

北京工程图学学会
学术年会论文选集

启功题籤

北京工程图学学会

一九九三年九月 北京

北京工程图学学会
一九九三年九月
PDG

前 言

为了迎接北京工程图学学会第四届代表大会暨学术年会,出版了这本论文选集。它反映了北京图学学会的会员们自 1990 年以来,在工程图学学术研究中取得的部分成果。

这次年会征文共投来稿件近百篇。经过各专业委员会初审,又经年会学术委员会复审,从来稿中选出 42 篇论文纳入本论文选集。其中包括理论图学和应用图学方面的 7 篇;计算机图学和计算机辅助设计方面的 17 篇;计算机辅助教学方面的 6 篇;教学改革及教学研究方面的 10 篇以及标准化方面的 2 篇。

从所征集的论文来看,在质量上比以往又有所提高,这主要体现在理论深度的提高、研究领域的拓宽以及应用范围的发展等方面。还可以看到一些年轻的作者写出较高质量、颇有新意的论文,学术委员们感到本学科的发展大有希望,研究队伍后继有人。但是也应当看到,本学科各个领域的发展是不平衡的,多数的力量都集中在计算机图学和图学教学研究上,对其它方面在人力上则有滑坡的倾向,这需要学会给予关注。

参加本论文集审编工作的学术委员会成员有:周积义、赵擎寰、曾英、叶玉驹、张雄飞、王 光、张云鹤、陈其明、陈谷新、汪 恺、卢树森、吴 忠等教授、高工和副研。高政一教授和曹卢霖副教授也应邀参加了论文的评审工作。论文集的主编为叶玉驹教授。

由于时间仓促,论文集中难免有不妥之处,望读者批评指正。

北京工程图学学会
1993 年年会学术委员会
1993 年 9 月

北京工程图学学会学术年会 论文选集

1993年9月

目 次

1. 三次曲线射影分类的研究 (一)对现有射影分类法的讨论
..... 陈谷新(1)
2. 三次曲线射影分类的研究 (二)射影分类的新方案
..... 陈谷新(9)
3. 四维画法几何中的曲线投射法
..... 焦永和(18)
4. 三次曲面上的直纹、圆锥截线和投影轮廓线
..... 周克绳(24)
5. 轴测投影的原形及刚体运动参数的计算
..... 赵正魁(29)
6. n 度矢量模糊空间图象理论与应用研究
——模糊逻辑的图象化探索之三
..... 张云鹤(35)
7. 六关节机器人运动学逆问题的几何法
..... 许纪倩(44)
8. 外寄生式特征建模及三维造型的实现
..... 池建斌 董秉枢(50)
9. 二次B样条曲线的剪裁算法
..... 万 静(55)
10. 涡卷螺旋弹簧的CAD
..... 庞永军 万贵香 李亚青(60)
11. 三维纹理的生成与显示
..... 邓 昀 周克绳(65)

12. 迭代函数系统在自然景物仿真中的应用
..... 周光辉 周克绳(70)
13. 微机互补色体视图生成的研究与实践
..... 董国耀 郭朝勇 马 军(73)
14. 两眼视计算机体视技术
..... 王 飞(77)
15. 运用 STEP 文件实现 CAD/CAM 中的数据交换和共享
..... 强 斌 孟明辰 王 革(86)
16. 工程图形识别中一种有效的矢量跟踪方法
..... 张志鸿 童秉枢(92)
17. 医用 X 光机图象处理系统 XZC-1
..... 陈嘉惠 陈昭民 何延生 阎振东(98)
18. 基于边界表达法的实体模型三角化方法研究
..... 胡禄山 徐 斌 黄彭龄(101)
19. 分数维图形的研究、实现和应用
..... 刘静华 王永生(109)
20. 一个三维模拟仿真图形系统
..... 施 寅(118)
21. 用于控制系统仿真的图形输入软件——GAD 的研制
..... 马 蔺 汤淑春(126)
22. 随机分形模拟欧式平面纹理
..... 邓 昀 周克绳(131)
23. 从实体造型到产品特征建模
..... 孟明辰 强 斌 王 革(134)
24. 地学数据可视化形式与方法
..... 俞全宏(140)
25. 我国工程图学教学改革概况
..... 叶玉驹(144)
26. 试论机械设计类课程群体改革中 CAD 教学的地位与实施
..... 童秉枢 雷田玉(149)
27. CAI 在工程制图课中的应用
..... 高政一 刘朝儒 王志蕴 谢国利(154)
28. 考试系统自动组卷数学模型
..... 范民政(160)

