高等数学

习题课指导

王志平　主编　赵连昌　主审

大连海事大学出版社

内容简介

本书是遵照高等数学教学基本要求、并与同济大学数学系主编的《高等数学》(第五版)配套的一本习题课指导书,可作为非数学专业本科生及专科生高等数学习题课的教材或主要参考书。全书共12章,每章包括主要题型、主要概念、主要结论、典型例题分析、测试题、参考答案等。各章例题丰富,题型多样,每种题型都有相应的解题方法、详尽的分析及小结。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课指导/ 王志平主编．—大连 ：大连海事大学出版社，2008.9
ISBN 978-7-5632-2238-4

Ⅰ．高…　Ⅱ．王…　Ⅲ．高等数学—高等学校—习题　Ⅳ．O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 150362 号

大连海事大学出版社出版
地址:大连市凌海路1号　邮政编码:116026　电话:0411-84728394　传真:0411-84727996
http://www.dmupress.com　E-mail:cbs@dmupress.com
大连天正华延彩色印刷有限公司印装　大连海事大学出版社发行
2008年9月第1版　　2008年9月第1次印刷
幅面尺寸:185 mm×260 mm　　印张:18.25
字数:448千　　印数:1～4000册
责任编辑:董玉洁　　版式设计:冰　清
封面设计:晴　阳　　责任校对:苏炳魁
ISBN 978-7-5632-2238-4　　定价:30.00元

前　言

习题课是高等数学教学的一个重要环节。然而，现在由于课时少、内容多，往往没有时间上习题课，对每种题的题型、解题思路、解题技巧很少涉及，这势必影响课堂教学的效果。为了解决这一矛盾，使学生对每章的主要概念有深刻的理解，对每章的内容有充分的了解，对每章的题型的范围、难易程度、解题方法有较熟练的掌握，我们组织了几位长期担任高等数学教学任务，且效果较好的教师编写这本《高等数学习题课指导》。

本书有如下特点：

第一，全书注重以解题方法为主，列举了大量的典型例题。

第二，将每章的题目分类归纳，总结出解各种类型题目的方法和途径。

第三，对许多典型例题进行详尽的分析，以帮助学生学会如何解题。

第四，每章都列举了许多综合性的例题。

本书共分 12 章，每章均与同济大学编的《高等数学》(第五版)各章对应。第 1 章、第 3 章由王志平编写，第 2 章由王兰芝编写，第 4 章由孙怡东编写，第 5 章由王昕编写，第 6 章由刘英编写，第 7 章由邓秋红编写，第 8 章由朱全英编写，第 9 章由张会生编写，第 10 章由任英编写，第 11 章由王科伦编写，第 12 章由张颖编写，全书由赵连昌校审，最后由王志平整理定稿。

在本书编写过程中，始终得到数学系其他老师的支持和帮助，在此表示衷心的感谢。由于编者水平有限，书中难免会有疏漏和错误，恳请广大读者批评指正。

编　者

2008 年 8 月

目 录

第1章　函数与极限

§1.1　主要题型

1. 关于函数的概念及各种性质的问题
2. 关于无穷小、无穷大的问题
3. 求极限的问题
(1) 利用化简法(分子有理化,分母有理化,恒等变形)
(2) 利用两个重要极限
(3) 利用等价无穷小
(4) 利用 x_n 的递推公式
(5) 利用单调有界准则
(6) 利用两边夹法则
(7) 利用函数极限与数列极限的关系
(8) 利用无穷小量的性质
(9) 如何确定极限中的常数值
4. 连续与间断的问题
(1) 讨论分段函数在分段点处的连续性(判断分段点的类型)
(2) 利用连续性,求表达式中的常数
5. 证明题(利用闭区间上连续函数的介值定理)

§1.2　主要概念

(1) 有关函数的基本概念:函数定义、复合函数、反函数、初等函数、函数的有界性、函数的单调性、函数的奇偶性、函数的周期性.

