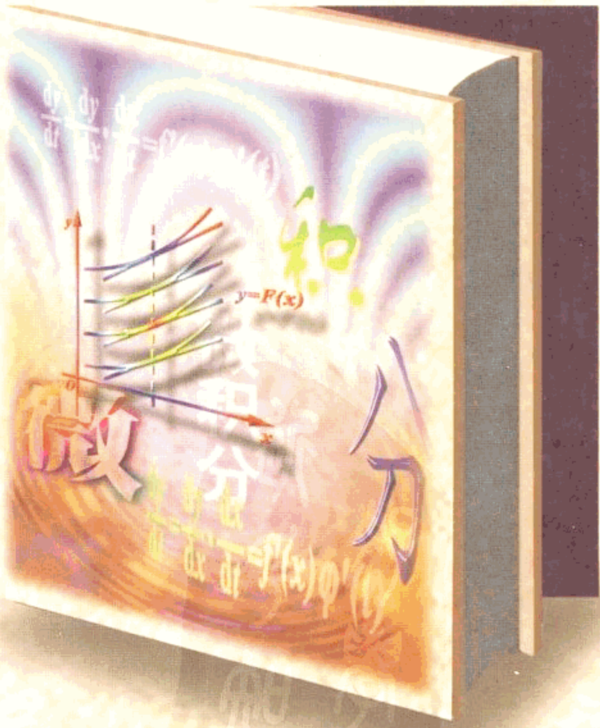
教育部、国家民委规划教材

经济数学

微积分

特古斯 李 英 主编



广西民族出版社

教育部、国家民委规划教材

经济数学

微 积 分

主　编　$\boxed{\text{特古斯}}$　李　英

副主编　斯钦孟克

（以下按姓氏笔画为序）

乔节增　李敬武

赵新泉　曹　纯

广西民族出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济数学．微积分／$\boxed{\text{特古斯}}$，李英主编．—南宁：广西民族出版社，2000．6

教育部、国家民委规划教材

ISBN 7-5363-3676-4

Ⅰ.经... Ⅱ.①特...②李... Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 29158 号

教育部、国家民委规划教材

经济数学

Wei Ji Feng

微积分

$\boxed{\text{特古斯}}$ 李 英 主编

责任编辑 张 静
封面策划 张文馨
封面设计 吴左平
责任校对 黎贞崇
责任印制 蓝剑风
出　　版 广西民族出版社
发　　行 广西新华书店
印　　刷 广西南宁市社会福利印刷厂
开　　本 850×1168 1/32
印　　张 15.75
字　　数 401.1 千
版　　次 2000 年 6 月第 1 版
印　　次 2001 年 7 月第 2 次印刷
印　　数 3001—9,000 册

ISBN 7-5363-3676-4/G·1259　　定价：19.80 元

前　言

本系列教材是教育部和国家民委在“九五”期间依据我国民族高等院校的教学需要而组织编写的.

民族高等院校是我国高等教育学校体系中的重要组成部分,由民族学院（大学）和民族地区高等院校两类学校组成. 目前我国共设置有12所民族学院（大学),在5个自治区及其他民族自治地方设置有普通高等院校90余所,其总数约占全国普通高等院校总数的10%. 这些院校大部分地处民族地区,直接为我国的少数民族和民族地区服务,具有鲜明的特色.

教材建设是高等院校各项建设中的一项基础性工作,直接关系到高等院校的办学特色和人才培养质量. 为了面向21世纪进行教学内容和课程体系改革,更好地体现民族高等院校课程设置和教学内容的特点,教育部和国家民委采取积极措施,有重点地加强了适用于民族高等院校教学需要的非民族类教材建设,即在公共课和专业基础课范围内,有选择地编写一批能够突出民族高等院校办学特色,适应少数民族学生的知识基础和学习特点,对提高学校教学质量起重要作用,并能够使大多数院校共同受益、适应面宽、质量较高的系列教材.

本系列教材力图较好地处理教材内容的低起点与高要求的关系,较好地处理教学内容与各民族学生文化背景的关系,较好地处理教学内容的改革与精益求精、多出精品的关系,较好地处理客观反映学科最新研究成果与循序渐进因材施教的关系等. 在这些方面,本系列教材进行了有益的探讨与尝试.

为了能够使本系列教材达到预想效果,有关部门进行了积极工作:1997年上半年,两委组织调查组对教材编写的有关情况

进行了系统调查，召开调研会7次，49所高校92人参加了座谈；1997年9月在武汉召开了本系列教材立项会议，有43所高校的代表出席会议，采取无记名投票方式对24所院校上报的297项选题进行遴选；1997年10月20日，国家民委教育司、国家教委民族教育司、高等教育司、师范教育司联合发文(教民(司)字[1997]第29号)，正式公布了首批13项15本立项教材；1998年3月30日在武汉召开本系列教材主编选定会，本着公平、公开、公正原则，通过充分协商和无记名投票方式，对20所院校申报的主编进行遴选；1998年5月13日至17日在宁波大学召开各教材主编会议，对系列教材编写原则进行确定，对编写工作进行了部署；1999年3月17日至18日在武汉召开了本系列教材编写工作座谈会，对系列教材的最后出版进行协商部署.