29. 画法几何及投影制图考试系统(机械类)的研制和应用	高秀民(164)
30. 智能型画法几何考试命题系统的开发	窦忠强(169)
31. 考试成绩分析管理及试卷评价计算机软件系统	庞永军(176)
32. 模糊数学在计算机选题过程中的应用	崔铸(181)
33. 组合体的树形结构	沈惠源(184)
34. 关于结合制图课程教书育人的实践和经验	彭福荫 高政一(190)
35. 工程图学构型设计的理论体系及实施	董国耀(196)
36. 论图学思维	高宝蕙(201)
37. 形象思维与制图教学	魏宗仁 高政一 彭福荫(207)
38. 系统思想与制图教学	高政一 彭福荫 魏宗仁 张天东(213)
39. 适应现代化要求,改革机械制图教材和教学	董国耀 陈英梁 刘鹤杰 林宏(218)
40. 改革教学内容,提高学生能力 ——工程图学部分内容的改革与实践	宋子玉(222)
41. 对螺纹标准的分析	蒋知民(228)
42. 事物特性表与 CAD 标准件库	宋子玉(236)

PROCEEDINGS OF
BEIJING ENGINEERING GRAPHICS SOCIETY

SEPTEMBER 1993

CONTENTS

1. Study of projective classification of cubic curves
(1) Discussion about current classification
..... Chen Guxin(1)
2. Study of projective classification of cubic curves
(2) A new scheme for projective classification
..... Chen Guxin(9)
3. Curvilinear projection in descriptive geometry of four dimensions
..... Jiao Yonghe(18)
4. Straight lines, conics and contour lines on a cubic surface
..... Zhou Kesheng(24)
5. Original shape of an axonometrical projectional figure
and calculation of kinematic parameters for a rigid body
..... Zhao Zhengkui(29)
6. A graphical theory in n -D vector-fuzzy-space and its application——
The third round probe into the graphic representation for fuzzy logic
..... Zhang Yunhe(35)
7. A geometric approach for solving the inversed kinematic
problem of six-link manipulators
..... Xu Jiqian(44)
8. The realization of ectoparasitic feature-based 3-D modeling
..... Chi Jianbin Ton Bingshu(50)
9. Clipping algorithm for 2-D B-spline curves
..... Wan Jing(55)

10. Computer aided design of worm spring
 Pang Yongjun Wan Guixiang Li Yaqing(60)
11. The generation and display of 3-D texture
 Deng Yun Zhou Kesheng(65)
12. The application of IFS in the simulation of natural scenery
 Zhou Guanghui Zhou Kesheng(70)
13. Study and practice of the generation of complementary-color
 stereogram with a microcomputer
 Dong Guoyao Guo Chaoyong Ma Jun(73)
14. Binocular view computer stereo technique
 Wang Fei(77)
15. Data exchanging and sharing in CAD/CAM by STEP files
 Qiang Bin Meng Mingchen Wang Ge(86)
16. An efficient vector tracing method in engineering
 drawing recognition
 Zhang Zhihong Ton Bingshu(92)
17. A medical X-ray image processing system XZC-1
 Chen Jiahui Chen Zhaomin He Yansheng Yan Zhendong(98)
18. Triangularization of solid model based on B-rep.
 Hu Lushan Xu Bin Huang Pengling(101)
19. A study and implementation of fractal figures
 Liu Jinghua Wang Yongsheng(109)
20. A 3-D graphics system for simulation and emulation
 Shi Yin(118)
21. The design of a graphic aided input software for
 control system simulation——GAD
 Ma Lin Tang Shuchun(126)
22. Random fractal simulation of Euclidean plane texture
 Deng Yun Zhou Kesheng(131)
23. From solid modelling to product feature modelling
 Meng Mingchen Qiang Bin Wang Ge(134)
24. Forms and algorithms of geoscientific data visualization
 Yu Quanhong(140)