(2) 有关极限的基本概念:数列极限定义、函数极限定义、无穷小定义、无穷大定义、无穷小的比较.

(3) 有关连续的概念:函数在点 a 处连续的定义、函数在点 a 处左连续和右连续的定义、函数在区间上连续的定义、间断点及其分类.

概念评注

1. 函数概念

(1) 给定一个函数 $y=f(x)$,就是给定了它的对应法则"f"及定义域"D";反之亦然,即函数 $y=f(x)$ 与元素对 (f,D) 互相唯一确定,称元素对 (f,D) 为函数的两要素.

(2) 两个函数 $y=f(x)(x\in D_1)$,$y=g(x)(x\in D_2)$ 相等的充分必要条件是 $D_1=D_2$,且对每一个 $x\in D_1=D_2$,$f(x)=g(x)$.

(3) 两个函数可以复合的条件是中间变量的值域包含在因变量的定义域内,如函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=2+x^2$ 就不能复合.

(4) 分段函数可能是初等函数也可能不是初等函数,如符号函数

$$y=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0\end{cases}$$

不是初等函数. 但 $y=|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0\end{cases}$ 为初等函数.

2. 极限概念

(1) 任意给定正数 ε 的意义:在极限定义中,ε 是"任意给定的正数". ε 的任意性有两方面的含义:在给定以前,可以从全体正数中进行任意选择;ε 的给定性,指一旦选定以后,ε 就是一个固定的数,用字母 ε 表示,而绝不能用一个具体的正数来代替它.

(2) 对同一个 ε,所对应的 N(或 δ) 并非唯一,但只要求出其中的一个即可.

3. 函数连续概念

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续,则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=f(\lim_{x\to x_0} x).$$

这说明,对连续函数而言,可以交换"f"和"$\lim\limits_{x\to x_0}$"的顺序,也说明了当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 的极限等于 $f(x_0)$.

(2) 初等函数在定义区间内连续,而不是在定义域内连续. 如 $f(x)=\sqrt{\cos x-1}$ 的定义域为 $x=2k\pi(k=0,\pm 1,\cdots)$,但 $f(x)$ 在 $x=2k\pi$ 点不连续.

§1.3　主要结论

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a \Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k}=a=\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1}$

$\Longleftrightarrow \{a_n\}$ 的所有子数列 $\{a_{n_k}\}\to a, k\to\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$

$\Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha(\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0).$

$\Longleftrightarrow \forall a_n\to x_0(a_n\neq x_0),$

$f(a_n)\to A(n\to\infty).$

3. 函数极限的保号性

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,且 $A>B$,则 $\exists\delta>0$,使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)>g(x)$.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,且 $\exists\delta>0$,使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)\geqslant g(x)$,则 $A\geqslant B$.

4. $f(x)\to 0(x\to x_0)$ 时,有

$\sin f(x)\sim f(x)\sim \arcsin f(x)\sim \tan f(x)\sim \arctan f(x)\sim \mathrm{e}^{f(x)}-1\sim \ln[1+f(x)]$.

$a^{f(x)}-1\sim f(x)\ln a, 1-\cos f(x)\sim \frac{1}{2}f^2(x), [1+f(x)^{\mu}-1]\sim \mu f(x)$.

5. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1, \lim\limits_{x\to x_0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}\quad (x\to x_0$ 时，$f(x)\to 0)$.

6. 无穷小的性质

(1) 有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小.

(2) 有界函数与无穷小之积仍为无穷小.

(3) 如 $f(x)\to 0, (x\to x_0)[f(x)\neq 0]$，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大；反过来，也成立.

7. 单调有界数列必有极限

(1) 单调增有上界的数列必有极限.

(2) 单调减有下界的数列必有极限.

8. 两边夹法则

(1) $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n(n\geqslant N)$,

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=\lim\limits_{n\to\infty}c_n\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}b_n=a$.