为了进一步规范民族高等院校的课程教学，我们在组织编写这套教材的过程中，经过充分讨论反复修改，并经专家审定，重新制订了各课程教学大纲. 在本系列教材出版发行之际，一并推荐给各高校使用.

中南民族学院和广西民族出版社为本系列教材的编写和出版做了大量的组织协调工作，保证了本系列教材的质量和按期出版.

民族院校和民族地区高等院校
立项规划教材编委会
1999年12月

目　录

第一章　函　数

函数是对现实世界中各种变量之间相互关系的一种抽象，是微积分研究的基本对象.本章将首先复习有关实数的一些基本知识，然后讨论函数的概念及其基本性质.

§1.1　实　数

1. 实数与数轴

我们知道，实数由有理数和无理数两部分组成.可以写成 $\frac{p}{q}$（p,q 为整数，且 $q \neq 0$）形式的数称为有理数，它可以是整数、有限小数或无限循环小数.而无限不循环小数则表示一个无理数.

设有一条水平直线，在这条直线上取定一点 O，称为原点，规定一个正方向（习惯上规定由原点向右的方向为正方向），再规定一个长度，称为单位长度.这种具有原点、正方向和单位长度的直线称为数轴.如图 1-1 所示.

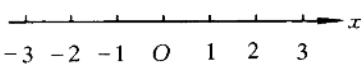


图 1-1

任一实数都对应数轴上惟一的一点.反之，数轴上每一点也都惟一地代表一个实数.这样，数轴上的点和全体实数间建立了一一对应的关系，正因为如此，以后常常将实数 a 和数轴上与它对应的点 a 看做具有相同的含义而不加区别.

实数有大、小的顺序. 设 a、b 是两个实数,则它们之间必然具有下列关系之一:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

微积分主要是在实数范围内研究函数,以后如没有特别说明,所给的数均指实数,数集均指实数集.

2. 绝对值

定义 1.1 一个实数 x 的绝对值,记为 $|x|$,定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义表示数轴上**点 x 与原点之间的距离.**

若 a、b 为实数,则由定义 1.1 可知

$$|a-b| = \begin{cases} a-b, & a \geqslant b, \\ b-a, & a < b. \end{cases}$$

$|a-b|$ 的几何意义表示点 a 与点 b 之间的距离.

绝对值及其运算有下列性质:

(1) $|x| \geqslant 0$;

(2) $|-x| = |x|$;

(3) $|x| = \sqrt{x^2}$;

(4) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$;

(5) 若 $a > 0$,则有

$\{x \mid |x| > a\} = \{x \mid x > a\} \cup \{x \mid x < -a\}$;

(6) 若 $b > 0$,则有 $\{x \mid |x| < b\} = \{x \mid -b < x < b\}$;

以上性质由绝对值的定义直接证得.

(7) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$;

由上面的性质(4) 得

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|,$$
$$-|y| \leqslant y \leqslant |y|.$$

两式相加,得

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant |x|+|y|.$$

再由性质(6),得

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|.$$

一般地,有

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|.$$

(8) $|x-y|\geqslant |x|-|y|$;

由于 $\qquad |x|=|(x-y)+y|\leqslant |x-y|+|y|,$

所以 $\qquad |x-y|\geqslant |x|-|y|$. 读者可进一步证明:

$$||x|-|y||\leqslant |x-y|.$$

(9) $|xy|=|x|\cdot|y|$;

一般地,有

$$|x_1x_2\cdots x_n|=|x_1||x_2|\cdots|x_n|.$$

(10) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}\quad(y\neq 0)$.

根据绝对值的定义,(9) 与(10) 显然成立.

例 1 解不等式 $1<|x-2|<3$.

解 由绝对值的定义,若 $x-2>0$,则有

$$1<x-2<3,\quad 即\quad 3<x<5.$$

若 $x-2<0$,则有

$$1<2-x<3,\quad 即\quad -1<x<1.$$

所以不等式的解是

$$3<x<5\quad 或\quad -1<x<1.$$

例 2 解不等式 $|x-3|>|x+1|$.