25. A survey of engineering graphics teaching reform in our country
 Ye Yuju(144)
26. The role and implementation of CAD education in the
 reform of integrated mechanical design curriculums
 Tong Bingshu Lei Tianyu(149)
27. The application of CAI in engineering graphics
 Gao Zhengyi Liu Chaoru Wang Zhiyun Xie Guoli(154)
28. A math model of automatic paper setting of an examination system
 Fan Minzheng(160)
29. Research and application of 《Examination System for
 Discriptive Geometry and Projection Drawing》 (For
 mechanical engineering speciality)
 Gao Xiumin(164)
30. Intelligent examination paper setting system for descriptive geometry
 Dou Zhangqiang(169)
31. Computer software system for management of evaluation
 of examination papers
 Pang Yongjun(176)
32. The application of Fuzzy mathematics to selecting
 exercises with computers
 Cui Zhu(181)
33. Tree sturctures for composite solid
 Shen Huiyuan(184)
34. The practice and experience of coupling graphics teaching
 with the moral upbringing
 Peng Fuyin Gao Zhengyi(190)
35. Theoretical system and implement of engineering graphics
 configuration design
 Dong Guoyao(196)
36. On the thought of graphic science
 Gao Baohui(201)
37. Thinking in images in graphics teaching
 Wei Zongren Gao Zhengyi Peng Fuyin(207)

38. The application of system thought in graphics teaching
 Gao Zhengyi Peng Fuyin Wei Zongren Zhang Tiandong (213)
39. Reforming the textbook and teaching method of mechanical
 drawing to suit the needs of modernization
 Dong Guoyao Chen Yingliang Liu Hejie Lin Hong (218)
40. Reform the content of teaching, improve the students' ability
 —— Reform and practice of partial content on engineering graphics
 Song Ziyu (222)
41. The analysis of thread standard
 Tiang Zhimin (228)
42. Property list and database of standardized elements
 Song Ziyu (236)

三次曲线射影分类的研究

(一)对现有射影分类法的讨论

北京农业工程大学 陈谷新

摘 要

对牛顿提出的有关三次曲线的一个断言进行了详细地分析和讨论,提出了不同的见解。对索科洛夫分类法作了简要讨论。

随着计算机图形学的发展,高阶代数曲线,尤其是三阶代数曲线(简称三次曲线)的理论正日益得到人们的重视。

对于三次曲线的系统研究大约已有 300 多年的历史。著名科学家牛顿第一个对三次曲线进行广泛深入的研究,并作出科学的分类。牛顿的工作曾激发了许多学者对高阶代数曲线的兴趣,关于 3、4 阶代数曲线的分类问题曾是 18、19 世纪一个热门的课题^[1]。据不完全统计,到目前为止,根据这个或那个原则作出的关于三次曲线的分类方案已达 10 余种之多。著名的学者如欧拉(Euler, 1743),普吕克(Plücker, 1837),凯来(Cayley, 1866),高尔丹(Gordan, 1900)等均提出了各自的分类法^[2]。

对于研究三次曲线的作图理论来说,一个基本的任务是作出它的射影分类。所谓射影分类,就是根据曲线在中心投影下保持不变的性质加以分类。

1704 年发表的三次曲线牛顿分类法不是射影分类法。牛顿生活的年代(1642~1727),射影几何尚处于创建阶段,射影分类的概念尚未出现;但牛顿曾深入研究过三次曲线的中心投影问题,提出了一个著名的“断言”,实质上提出了一个射影分类法。本文着重对此进行分析讨论,并提出了不同的见解。

大约在牛顿之后 200 年,高尔丹作出了第一个三次曲线的射影分类法。他将三次曲线置于复射影坐标系中,用 10 个最简方程表示全部曲线,其中 4 个表示常态曲线;6 个表示退化曲线。