(2) $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)[x\in U(x_0,\delta)]$,

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$.

9. $f(x)$ 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

10. 间断点的类型

Ⅰ. 第一类$[f(x-0), f(x_0+0)$ 都存在$]$

(1) $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，x_0 为跳跃间断点；

(2) $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$[或 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ 但 $f(x)$ 在 x_0 没定义]，则 x_0 称为 $f(x)$ 的可去间断点.

Ⅱ. 第二类$[f(x_0-0), f(x_0+0)$ 至少有一不存在$]$

(1) 如 $f(x_0-0), f(x_0+0)\to\infty$，则 x_0 称为无穷型间断点.

(2) 如 $x\to x_0$ 时，函数值在某一区间内变动无限多次，则称 x_0 为振荡型间断点.

11. 连续函数的反函数、复合函数连续，一切初等函数在定义区间内连续.

12. 闭区间上连续函数的性质

(1) 有界性；　(2) 最值性；　(3) 介值性.

§1.4　典型例题分析

一、求函数定义域、函数值以及判别函数奇偶性和周期性的方法

1. 求函数的定义域及复合函数定义域的一般方法

例 1　求下列各函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$;

(2) $y=\sqrt{1-2x}+3\arcsin\frac{3x-1}{2}$.

分析　求函数的定义域一般应求使函数有意义的 x 的范围,具体分为:

(1) 若 $y=\dfrac{1}{\varphi(x)}$,则 $\varphi(x)$ 应满足条件 $\varphi(x)\neq 0$;

(2) 若 $y=\sqrt[n]{\varphi(x)}$,n 为偶数,则 $\varphi(x)$ 应满足条件 $\varphi(x)\geqslant 0$;

(3) 若 $y=\log_a\varphi(x)$,则 $\varphi(x)$ 应满足 $\varphi(x)>0$;

(4) 若 $y=\arcsin\varphi(x)$,则 $\varphi(x)$ 应满足 $|\varphi(x)|\leqslant 1$.

解　(1) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\geqslant 0$,解得 $(-\infty,1)\cup(2,3)\cup(4,+\infty)$.

(2) $1-2x\geqslant 0$,$\left|\dfrac{3x-1}{2}\right|\leqslant 1$,解得 $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$.

例 2　设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,试求下列函数定义域:

(1) $y=f(x^2)$;　(2) $y=f(\tan x)$.

分析　依据复合函数的定义,第二个函数的值域一定要在第一个函数的定义域内.所以 (1) 中的 $0\leqslant x^2\leqslant 1$;(2) 中的 $0\leqslant\tan x\leqslant 1$.

解　(1) $0\leqslant x^2\leqslant 1$,定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$;

(2) $0\leqslant\tan x\leqslant 1$,定义域为 $k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

例 3　设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$,求 $f[f(x)]$ 和 $f\{f[f(x)]\}$ 的定义域.

分析　必须先求出 $f[f(x)]$ 及 $f\{f[f(x)]\}$ 的表达式,然后再分别求其定义域.

解　由于 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$,故 $x\neq -1$,

$$f[f(x)]=\frac{1}{1+f(x)}(\text{此时 } f(x)\neq -1,\text{即 } x\neq -2)$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1+x}{2+x}(x\neq -2,x\neq -1),$$

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{1}{1+f[f(x)]}(\text{此时 } x\neq -2,x\neq -1)$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1+x}{x+2}}=\frac{x+2}{2x+3}(x\neq -\frac{3}{2}).$$

所以 $f[f(x)]$ 及 $f\{f[f(x)]\}$ 的定义域都是除 $x=-1$ 和 -2,$-\dfrac{3}{2}$ 外的一切实数.

例 4　设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$ 求下列函数的定义域:

(1) $f(2x)$;　(2) $f(x-1)$.

分析　这是关于分段函数的复合函数求定义域的问题,此类问题必须先求出函数的表达式,再求其定义域.