解 由绝对值的几何意义知,待解不等式表示点 x 与点 3 的距离大于点 x 与点 -1 的距离. 因此,从数轴上直接观察(图 1-2),可得不等式的解为

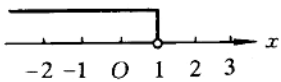


图 1-2

$$x<1.$$

3. 区间与邻域

一个变量变化的范围通常用数集表示. 全体实数的集合记为 R,全体自然数的集合记为 N,全体整数的集合记为 Z. 此外,常用的实数集合还有区间,其定义如下:

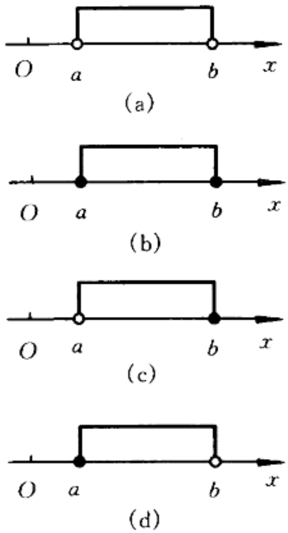


图 1-3

定义 1.2 设 $a、b \in \mathrm{R}$,且 $a < b$.

(1) 满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 x 的集合,称为以 a、b 为端点的**开区间**,记作 (a,b),见图 1-3(a). 即

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

(2) 满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的所有实数 x 的集合,称为以 a、b 为端点的**闭区间**,记作 $[a,b]$,见图 1-3(b). 即

$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

(3) 满足不等式 $a < x \leqslant b$(或 $a \leqslant x < b$)的所有实数 x 的集合,称为以 a、b 为端点的**半开区间**,记作 $(a,b]$(或 $[a,b)$),分别见图 1-3(c) 和(d). 即

$$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\},$$
$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}.$$

以上三类区间,统称为**有限区间**,$b-a$ 称为这三类区间的**区间长度**.

还有以下**无限区间**:

(4) $(a,+\infty) = \{x \mid x > a\}$,见图 1-4(a).

$[a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$,见图 1-4(b).

(5) $(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$,见图 1-4(c).

$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$,见图 1-4(d).

(6) $(-\infty,+\infty)=\{x \mid x$ 为任意实数$\}=\mathrm{R}$,即全体实数的集合.

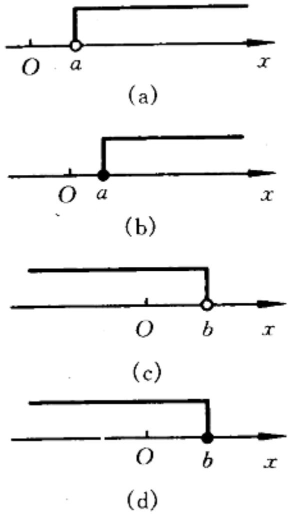


图 1-4

注意:“$+\infty$”(读作正无穷大)、“$-\infty$”(读作负无穷大)是引用的符号,不能作为数看待.

区间则泛指有限区间和无限区间.

下面引入邻域的概念.

定义 1.3 满足不等式 $|x-x_0|<\delta\ (\delta>0)$ 的所有实数 x 的集合称为**点 x_0 的 δ 邻域**,记作 $U(x_0,\delta)$ 或 $U(x_0)$. x_0 称为该**邻域的中心**,δ 称为该**邻域的半径**.

由于 $\{x \mid |x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)(\delta>0)$,所以点 x_0 的 δ 邻域也是一个以点 x_0 为中心,长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 例如,不等式 $|x-3|<\frac{1}{2}$ 所表示的数集,即是以点 $x_0=3$ 为中心,半径为 $\frac{1}{2}$ 的邻域 $U(3,\frac{1}{2})$,也就是开区间(2.5,3.5).

去掉点 x_0 的 δ 邻域内的中心点 x_0,称集合 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的**空心 δ 邻域**,记作 $U^{\circ}(x_0,\delta)$ 或 $U^{\circ}(x_0)$. 例如,不等式 $0<|x-2|<1$ 所表示的数集,即是以点 $x_0=2$ 为中心,半径为 1 的空心邻域 $U^{\circ}(2,1)=(1,2)\cup(2,3)$.

称半开区间 $(x_0-\delta,x_0]$ 为点 x_0 的**左邻域**,$[x_0,x_0+\delta)$ 为点

x_0 的**右邻域**,分别记作 $U_-(x_0)$ 和 $U_+(x_0)$. 称开区间$(x_0-\delta, x_0)$为点 x_0 的**空心左邻域**,$(x_0, x_0+\delta)$为点 x_0 的**空心右邻域**,分别记作 $U_-^{\circ}(x_0)$ 和 $U_+^{\circ}(x_0)$.