1955 年原苏联学者索科洛夫发表了题为《实平面三阶代数曲线的射影分类》一文(Соколов Н. П. «Проективная Классификация Вещественных Плоских Линий Третьего Порядка»),所提出的

• 克莱因把牛顿断言称做“射影定理”,并指出,该定理由克劳特和尼可尔给出证明,这些资料国内难以见到

分类是将高尔丹分类修改和补充而成。分类中共给出 15 个最简方程,其中 5 个表示常态曲线,其余的表示退化曲线。本文对此作了简要的讨论。

本文并非仅仅对已有的射影分类法进行一些讨论,主要的目的是,试图提出一个更合理和完善的射影分类方案。本文第二部分研究各种三次曲线的最简方程及各种曲线在射影结构上的差别,最后归纳出一个新的射影分类方案。

1 对牛顿断言的分析与讨论

1.1 三次曲线牛顿分类法简介

为了对三次曲线有一个全面概括的了解,为了了解牛顿断言的内容,有必要对牛顿分类法作一简要介绍。

平面上一条任意的三次曲线在任意给出的仿射坐标系中的方程可表示如下:

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 + 3Hx + 3Ky + L = 0 \quad (1)$$

牛顿证明了,任一曲线通过初等交换就可以变换成下面 4 个标准形式之一

$$\left. \begin{array}{l} A: xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ B: xy = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ C: y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ D: y = ax^3 + bx^2 + cx + d \end{array} \right\} \quad (2)$$

牛顿将全部三次曲线分成 4 个形式(form),7 个类(class),72 个型(type)。在形式 A 的类与型之间还分成若干种(kind),详见表 1。

表 1 三次曲线牛顿分类概况

形 式	类 别	种 别	型(数)	曲 线 名 称	附 注
A	1	1.1	9	双曲双曲线	无 轴
		1.2	12	双曲双曲线	单 轴
		1.3	2	双曲双曲线	3 轴
		1.4	9	双曲双曲线	3 渐近线共点
	2	2.1	6	残缺双曲线	无 轴
		2.2	7	残缺双曲线	单 轴
	3	3.1	7	抛物双曲线	无 轴
		3.2	4	抛物双曲线	单 轴
	4	4.1	4	双曲化圆锥曲线	双曲化双曲线
		4.2	3	双曲化圆锥曲线	双曲化椭圆
		4.3	2	双曲化圆锥曲线	双曲化抛物线
B	5		1	三叉戟曲线	
C	6		5	发散抛物线	
D	7		1	立方抛物线	

7 类曲线按其形状特征来看可分成 5 种类型:(1) 有卵形曲线;(2) 无卵形曲线;(3) 孤点曲线;(4) 结点曲线;(5) 尖点曲线。这些不同曲线在牛顿分类中分布情况如表 2。

表 2 5 种类型曲线在牛顿分类中分布情况

类 型(代号)	1	2	3	4	5	6	7
有卵形曲线(T_1)	○	○	○			○	
无卵形曲线(T_2)	○	○	○		○	○	
孤点曲线(T_3)	○	○	○	○		○	
结点曲线(T_4)	○	○	○	○		○	
尖点曲线(T_5)	○	○	○	○		○	○

第 6 类发散抛物线的 5 个类型曲线如图 1 所示。

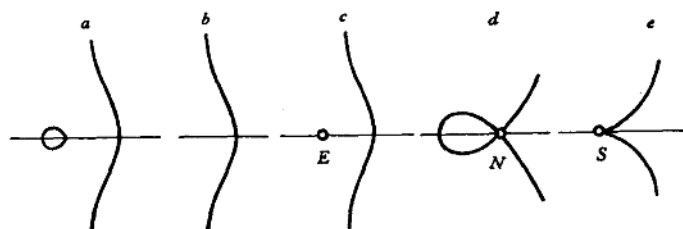


图 1 第 6 类中 5 种不同曲线

牛顿分类法属于仿射分类范畴。

1.2 牛顿断言及分析

克莱因在《古今数学思想》一书中写道：“牛顿断言，先从一点出发对这 5 种曲线之一作射影，然后取射影的交线就能分别得到每一个三次曲线”^[1]。(原文“Newton affirmed that every cubic curve can be obtained by projection one of these five types from a point and then by a section of the projection”)^[3]