解　(1) 令 $2x=u$,则

$$f(2x)=f(u)=\begin{cases}1, & 0\leqslant u\leqslant 1;\\ 0, & 1<u\leqslant 2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & 0\leqslant 2x\leqslant 1;\\ 0, & 1<2x\leqslant 2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2};\\ 0, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

定义域为$[0,1]$.

(2) 令 $x-1=u$,则

$$f(x-1)=f(u)=\begin{cases}1, & 0\leqslant u\leqslant 1;\\ 0, & 1<u\leqslant 2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 2;\\ 0, & 2<x\leqslant 3\end{cases}$$

定义域为$[1,3]$.

小结　求函数的定义域主要要掌握几个函数的定义域,如$\frac{1}{\varphi(x)}$,$\sqrt[n]{\varphi(x)}$(n 为偶数),$\log_a\varphi(x)$,$\arcsin\varphi(x)$ 等.

求复合函数的定义域一般形如:

(1) 已知 $f(x)$ 的定义域为$[a,b]$,求 $f[g(x)]$,此种题型只要解 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 即可;

(2) 已知 $f(x)$ 的定义域为$[a,b]$,$f(x)=\begin{cases}h_1(x), a\leqslant x\leqslant c;\\ h_2(x), c<x\leqslant b.\end{cases}$求 $f[g(x)]$.

此种题型只要令 $g(x)=u$,求出 $f[g(x)]$ 中的 x 范围即可.

2. 求函数值或已知函数关系求函数 $f(x)$ 的表达式

例 5　设 $f(x)=\cos(x^2+1)$,求 $f[f(x)]$.

分析　根据复合函数定义,将 $f(x)$ 代入到 $f[f(x)]$ 中,然而求出 $f[f(x)]$.

解　$f[f(x)]=\cos[f^2(x)+1]$

$=\cos[\cos^2(x^2+1)+1]$.

例 6　已知 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$,求 $f(x)$.

分析　解此类题的一般方法是令 $f[\varphi(x)]$ 中的 $\varphi(x)$ 等于 t,由 $t=\varphi(x)$ 解出 x 代入原式,再由函数与变量记号无关得到 $f(x)$;也可以利用函数本身的特点将右端式子凑成由 $\varphi(x)$ 表示的形式.

解　令　$x+\frac{1}{x}=t$,则 $t^2=(x+\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$,代入原式得 $f(t)=t^2-2$,所以 $f(x)=x^2-2$.

例 7　设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1;\\ 0, & |x|=1;\\ -1, & |x|>1\end{cases},\quad g(x)=e^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

分析　此题属于分段函数求复合函数的问题,对此类问题一般在每一个分段支利用复合

函数的定义求出相应的值.

解

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |e^x|<1;\\ 0, & |e^x|=1;\\ -1, & |e^x|>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x>0.\end{cases}$$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & |x|<1;\\ 1, & |x|=1;\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

例 8 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1\end{cases},\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1;\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$$

求:(1)$\varphi[\varphi(x)]$; (2)$\varphi[\psi(x)]$; (3)$\psi[\varphi(x)]$; (4)$\psi([\psi(x)]$.

分析 利用复合函数的定义,求出每一个函数.

解 (1) 对任何 x 都有 $|\varphi(x)|\leqslant 1$,

则
$$\varphi[\varphi(x)]=1\quad(-\infty<x<+\infty).$$

(2) 当 $|x|<1$ 时,$\psi(x)=2-x^2>1$,从而 $\varphi[\psi(x)]=0$;

当 $|x|>1$ 时,$\psi(x)=2>1$,从而有 $\psi[\psi(x)]=0$;

当 $|x|=1$ 时,$\psi(x)=2-1^2=1$,从而 $\varphi[\psi(x)]=1$,所以有

$$\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}0, |x|\neq 1;\\ 1, |x|=1.\end{cases}$$

