\vec{B})$，再求$\vec{C}$和$\vec{A}$向量之和$\vec{D}$；即：

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

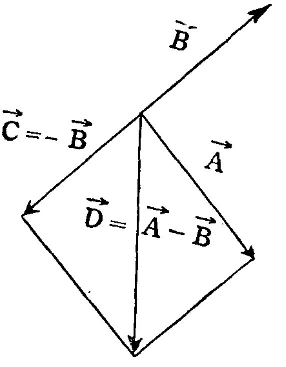


圖　1—4

〔例1—1〕證明三角形三中線交於一點。

解：

在圖 1—5 中，D及E分別爲$\overline{AB}$及$\overline{BC}$兩線段之中點，連結$\overline{AE}$及$\overline{CD}$交於G，茲設向量

$$\overrightarrow{AG}=m\overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{DG}=n\overrightarrow{DC}$$

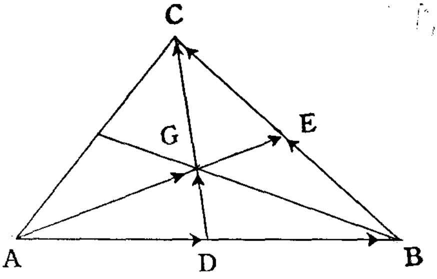


圖　1—5

(m，n 皆是純量，又因$\overrightarrow{AG}$和$\overrightarrow{AE}$爲互相平行之兩向量，故可假設此等式；$\overrightarrow{DG}$和$\overrightarrow{DC}$亦然。）由向量之加法法則知：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{DC}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+n(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC})\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+n(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\\&=\frac{1}{2}(1+n)\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

又因：
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}&=m\overrightarrow{AE}\\&=m(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})\\&=m(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})\\&=m\overrightarrow{AB}+\frac{m}{2}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

比較以上兩式當知，此等式欲成立，則對應項之係數需相等，故得：
$$m=\frac{1}{2}(1+n) \qquad \frac{m}{2}=n$$

解此得 $m=\frac{2}{3}$，$n=\frac{1}{3}$，因此 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{GC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$。

同理連結 $\overline{AC}$ 中點至B亦必過G，故知三角形三中線交於一點。

〔習 題 1—1〕

1）設 $\vec{m}$，$\vec{n}$ 為已知向量，試由下式求 $\vec{X}$，$\vec{Y}$ 兩未知向量
$$\vec{X}+2\vec{Y}=\vec{m} \qquad 2\vec{X}-\vec{Y}=\vec{n}$$

2）若 $\lambda\vec{A}+\mu\vec{B}=\vec{0}$，但 λ，μ 均為不等於零之純量，試證 $\vec{A}$ 平行 $\vec{B}$。

3）在平行四邊形ABCD中，令 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，試將 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{BD}$ 諸向量以 $\vec{a}$，$\vec{d}$ 兩向量之線性組合表示之。

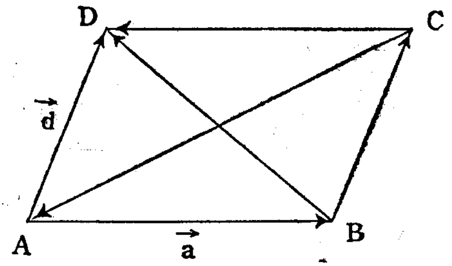


圖1 E1—1

4）若M為 $\overline{BC}$ 線段之中點，試證：
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$$

5）如A，B，C，D為任意之四點，試證：
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{PQ}$$

其中P，Q兩點為線段$\overline{AC}$和$\overline{BD}$之中點。

6）在圖 1 E1—2 中，令$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{C}=\overrightarrow{OC}$，又假定C點在$\overline{AB}$線段間，則：

$$\vec{C}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$$

其中$\lambda+\mu=1$

試證之。

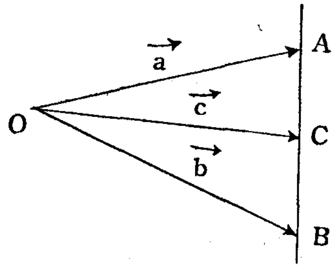


圖　1 E1—2

7）試證平行四邊形之對角線互相平分。

1—3）向量之乘法：

一種運算法則的創制，只要是具有應用上的價值，且不違背數學邏輯及物理現象，我們都會樂於接受該種運算觀念；就在這種情形下，產生了三種向量乘法的數學結構；而每一種向量乘法的數學結構，除了具有合理的數學邏輯為基礎外，並含有相當〝有意義〞的數學和物理概念在內；我們將在本節中，詳加論述：

a）一純量乘一向量：

一純量a乘一向量$\vec{B}$而得其結果仍是向量，記為：

$$a\vec{B}$$

我們定義向量$a\vec{B}$其大小（或謂絕對值）為純量a之絕對值和向量$\vec{B}$之大小（亦即向量$\vec{B}$之絕對值）之乘積；又當a為正數時，則向量$a\vec{B}$和$\vec{B}$同方向，當a為負數時，則向量$\overrightarrow{aB}$和$\vec{B}$反方向；由此知一純量a乘一向量$\vec{B}$，當$|a|$大於1時，則其結果係將向量$\vec{B}$同方向或反方向放大；當$|a|$等於1時，則其結果僅使向量$\vec{B}$保持不變或使其反其方向而已；當$|a|$小於1時，則其結果係將向量$\vec{B}$同方向或反方向縮小；又$|a|$等於零時，則向量$\vec{B}$被凝縮為一點成為零向量。