此段文字较简，含义不十分明确，为此有必要进行一些分析。

根据“从一点出发……取射影的交线”来看，首先应在已知曲线所在平面外取一点 S 作为投影中心，并另取一平面 π 作为投影面，然后由中心 S 将曲线投影到平面 π 上。因为只有这样，才能使“射影的交线”为一条常态的三次曲线(注意到牛顿分类不涉及退化曲线)。因此，断言中“作射影”一词的确切含义无疑是“作投影”。若 S 为固有点则是中心投影；若 S 为非固有点则为平行投影。在射影空间中这两者并无区别，故可统一用“投影”一词表达。

断言中的“5 种曲线”是明确的，即牛顿分类中第 6 类所属 5 种不同类型的曲线(图 1)，问题是“对 5 种曲线之一作射影”应如何理解。可能有如下 3 种不同解释。

(1) 从发散抛物线的 $T_1 \sim T_5$ 中取出一种，然后对它的所有曲线 $a_1, a_2, \dots$ 逐一进行投影，从而得到“每一个曲线”。这个解释从字面上看比较符合，但实质上是完全错误的。假定 a 是 T_1 中的一条曲线，那么，由 a 是根本不可能投影出属于 $T_2, T_3, \dots$ 的曲线的，因此这一解释完全不符合牛顿的原意。

(2) 将 5 种曲线的每一种、每一条曲线逐一进行投影。这个解释实际上就是“对全体第 6 类曲线作射影”，这显然与断言不符，因为断言中明确指出“对 5 种曲线之一作射影”。退一步

说,即使所做解释是正确的,但从理论看则也是并无多大价值的。

(3) 从第 6 类的 5 种曲线中各取一条,将这 5 条曲线逐一进行投影,从而得到每一个三次曲线。这个解释比较合乎断言的原意的。以下将按这个理解对断言进行讨论。为了确切起见,将断言改造成如下命题。

命题 A 从发散抛物线的 5 个不同类型中各取一条曲线,将它们置于不同的投影环境中(选取不同的中心 S 和画面 π)逐一进行投影,便可以得到每一个三次曲线。

设 a, b, c, d, e 分别为发散抛物线中不同类型的曲线,如果命题 A 成立,那么必满足如下条件(参看表 2)。

- (1) 由曲线 a 可以投影出第 1, 2, 3, 6 类中型 T_1 的每一个曲线;
- (2) 由曲线 b 可投影出第 1, 2, 3, 5, 6 类中属于 T_2 的每一个曲线;
- (3) 由曲线 c 可投影出第 1, 2, 3, 4, 6 类中属于型 T_3 的每一个曲线;
- (4) 由曲线 d 可投影出第 1, 2, 3, 4, 6 类中属于型 T_4 的每一个曲线;
- (5) 由曲线 e 可投影出第 1, 2, 3, 4, 6, 7 类中属于型 T_5 的每一个曲线。