(3) 因为对任何 x 都有 $|\varphi(x)|\leqslant 1$,故有 $\psi[\varphi(x)]=2-\varphi^2(x)=\begin{cases}2-1, & |x|\leqslant 1;\\ 2-0, & |x|>1.\end{cases}$

即
$$\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1;\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$$

(4) 当 $|x|<1$ 时,$\psi(x)=2-x^2>1$,从而 $\psi[\psi(x)]=2$,$|x|>1$ 时,$\psi(x)=2>1$,从而 $\psi[\psi(x)]=2$;$|x|=1$ 时,$\psi(x)=2-1^2=1$,从而 $\psi[\psi(x)]=2-1^2=1$,所以有

$$\psi[\psi(x)]=\begin{cases}2, & |x|\neq 1;\\ 1, & |x|=1.\end{cases}$$

例 9 设 $f(x)$ 是一多项式,且满足方程 $f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x^2$,求 $f(x)$.

分析 由于 $f(x)$ 是多项式,所以 $f\left(\frac{x}{2}\right)$ 也是同次多项式,且由 $f(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)+x^2$ 知,$f(x)$ 是二次多项式.

解 设 $f(x)=ax^2+bx+c$,

将 $x=0$ 代入得

$f(0)-\frac{1}{2}f(0)=0$，又 $c=f(0)$，所以 $c=0$，

于是
$$f(x)=ax^2+bx,$$
将此代入方程得
$$ax^2+bx-\frac{1}{2}a\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}b\frac{x}{2}=x^2,$$
即
$$ax^2\left(1-\frac{1}{8}\right)+bx\left(1-\frac{1}{4}\right)=x^2,$$
故
$$a=\frac{8}{7},b=0,$$
所求多项式为 $f(x)=\frac{8}{7}x^2$.

小结　求函数值的题型分为：

(1) 已知 $f(x)$、$g(x)$，求 $f[g(x)]$.

① 如 $f(x)$，$g(x)$ 为非分段函数，则将 $f(x)$ 中的 x 用 $g(x)$ 代，再将 $g(x)$ 写出具体函数；

② 如 $f(x)$，$g(x)$ 为分段函数或至少有一个为分段函数，则将 $f(x)$ 中的每一分段支用 $g(x)$ 代即可.

(2) 已知 $f[g(x)]=h(x)$，求 $f(x)$.

令 $g(x)=u$，求出 $x=g^{-1}(u)$ 代到 $h(x)$ 中，得 $f(u)=h[g^{-1}(u)]$，再将 u 换成 x 即可. 或将 $h(x)$ 中的 x 换成 $g(x)$ 的形式也可得出 $f(x)$ 的表达式.

3. 判别函数奇偶性的一般方法

除了用奇、偶函数的定义外，还可用下列结论：奇函数乘以奇函数为偶函数；奇函数乘以偶函数为奇函数；偶函数乘以偶函数为偶函数.

例 10　判别下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{1-a^{\frac{1}{x}}}{1+a^{\frac{1}{x}}}(a>0)$；

(2) $f(x)=\ln(\sec x-\tan x)$.

分析　依据奇、偶函数的定义.

解　(1) $f(-x)=\dfrac{1-a^{\frac{1}{x}}}{1+a^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{x}}-1}{a^{\frac{1}{x}}+1}=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数.

$$\begin{aligned}(2)\ f(-x)&=\ln[\sec(-x)+\tan x]\\&=\ln\left(\frac{1}{\sec x-\tan x}\right)\\&=-\ln(\sec x-\tan x)\\&=-f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

例 11　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇数，$f(1)=a$，且对任意的 x 有 $f(x+2)-f(x)=f(2)$，求 $f(5)$.

分析　求 $f(5)$，依据已知条件，只要求 $f(3)$ 与 $f(2)$ 即可，而 $f(3)$、$f(2)$ 可根据 $f(x+2)$

$-f(x)=f(2)$ 即可求出.

