徐森林　胡自胜　薛春华　编著

微分拓扑

Differential Topology

清华大学出版社

微分拓扑

Differential Topology

徐森林　胡自胜　薛春华　编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要介绍微分拓扑中的一些重要定理：映射的逼近定理、映射和流形的光滑化定理；Morse-Sard 定理、Whitney 嵌入定理、Thom 横截性定理；管状邻域定理、Brouwer 度的同伦不变性定理、Hopf 分类定理；Morse 理论、用临界值刻画流形的同伦型和 Morse 不等式以及 Poincaré-Hopf 指数定理；de Rham 同构定理. 这些定理和方法在微分拓扑、微分几何、微分方程和理论物理等学科中都有广泛的应用. 无疑，阅读本书可使读者具有良好的近代数学修养并能增强独立研究的能力.

本书可作为理科大学数学系和本科生、研究生几何、拓扑的教科书或物理系研究生相关课程的教科书和自学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

微分拓扑/徐森林，胡自胜，薛春华编著. —北京：清华大学出版社，2008. 11
ISBN 978-7-302-18254-2

Ⅰ. 微…　Ⅱ. ①徐…　②胡…　③薛…　Ⅲ. 微分拓扑—高等学校—教材　Ⅳ. O189. 3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 113660 号

责任编辑： 刘　颖　王海燕
责任校对： 赵丽敏
责任印制： 王秀菊
出版发行： 清华大学出版社　　**地　　址：** 北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编：** 100084
社 总 机： 010-62770175　　**邮　　购：** 010-62786544
投稿与读者服务： 010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈： 010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者： 清华大学印刷厂
装 订 者： 北京国马印刷厂
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 185×230　**印　张：** 20　**字　数：** 435 千字
版　　次： 2008 年 11 月第 1 版　　**印　　次：** 2008 年 11 月第1 次印刷
印　　数： 1～4000
定　　价： 30. 00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　　产品编号：024477-01

序言

微分拓扑学是研究微分流形在微分同胚下保持不变的各种性质的学科.它的最初思想归于 H. Poincaré,当时他所谓的拓扑学就是现在的微分拓扑学这一分支.由于 H. Whitney, S. S. Cairns,J. H. C. Whitehead 等的工作,微分拓扑学理论在20世纪30年代取得了迅速的发展.接着,在 J. Milnor,R. Thom,S. Smale 和 M. Kervaire 等著名数学家的努力下,又有了新的进展.一方面,有新理论的创立,如 Milnor 的微观丛理论、Thom 的配边理论等;另一方面,一些看来高不可攀的著名古典问题得到了解决.例如,球面可以具有许多不同的微分构造,而且在许多场合,我们能够计算它们的种数(Milnor-Smale). Milnor 于1956年发表了一篇论文,给出了一个与7维标准球面同胚但不微分同胚的微分流形(Milnor 怪球,参阅文献[10])时,引起了人们巨大的惊讶.更进一步,Kervaire 和 Milnor 于1962年证明了 S^7 上共有28种不微分同胚的微分构造(参阅文献[8]);M. Kervaire 于1960年证明了有这样的拓扑流形,它根本没有微分构造(参阅文献[7]);Haupt-Vermutung 的主要猜测已被否定(Mazur-Milnor),等等.

本书第1章1.1节和1.2节是预备知识.介绍了 C^r 微分流形、C^r 映射、C^r 单位分解、向量丛、切丛、张量丛、外形式丛、外微分形式的积分以及著名的 Stokes 定理.为了刻画映射的逼近,描述映射和流形的光滑化,1.3节和1.4节引进了弱与强 C^r 拓扑($C^r_{\mathrm{W}}(M,N)$ 和 $C^r_{\mathrm{S}}(M,N)$).1.5节和1.6节关于映射和流形的光滑化定理以及扰动定理,使这一章的许多结果,若对 C^∞ 流形和 C^∞ 映射成立,实际上它在 C^r 流形和 C^r 映射($r\geqslant 1$)时也成立.

第2章证明了著名的 Morse-Sard 定理,并应用 Sard 定理证明了 Whitney 嵌入定理、Thom 横截性定理.

3.1节应用 Grassmann 流形证明了管状邻域定理.3.2节在 C^r 定向(不可定向)流形上引进了 C^r 映射的 Brouwer 度(模2度),并证明了 Brouwer 度(模2度)的同伦不变性.给出了 Brouwer 度(模2度)的许多应用的实例.此外,还证明了 Hopf 分类定理.