§1.2　函数概念

1. 常量与变量

在人们观察自然现象或社会现象的过程中,经常会涉及一些量,其中有的量在观察过程中不发生变化,也就是保持固定的数值,称为常量,一般用字母 $a, b, c, \cdots$ 表示;另一些量在观察过程中会不断变化,也就是可以取不同的数值,称为变量,一般用 $x, y, z, \cdots$ 表示. 例如,我们在考虑一架旅客班机的飞行过程中,乘客的数目、行李的件数等都是常量;而飞机飞行的高度,汽油的储存量等都是变量. 再如,当圆的半径变化时,圆的周长和面积都是变量,而周长与直径的比(即圆周率)却是不变的,因此是常量.

一个量是常量还是变量,要根据具体情况作出具体分析. 例如,就小范围地区来说,重力加速度可以看做常量,但地球上不同地点的重力加速度则是变量.

如果将变量看做是可以在某一非空数集内任意取值的量,则常量可看做是在单元素集合中取值的量,因而常量可看做是变量的特例.

常量在数轴上表示为一个定点,变量在数轴上则表示为一个动点.

2. 函数概念

(1) 函数的定义及其表示法.

在研究实际问题时,所涉及的几个变量之间常会具有某种确定的关系. 下面就两个变量相互联系着的情形,考察几个例子.

例 1　球体的体积 V 与它的半径 R 之间的相依关系,由公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

给定.当半径 R 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时,由上式就可以确定球体积 V 的相应数值.

例 2 图 1-5 是某地用温度自动记录仪记录的该地某天 24 小时的气温变化曲线,该曲线描述了当天气温 T 随时间 t 变化的情形.对任意时刻 $t_0 \in [0,24]$,可按曲线所示的对应规则惟一确定 t_0 时刻的气温值 T_0.

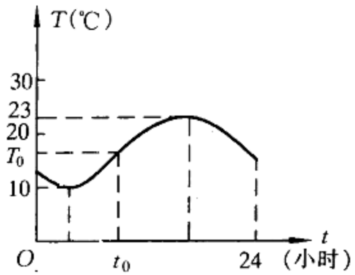


图 1-5

例 3 某商店销售某种商品,销售量 Q 与销售单价 P 的数量关系如下表:

表 1-1

P(元)	4	3.95	3.90	3.85	3.80	3.75	3.70
Q(件)	400	420	450	460	475	486	500

由表 1-1 所示的对应规则可惟一确定与销售单价 P 所对应的销售量 Q 的值.

上面三个例子的实际意义虽然不同,但它们都是通过一定的对应规则(公式、图、表)来反映两个变量之间的相依关系.从数学角度进行抽象地概括,便可得到函数的概念.

定义 1.4 设 D 为一个非空数集.如果存在一个对应规则 f,使得对于每一个 $x \in D$,都能由 f 惟一地确定一个数 y 与之对应,则称 f 为定义在数集 D 上的一个**函数**,或称变量 y 是变量 x 的**函数**,记作

$$y = f(x), \qquad x \in D.$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为函数 $f(x)$ 的**定义域**.

函数 $f(x)$ 的定义域 D 通常记作 $D(f)$. 当定义域为区间时，则称为**定义区间**.

如果 $x_0 \in D(f)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义；如果 $x_0 \notin D(f)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 没有定义. 对于每一个 $x_0 \in D(f)$，因变量 y 的相应取值，称为函数 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

全体函数值的集合称为函数的**值域**，通常记作 $f(D)$，即

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D(f)\}.$$

例如在上述几例中：

例 1 中函数的对应规则 f 是由一个公式表示，球体体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$，定义域 $D(f) = (0, +\infty)$，值域 $f(D) = (0, +\infty)$；例 2 中 f 是由图 1-5 所示的曲线表示，定义域 $D(f) = [0,24]$，值域 $f(D) = [10,23]$；例 3 中 f 是由表 1-1 所示的表格给定，定义域 $D(f) = \{4, 3.95, 3.90, 3.85, 3.80, 3.75, 3.70\}$，值域 $f(D) = \{400, 420, 450, 460, 475, 486, 500\}$.

在平面直角坐标系中，取自变量 x 在横轴上变化，因变量 y 在纵轴上变化，则平面点集 $\{(x,y) \mid y = f(x), x \in D(f)\}$ 即为定义在 $D(f)$ 上的函数 $y = f(x)$ 的图形.

在函数定义中，要求对每一个 $x \in D$，都有惟一确定的 y 值与之对应. 但我们也常常遇到另一种关系，例如圆的方程 $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$，对于每一个 $x \in (-a, a)$，都有两个 y 值与之对应，这就不符合前面函数的定义了. 但为了方便，我们把对于非空集合 D 中的 x 值有多个 y 值与之对应的关系称为多值函数，而前面定义的函数关系可称为单值函数. 如果不做特别说明，本书中提到的函数均指单值函数. 对于多值函数 $x^2 + y^2 = a^2$，可以把它分成两个单值函数 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 与 $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$，在图形上两个单值分支分别