解　令 $x=-1$,得

$$f(1)-f(-1)=f(2).$$

又
$$f(-1)=-f(1),$$

所以
$$f(2)=2f(1)=2a,$$
$$f(3)=f(1)+f(2)=3a,$$
$$f(5)=f(3)+f(2)=f(1)+2f(2)=5a.$$

4.判别函数周期性的一般方法

求一个函数的周期,常用到下面结论:

1°　若 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数,则 $f(ax+b)(a>0)$ 是周期为 $\dfrac{T}{a}$ 的周期函数;

2°　具有同一周期 T 的两个周期函数,它们的和、差、积、商也是以 T 为周期的周期函数;

3°　若 $f_1(x)$ 的周期为 T_1,$f_2(x)$ 的周期为 $T_2(T_2\neq T_1)$,并设 T_1、T_2 的最小公倍数为 T,则 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的和、差、积、商,都是以 T 为周期的周期函数.

例 12　求下列函数的最小周期:

(1) $f(x)=\sin 8x+\cos 6x$;　　(2) $f(x)=\sin^2 x$;

(3) $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$;　　(4) $f(x)=\sqrt{\tan x}$.

分析　直接根据 3° 求(1)、(3),而(2)要依据倍角公式,将其化为 $\dfrac{1-\cos 2x}{2}$,求(4)依据周期函数的定义.

解　(1) $\sin 8x$、$\cos 6x$ 的最小周期各为 $\dfrac{2\pi}{8}$、$\dfrac{2\pi}{6}$,而 $\dfrac{2\pi}{8}$、$\dfrac{2\pi}{6}$ 的最小公倍数为 π,故 $f(x)$ 的最小周期为 $T=\pi$.

(2) $f(x)=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$,故 $f(x)$ 的最小周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

(3) $\sin x,\sin 2x,\sin 3x$ 的最小周期各为 2π、π、$\dfrac{2\pi}{3}$,而 $2\pi,\pi,\dfrac{2\pi}{3}$ 的最小公倍数为 2π,故 $f(x)$ 的最小周期 $T=2\pi$.

(4) 由于 $\tan x$ 的周期为 π,$\tan(x+\pi)=\tan x$,故 $f(x+\pi)=\sqrt{\tan(x+\pi)}=\sqrt{\tan x}=f(x)$,因此 $f(x)$ 的周期为 π.

例 13　求 $f(x)=x-[x]$ 的最小周期.

解　设 $x=n+r$,m 为整数,则

$$\begin{aligned}f(x+m)&=f(m+n+r)=m+n+r-[m+n+r]\\&=m+n+r-m-[n+r]\\&=n+r-[n+r]\\&=f(x).\end{aligned}$$

一切正整数 m 都是 $f(x)$ 的周期,而最小周期为 1.

二、关于无穷小、无穷大的问题

必须弄清下列概念:

设变量 u 及 v 都是在同一个自变量变化过程中的无穷小，而 $\lim \frac{u}{v}$ 也是在这个变化过程中的极限，如

$\lim \frac{u}{v} = 0$，则称 u 是比 v 高阶的无穷小，记作 $u = o(v)$；

$\lim \frac{u}{v} = c \neq 0$，则称 u 与 v 是同阶无穷小，记作 $u = O(v)$；

$\lim \frac{u}{v} = 1$，则称为 u 与 v 是等价无穷小，记作 $u \sim v$；

$\lim \frac{u}{v} = \infty$，则称 u 是比 v 低阶的无穷小；

$\lim \frac{u}{x^k} = c(c \neq 0$ 常数)，则 u 称 k 阶无穷小，主部为 cx^k.

例 14 当 $x \to 0$ 时，下列函数哪些是 x 的高阶无穷小(并指出 x 的阶数)?哪些是同阶无穷小?或等价无穷小?