由上所述之一純量乘一向量之運算法則中，我們不難推知：純量

a，b和向量$\vec{C}$，$\vec{D}$間之乘法運算，下述的幾個關係式是成立的：

$$a\vec{C}=\vec{C}a \qquad \text{（乘法交換律）}$$

$$(ab)\vec{C}=a(b\vec{C})=b(a\vec{C}) \qquad \text{（乘法結合律）}$$

$$(a+b)\vec{C}=a\vec{C}+b\vec{C}$$

$$a(\vec{C}+\vec{D})=a\vec{C}+a\vec{D} \qquad \text{（乘法分配律）}$$

由此可知純量乘法運算間之乘法交換律，乘法結合律，乘法分配律，依然適用於純量乘向量之數學運算法則。

至於一向量和另一向量間之乘法，共有兩種定義，我們再討論於後：

b）兩向量之常量積（scalar or inner product）：

兩向量常量積之乘法法則，係如此定義：

兩向量的常量積為一純量，其大小為此兩向量之絕對值之乘積再乘以此兩向量間夾角之餘弦。

例如圖1—6中兩向量$\vec{A}$和$\vec{B}$之常量積為$|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$。習慣上兩向量之常量積的記法，是在代表此兩向量之字母符號間加一"・"，譬如圖 1—6 中$\vec{A}$，$\vec{B}$之常量積可寫為$\vec{A}\cdot\vec{B}$。又因$\vec{A}$，$\vec{B}$兩向量間之夾角餘弦，亦可寫成：

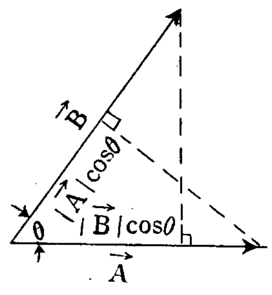


圖 1—6

$$\cos\theta=\cos(\vec{A},\vec{B})$$

所以：

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\vec{A},\vec{B})$$

由圖 1—6 及上式知：$|\vec{A}|\cos(\vec{A},\vec{B})$ 為$\vec{A}$向量在$\vec{B}$向量方向之投影；因此$\vec{A}\cdot\vec{B}$ 可認為$\vec{B}$向量之絕對值乘以$\vec{A}$向量在$\vec{B}$向量方向

之投影長度而得之純量；按上式亦可解釋爲$\vec{A}$向量和$\vec{B}$向量在$\vec{A}$向量方向之投影長度積；故兩向量常量積之定義可換用以下方式說明：

兩向量之常量積爲其中任一向量之絕對值乘以另一向量在此向量方向投影長度（即絕對値）之積。

兩向量常量積爲一正數或負數之純量；此因兩向量間之夾角 θ（指兩向量所夾之角度較小之角），其範圍爲 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$；故當此兩向量間之夾角在 0° 至 90° 間時，此兩向量之常量積恒爲一正數，若此夾角在 90° 至 180° 間，則此兩向量之常量積當爲一負數。

如此定義的常量積是否滿足純量乘法之乘法交換律及乘法分配律呢？

因　$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\vec{A},\vec{B})$$
$$\vec{B}\cdot\vec{A}=|\vec{B}||\vec{A}|\cos(\vec{B},\vec{A})$$

故按此知：

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$$

即兩向量之常量積滿足了純量乘法交換律。

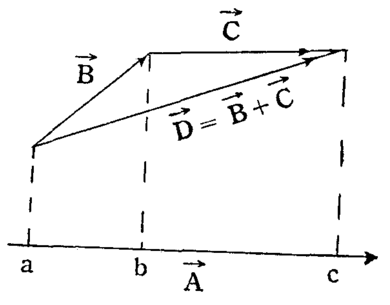


圖　1—7

又從圖 1—7 知：$\vec{B}$，$\vec{C}$兩向量之和$\vec{D}$向量在$\vec{A}$方向之投影長度等於$\vec{B}$，$\vec{C}$兩向量分別在$\vec{A}$向量方向之投影長度和（即$\overline{ab}+\overline{bc}=\overline{ac}$），故知：

$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}$$

又由上式不難推知：

$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{C}+\vec{D})=\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{A}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{D}$$

因此乘法分配律對於兩向量常量積之運算仍然成立。

今再考慮當$\vec{B}=\vec{A}$時，則因：

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=|\vec{A}||\vec{A}|\cos(\vec{A},\vec{A})$$

$$=|\vec{A}|^2$$

$$\therefore\ |\vec{A}|=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$$

我們常利用上述關係以求一向量之絕對值。

又當$\vec{A}$，$\vec{B}$兩向量之常量積爲零時，有三種可能情形

1）$\vec{A}=\vec{0}$

2）$\vec{B}=\vec{0}$

或是：

3）$\vec{A}$，$\vec{B}$正交（orthogonal，即互相垂直）

因而如$\vec{A}\cdot\vec{B}=0$，我們決不可武斷地說："$\vec{A}$，$\vec{B}$中至少有一向量爲零向量"；同理可知$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot\vec{C}$亦無法斷定$\vec{B}=\vec{C}$，因尚有一種$\vec{A}$正交$\vec{B}-\vec{C}$之可能。

〔例1—2〕假定三向量$\vec{u}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$有以下之關係式存在：

$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$$

且 $|\vec{u}|=3$，$|\vec{v}|=5$，$|\vec{w}|=7$

試求$\vec{u}$，$\vec{v}$兩向量間之夾角。

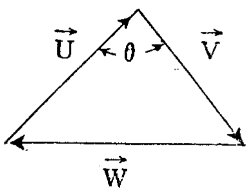


圖 1—8

解：

由 $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$

得：

$$\vec{u}+\vec{v}=-\vec{w}$$

故：

$$\vec{u}\cdot\vec{u}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}=\vec{w}\cdot\vec{w}$$

$$\therefore\ \vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}[\vec{w}\cdot\vec{w}-\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}]$$