如果上述 5 种情况中出现一个例外,比如若曲线 a 不能投影出属于 T_1 的曲线 a' ,那么命题 A 便不成立,因为未能满足“得到每一个三次曲线”的要求。

1.3 对断言的讨论

确定命题 A 的真伪涉及到一些基本问题,如三次曲线的基本性质,射影变换与透视投影的关系等。

1.3.1 射影对应与透视对应的关系

两个平面间的射影对应若有若干不同形式,以下 3 种形式与本问题直接有关(图 2)。

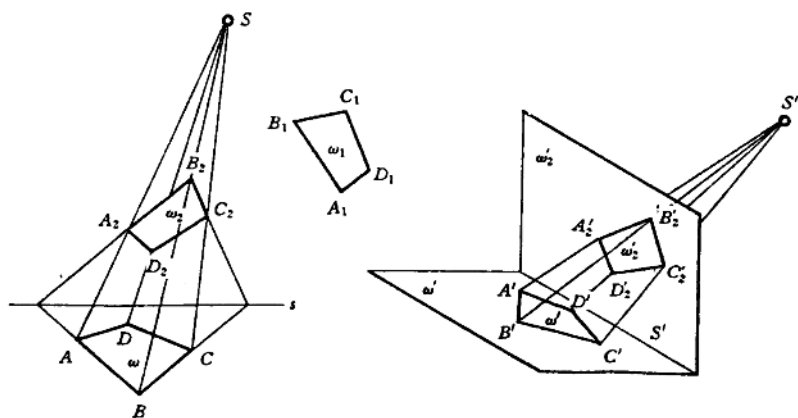


图 2 射影对应与透视对应的关系

- (1) 共底的射影对应:由 $ABCD(\omega)$ 与 $A_1B_1C_1D_1(\omega_1)$ 所确定的同素对应。
- (2) 共底的透射对应:由 $ABCD(\omega)$ 与 $A_2B_2C_2D_2(\omega_2)$ 所确定的射影对应。这是一种具有中心 S 和轴 s 的射影对应。
- (3) 两个平面间的透视对应:由平面 $\omega'(A'B'C'D')$ 与 $\omega'_2(A'_2B'_2C'_2D'_2)$ 所确定的射影对应,

在这个对应中对应点连线均通过中心 S 。透视对应也就是中心投影。

射影对应与透视对应的关系可通过以下定理说明。

定理 共底两平面的射影对应, 可以通过改变其中一个平面的位置而使两者达到透视对应。

此定理可由射影几何中以下两个定理直接推出^[4]。

(1) 共底两平面的射影对应, 通过移动其一就可以使两者成为透视对应^[5]。

(2) 两个透射对应的图形, 若将其一绕透射轴转过任一角度使两平面不重合, 则此两图形便成为透视对应。

参看图 2, ω 与 ω_1 成射影对应, 将 ω_1 平移到 ω_2 , 则 ω 与 ω_2 成透射。令 ω 不动, 将平面 ω_2 绕 s 转过任一角度, 则两者成透视, 如图 2 中右图所示。

由此可知, 射影对应与透视对应可以通过运动而互相转化。现作出一个新命题。

命题 B 从发散抛物线的 5 个不同类型中各取一条曲线, 将它们置于不同射影环境中(选取不同的射影变换参数)逐一进行变换, 便可以得到每一个三次曲线。

显然, 若证明命题 B 成立, 则命题 A 也成立; 若命题 B 不成立, 则命题 A 也不成立。

1.3.2 三次曲线的自由度

平面上任一三次曲线在任意给出的射影坐标系中的齐次方程可表示如下

$$f = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2z + 6Fxyz + 3Gy^2z + 3Hxz^2 + 3Kyz^2 + Lz^3 = 0 \quad (4)$$

式(4)中的 10 个系数 $A, B, \dots, L$ 并非完全独立的, 可以自由选择个数与曲线的类型有关, 对某一类型曲线允许自由选取的系数的个数, 称它为该种曲线的自由度, 用符号 n 表示, 有 3 种情况。

(1) $n=9$ 。这种曲线只受一个方程(4)的约束。有卵形的曲线(T_1)及无卵形的曲线(T_2)中一部分属于这种情况。

(2) $n=8$ 。在 T_1 和 T_2 中的曲线均存在 3 个实拐点, 设为点 P, Q, R , 其切线分别为 $p(p_1, p_2, p_3), q(q_1, q_2, q_3)$ 及 $r(r_1, r_2, r_3)$, 一般情况下 p, q, r 不共点, 当 3 切线共底时必满足以下条件

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

式中 p_i, q_i, r_i 为直线坐标。这些坐标均为曲线方程(4)中系数的函数。式(5)等于给这种曲线增加了一个约束条件, 因而系数 $A \dots L$ 中可供自由选择的只有 8 个。在无卵形的曲线 T_2 中存在这种情况, 在 T_1 中则不存在, 若 p, q, r 交于点 S , 此时过 S 向曲线所做的切线数将大于 6 条, 而这是不可能的。