(1) $x^4 + \sin x$；　(2) $1 - \cos 2x$；　(3) $\tan^3 x$；　(4) $\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}(1-x)$.

分析　判断函数 $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小、同阶无穷小或等价无穷小，主要求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k} = c(c \neq 0)$，$k$ 即为所求的阶数.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4 + \sin x}{x} = 1$，所以 $x^4 + \sin x \sim x$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x^2}{x} = 0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2$.

所以　$1 - \cos 2x$ 为 x 的高阶无穷小，为 x 的 2 阶无穷小.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^3 x}{x} = 0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^3 x}{x^3} = 1$，所以 $\tan^3 x$ 为 x 的高阶无穷小，$\tan^3 x$ 为 x 的三阶无穷小.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}(1-x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x}{x} = 1$，所以 $\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}(1-x) \sim x$.

例 15 当 $x \to 0$ 时，求下列无穷小量的阶：

(1) $\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x}{1+x}}$；　(2) $\sin 2x - 2\sin x$.

分析　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k} = c(c \neq 0)$ 的 k.

解　(1)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x}{1+x}}}{x^k} = \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{2}-k}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0} x^{\frac{3}{2}-k}\frac{1}{\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)}$$
$$= a(a \neq 0 \text{ 常数})$$

当 $k = \frac{3}{2}$ 时，$a = 1$，故 $\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ 的阶是 $\frac{3}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^k}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{x}\,\dfrac{-1+\cos x}{x^{k-1}}$

$= a(a\neq 0$ 常数).

故　$k=3$ 时,$a=1$.

$\sin 2x-2\sin x$ 为 x 的 3 阶无穷小.

例 16　函数 $y=x\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内是否有界?又当 $x\to\infty$ 时,这个函数是否为无穷大?为什么?

分析　函数 $y=f(x)$ 在(a,b) 内有界,是指 $\exists$ 常数 A,$|f(x)|\leqslant A$,在(a,b) 内成立,如至少有一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $|f(x_0)|>A$,则 $f(x)$ 在(a,b) 内无界.

解　令 $x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$,则 $x\in(-\infty,+\infty)$,且 $y=f(x)=(2n\pi+\dfrac{\pi}{2})\to+\infty(n\to+\infty)$,
故　$y=x\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内无界.

又　$x=2n\pi$ 时,$y=-(2n\pi+\pi)$,

故　$n\to\infty$ 时,　$y\to-\infty$,

此说明,$y=x\cos x$ 不是无穷大.

例 17　$x\to 0$ 时,选出下列函数的形如 cx^n(c 为常数)的主部,并求其对于无穷小 x 的阶:

(1)$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$;　　(2)$2x-3x^3+x^5$.

分析　求函数 $f(x)$ 的阶及主部,主要是求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{cx^n}=1$.

解　(1)　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{cx^n}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{cx^n(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x})}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{cx^{n-1}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=1$,

所以　$n=1,c=1$,

故　主部为 x.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-3x^3+x^5}{x}=2$,

所以　主部为 $2x$,阶为 1.

例 18　设 $x\to 0$,证明

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}.$$

分析　只要证明$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}}=1$ 即可.

证　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}}$

$$= \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\sqrt{x^{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\sqrt{x^{\frac{3}{4}}+\sqrt{\sqrt{x}+1}}$$

$$= 1.$$

例 19 $x\to 0$ 时，$1-\cos(e^{x^2}-1)$ 与 $2^m x^n$ 为等价无穷小，求 m,n.

分析　利用等价无穷小　　$1-\cos f(x)\sim \frac{1}{2}f^2(x)$,

$$e^{g(x)}-1\sim g(x)\quad [f(x)\to 0, g(x)\to 0].$$

解　因为 $1-\cos(e^{x^2}-1)$

$$\sim \frac{1}{2}(e^{x^2}-1)^2$$

$$\sim \frac{1}{2}(x^2)^2$$

$$= \frac{1}{2}x^4,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(e^{x^2}-1)}{2^m x^n}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^4}{2^m x^n}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2^{m+1}}x^{4-n}=1,$$

所以　$n=4, m+1=0, m=-1$.