4.1节证明了 Morse 引理和 Poincaré-Hopf 指数定理.4.2节反复应用 Morse 引理,用临界值刻画了 $M^a=\{p\in M\mid f(p)\leqslant a\}$ 的同伦型.从而论证了 C^∞ 流形具有 CW 复形的同伦型.最后,还讨论了 Morse 不等式.

5.1节引进了 de Rham 上同调群,给出了大量 C^∞ 流形的 de Rham 上同调群的具体例子.论述了 de Rham 上同调群的 Mayer-Vietoris 序列.并应用它计算了 S^m 的 de Rham 上同调群.5.2节给出了整奇异同调群和实奇异上同调群;还给出了整小奇异同调群和实小奇异上同调群.5.3节借助系数在预层中的上同调理论,建立了著名的 de Rham 同构定理.

微分拓扑是20世纪发展起来的近代数学的重要一支.许多著名数学家在这个方向上作

出了杰出的贡献. 以上诸定理的结果和论证方法不仅有很重要的理论价值，而且也有很重要的应用价值. 它对微分几何、微分方程和其他数学分支以及理论物理等产生了深远的影响. 此外，对于想从事与近代数学有关的研究的人员就必须精通微分拓扑的知识和方法. 没有这些，就难以进入20世纪后的数学研究领域.

此书能顺利完成，完全应该归功于20世纪60年代教导我们的老师吴文俊教授和李培信教授，没有他们的精心培育就没有今天这本《微分拓扑》的出版.

全书内容在中国科学技术大学数学系研究生和高年级优秀大学生中共讲授8届. 每届训练两学期，使学生的数学修养和独立研究能力都有很大提高. 其中有6位研究生在全国研究生暑期训练班中获奖. 特别是1998年在南京大学举办的研究生暑期训练班中，几何拓扑方向获第一名、第二名的是徐森林教授的学生梅加强、倪轶龙. 2003年在山东威海举办的研究生训练班中，微分拓扑、近代微分几何两门课第一名的还是徐森林教授的一位学生. 经一系列近代数学课程的讲授、训练使中国科学技术大学出了一批有能力、有成就的年轻数学家.

感谢中国科学技术大学数学系领导与老师的支持. 感谢清华大学出版社刘颖编辑真诚的帮助和热心的鼓励.

徐森林

2007年9月2日

目 录

第 1 章

映射空间 $C^r(M,N)$ 的强 C^r 拓扑下映射的逼近与光滑化、流形的光滑化

在研究 Euclid 空间中大量的曲线、曲面的基础上，1.1 节引进局部坐标和微分流形，并介绍了微分流形之间的映射的可微性和浸入、浸没、微分同胚等重要概念. 还证明了微分流形上单位分解和广义单位分解的存在性定理. 1.2 节介绍了切丛、余切丛、张量丛和外形式丛等重要的向量丛. C^∞ 张量场有两个特别重要的例子：一个是(0,2)型对称正定 C^∞ 协变张量场，即 C^∞ Riemann 度量. 不难证明，C^∞ 向量丛上存在 C^∞ Riemann 度量；另一个是 C^∞ 反称协变张量场，即 C^∞ 外微分形式 ω. 在 m 维定向 C^∞ 流形 $\vec{M}$ 上，对 m 阶微分形式 ω 引进积分 $\int_{\vec{M}}\omega$. 进而，还证明著名的 Stoke 定理 $\int_{\vec{M}}\mathrm{d}\omega=\int_{\partial\vec{M}}\omega$. 这些重要内容作为全书的预备知识，目的是为了让读者不必查阅大量参考资料而能顺利和熟练地掌握微分拓扑的基本方法.

1.3 节与 1.4 节在 C^r 流形的 C^r 映射空间 $C^r(M,N)$ 上引进了弱与强 C^r 拓扑($r=0,1,2,\cdots,\infty$)，用以刻画 C^r 映射的逼近.

1.5 节证明了 C^r 浸入的集合 $\mathrm{Imm}^r(M,N)$，C^r 浸没的集合 $\mathrm{Subm}^r(M,N)$，C^r 嵌入的集合 $\mathrm{Emb}^r(M,N)$，C^r 正常映射的集合 $\mathrm{Prop}^r(M,N)$ 以及 C^r 微分同胚的集合 $\mathrm{Diff}^r(M,N)$ 都是强 C^r 拓扑 $C^r_S(M,N)$ 下的开集. 这是引进强 C^r 拓扑优点所在. 进一步，还证明了应用广泛的映射逼近定理.