(3) $n=7$ 。当三次曲线具有二重点时(T_3, T_4, T_5), 二重点尚满足以下两条件

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Exz + 2Fyz + Hz^2 = 0 \quad (6)$$

$$Bx^2 + 2Cxy + Dy^2 + 2Fxz + 2Gyz + Kz^2 = 0 \quad (7)$$

将二重点的坐标代入以上二式即得系数应满足的条件 2 个, 故曲线自由度为 7。

曲线的自由度具有射影不变性, 由此可作出结论。

两条三次曲线成射影对应的基本条件是, 两者的自由度必相等。

从实际情况看是很明显的, 例如, 一条具有卵形的曲线($n=9$), 不可能与有尖点的曲线(n

1.3.3 三次曲线的射影变换

$$\rho \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}_t \quad (8)$$

不难看出, 曲线 t_i 的系数 $(A_i, B_i, \dots, L_i)$ 都是由 t 的系数 $(A, B, \dots, L)$ 与变换系数 a_j 组成的代数多项式。

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{B_1}{B_0} = \frac{C_1}{C_0} = \dots\dots\dots = \frac{L_1}{L_0} \quad (9)$$
$$\left. \begin{aligned} L_0 A_1 - L_1 A_0 &= 0 \\ L_0 B_1 - L_1 B_0 &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ L_0 K_1 - L_1 K_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

当已知曲线 l 和 l_0 均为 $n=9$ 的条件下, 由于自由选择的系数为 9 个, 因而 m 常为 9, 即一般情况下不可能通过射影变换将 l 变换成 l_0 。

$$H = K = L = 0, \quad H_0 = K_0 = L_0 = 0$$
$$e; \quad Ax^3 + 3Bx^2y + 3Csy^2 + Dy^3 + 3Ex^2z + 6Fxyz + 3Gy^2z = 0 \quad (11)$$

$$e_0: A_0x^3 + 3B_0x^2y + 3C_0xy^2 + D_0y^3 + 3E_0x^2z + 6F_0xyz + 3G_0y^2z = 0 \quad (12)$$

将 e 作射影变换成 e_1 , 使 e_1 之二重点仍处于原点, 于是变换式 (8) 中的系数

$$a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{33} = \rho$$

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{B_1}{B_0} = \frac{C_1}{C_0} = \frac{D_1}{D_0} = \frac{E_1}{E_0} = \frac{F_1}{F_0} = \frac{G_1}{G_0} \quad (13)$$

对于 $n=8$ 的情况与 $n=7$ 的情况类似,不重述。

例 已知曲线 b_1, b_2 均属于 T_2 (图 3), 在同一扩充笛卡尔坐标系中的方程为

$$b_1: y^3 = x^3 - 1$$

$$b_2: xy^3 = x^3 - 1$$

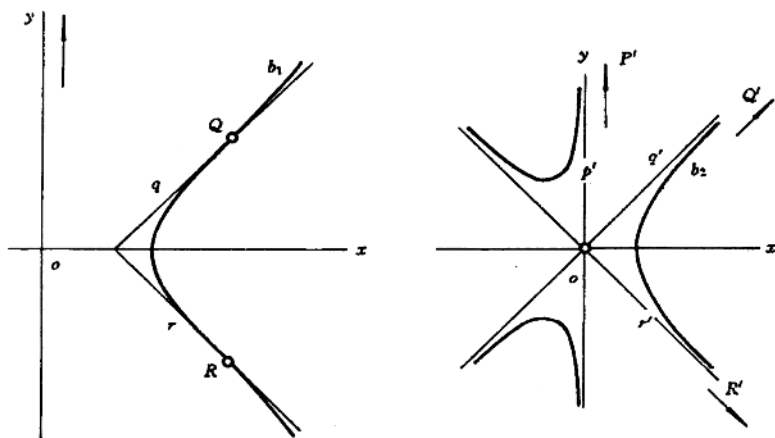


图3 b_1 与 b_2 射影不等

曲线 b_1 的拐点 P, Q, R , 其切线 p, q, r 不共点 (p 为非固有直线)。曲线 b_2 的拐点 P', Q', R' (均为非固有点), 其切线 p', q', r' 共点 o 。故 b_1 的自由度为 9, b_2 为 8。所设条件下, 不论如何选择变换参数 a_{ij} , 不可能将 b_1 变换成 b_2 , 即两者射影不等。