小结　(1) 关于无穷小、无穷大的问题主要分为下面几种题型：

① 概念题，如例 14，只要掌握函数为无穷小、无穷大的定义即可；

② 判断 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小、等价无穷小、同阶无穷小，只要求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限即可.

(2) 求无穷小量阶的问题，有三种方法：

① 利用重要极限；

② 利用等价无穷小；

③ 利用等价无穷小求极限.

三、求极限的问题

(1) 利用化简方法

1°　求有理函数的极限

有理整函数(多项式)及有理分式函数统称为有理函数，用极限的四则运算法则及其一些计算技巧可求得有理函数的极限.

例 20　求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^3-x-1}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$； (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

解 (1) 分子分母同除以最高次项 x^3，得

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=0.$$

(2) 分子分母同除以最高次项 x^{50}，得

$$原式\lim_{x\to\infty}=\frac{\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}$$

$$=\frac{2^{30}\times 3^{30}}{2^{50}}$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$

(3) 分子分母除以最高次项 $x^{\frac{n(n+1)}{2}}$，得

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{x^n}\right)x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{[n^n+\dfrac{1}{x^n}]^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$$=\frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

例 21 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x-16)^{10}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$； ($n$ 自然数)

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$. ($n$ 自然数)

解 (1) 当 $x\to 2$ 时，分子、分母同趋近于 0(称为"$\dfrac{0}{0}$"型不定式)，运用商的极限定理. 但由于分子分母都是多项式，且 $x=2$ 时为 0，故它们都含有因式 $x-2$，约去此公因式，即可求出极限.

$$原式=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x+2)}{(x^2-4)^2}$$

$$=\frac{1}{4}.$$

(2) $x\to 2$ 时，分子、分母同趋近于 0，所以将其因式分解

$$原式=\lim_{x\to 2}\frac{[(x-2)(x+1)]^{20}}{[(x+4)(x-2)^2]^{10}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}}$$

$$= \frac{3^{20}}{6^{10}}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{10}.$$

(3)$x \to 1$ 时，分子趋近于 0，所以将其因式分解

$$原式 = \lim_{x \to 1} \frac{x-1+x^2-1\cdots+x^n-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)[1+(x+1)+x^2+x+1+\cdots x^{n-1}+\cdots+1]}{x-1}$$

$$= 1+2+3+4+\cdots+n$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}.$$

(4)$x \to 1$ 时，分子趋近于 0，

将其因式分解 $x^{n+1}-(n+1)x+n$

$$= x^{n+1}-x-n(x-1)$$

$$= x(x-1)(x^{n-1}+\cdots+1)-n(x-1)$$

$$= (x-1)[(x^{n-2}-1)+\cdots]x-1]$$

$$= (x-1)^2[x^{n-1}+\cdots+1+x^{n-2}+\cdots+1+\cdots+1]$$

$$原式 = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2[x^{n-1}+\cdots+1+x^{n-2}+\cdots+1+\cdots+1]}{(x-1)^2}$$

$$= n-1+n-2+\cdots+1$$

$$= \frac{(n-1)n}{2}.$$

小结　求有理函数当 $x \to \infty$ 的极限时，可归纳为

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x_n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\cdots+\frac{b_m}{x^m}} \cdot x^{n-m}$$

$$= \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n=m, \\ 0, \quad n<m & (a_0 \neq 0, b_0 \neq 0); \\ \infty, & n>m. \end{cases}$$

设 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$，求 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 的方法如下：

(1) 若 $Q(x_0) \neq 0$，则 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$；

(2) 若 $Q(x_0)=0$，且 $P(x_0)=0$，则通过分解因式约去分子、分母的公因子 $x-x_0$ 后再求极限；