1.3.4 结论

(1) 命题 B 不真

以上分析表明, 属于 T_1 或 T_2 ($n=9$) 的曲线, 一般情况下, 不可能由其中一条变换成另一条。属于 T_2 中 $n=8$ 的曲线与 $n=9$ 的曲线绝对不可能由一条变换成另一条。由于存在着这样一些情况使命题 B 中规定的条件不能全部满足, 因而该命题不成立。

(2) 命题 A 不真

由于命题 B 不成立, 故命题 A 也不成立。

(3) 若牛顿断言与命题等价, 则牛顿断言不真; 若牛顿断言另有解释, 则当另作探讨。

2 对索科洛夫分类法的讨论

2.1 索科洛夫分类法简介

该分类将三次曲线置于实射影坐标系中, 用 15 个最简方程表示之, 其中 1~5 表示常态曲线; 6~15 表示退化曲线。

- | | |
|-----------------------------------|--------|
| (1) $x^3 + y^3 + z^3 + 6mxyz = 0$ | 无二重点曲线 |
| (2) $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ | 无二重点曲线 |
| (3) $y^3 + z^3 + 6xyz = 0$ | 结点曲线 |
| (4) $3xy^2 + z^3 = 0$ | 尖点曲线 |
| (5) $3x^2y + 3y^2z + z^3 = 0$ | 孤点曲线 |
| (6) $x^3 + 6xyz = 0$ | 退化三次曲线 |

- | | |
|-------------------------------|--------|
| (7) $3xy^2 + 3x^2z = 0$ | 退化三次曲线 |
| (8) $3x^2y + 3yz^2 - y^3 = 0$ | 退化三次曲线 |
| (9) $3x^2y + 3yz^2 + y^3 = 0$ | 退化三次曲线 |
| (10) $6xyz = 0$ | 退化三次曲线 |
| (11) $3x^2y - y^3 = 0$ | 退化三次曲线 |
| (12) $3y^2z = 0$ | 退化三次曲线 |
| (13) $x^3 = 0$ | 退化三次曲线 |
| (14) $3x^2y + 3yz^2 = 0$ | 退化三次曲线 |
| (15) $y^3 + z^3 = 0$ | 退化三次曲线 |

以上方程转引自文献[2],书中未给出详细推导。

2.2 讨论

在第(1)的式式中有一个待定系数 m ,第(2)、(3)、(4)的式子中则全部系数均为已知值,这表明在无重点的曲线中第(1)与第(2)之间有差别;有重点曲线与无重点曲线之间存在差别,这一点与以上所做分析一致。对于两条同属于第(1)的式子但 $m_1 \neq m_2$ 的曲线,显然不可能通过射影变换将其中一条变换成另一条,这一结论与以上分析也一致。

此分类法存在两个问题:

- (1) 未将有卵形与无卵形曲线区分开,以从射影分类角度看,有必要进一步精确化。
- (2) 分类中有重叠现象。

设 $m = q/p$,则第(1)的式子可写作

$$p(x^3 + y^3 + z^3) + qxyz = 0$$

当 $q=0$,得 $x^3 + y^3 + z^3 = 0$,与第(2)的式子重复;

当 $p=0$,得 $xyz=0$,与第(10)的式子重复;

当 $m=-3$,得 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$,此式可分解成

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

即由一实直线与一虚二次曲线组成,这与第(9)的式子所表示的为同一类曲线。

因此这一分类法尚存在不完善之处。

参 考 文 献

- 1 克莱因 M. 古今数学思想(二). 上海:上海科技出版社,1979,292~294
- 2 Сморжевский А. С., Столова Е. С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. Москва: Госу. Изд. Физмат. Литературы, 1961, 1~44
- 3 Morris Kline. Mathematical thought from ancient to modern times. New York: Oxford Univ. Press. 1972, 548
- 4 狄隆涅 Б. Н. 解析几何学(二). 北京:高等教育出版社,1957. 11, 295~298.
- 5 陈谷新. 投影变换. 北京:北京农业工程大学,1981, 89~120