在 1.5 节的基础上，1.6 节给出了映射光滑化逼近定理、流形光滑定理、扰动定理以及 C^0 同伦的 $C^r(r\geqslant1)$ 映射 f_0 与 f_1 之间的 C^r 微分同伦定理. 这些定理，无论其结果还是证明的方法和技巧都是微分拓扑的精华.

1.1 微分流形、微分映射、单位分解

设 $\mathbf{R}$ 为实数域，$\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 为自然数集. $m\in\mathbf{N}$，考虑 m 维 Euclid 空间

$$\mathbf{R}^m=\{x=(x^1,x^2,\cdots,x^m)\mid x^i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,m\},$$

其中 x^i 为点 x 的第 i 个坐标. 如果 $x,y\in\mathbf{R}^m$，我们用

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{m}x^iy^i,\quad \|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}},$$

$$\rho(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{m}(x^i-y^i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

分别表示 x,y 的**内积**,x 的**模**和 x,y 的**距离**.

设 $U\subset\mathbf{R}^m$ 为开集,如果函数 $f\colon U\to\mathbf{R}$ 连续,则称 f 是 $\boldsymbol{C^0}$ **类**的;如果 f 有 r 阶连续偏导数,则称 f 是 $\boldsymbol{C^r}$ **类**的($r\in\mathbf{N}$);如果 f 有任意阶连续偏导数,则称 f 是 $\boldsymbol{C^\infty}$ **类**的;如果 f 是实解析函数(f 在 U 的每一点的某个开邻域里可展开成 m 元收敛的幂级数),则称 f 是 $\boldsymbol{C^\omega}$ **类**的.

设 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)\colon U\to\mathbf{R}^n$ 为映射,如果 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 都是 C^r 类的,则称映射 f 是 C^r 类的,其中 $r\in\{0,1,\cdots,\infty,\omega\}$. 记 $C^r(U,\mathbf{R}^n)=\{f\mid f\colon U\to\mathbf{R}^n$ 是 C^r 的$\}$,并规定 $0<1<2<3<\cdots<\infty<\omega$.

在研究 Euclid 空间中大量的光滑曲线、曲面的基础上,引进局部坐标,就产生了流形这个近代数学中极其重要和基本的概念.

定义 1.1.1　设 M 为非空集合,$\mathcal{T}$为 M 的一个子集族,满足:

(1) $\varnothing,M\in\mathcal{T}$;

(2) 若 $U_1,U_2\in\mathcal{T}$,则 $U_1\cap U_2\in\mathcal{T}$;

(3) 若 $U_\alpha\in\mathcal{T},\alpha\in\Gamma$(指标集),则 $\bigcup_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha\in\mathcal{T}$. 或者,如果 $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}$,则 $\bigcup_{U\in\mathcal{T}_1}U\in\mathcal{T}$.

我们称$\mathcal{T}$为 M 上的一个**拓扑**,而$(M,\mathcal{T})$称为 M 上的一个**拓扑空间**.

如果对 $\forall\, p,q\in M,p\neq q$,必有 p 的开邻域 U_p 和 q 的开邻域 U_q,使得 $U_p\cap U_q=\varnothing$,则称$(M,\mathcal{T})$为 $\boldsymbol{T_2}$ **空间**或 **Hausdorff 空间**.

如果有可数子集族$\mathcal{T}_0\subset\mathcal{T}$,使得对 $\forall\, U\in\mathcal{T}$,必有$\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}_0$,满足 $U=\bigcup_{B\in\mathcal{T}_1}B$(等价地,$\forall\, x\in M$,必 $\exists\, B\in\mathcal{T}_1$,使 $x\in B\subset U$),则称$(M,\mathcal{T})$为 $\boldsymbol{A_2}$ **空间或具有第二可数性公理的拓扑空间**. 而$\mathcal{T}_0$称为$(M,\mathcal{T})$的**可数拓扑基**.

例 1.1.1　(1) 设 M 为非空集合,$\mathcal{T}_{平庸}=\{\varnothing,M\}$. 则$(M,\mathcal{T}_{平庸})$为拓扑空间,称$(M,\mathcal{T}_{平庸})$为**平庸拓扑空间**. 显然,$(M;\mathcal{T}_{平庸})$为 A_2 空间. 而多于两点的平庸拓扑空间为非 T_2 空间.

(2) 设 M 为非空集合,$\mathcal{T}_{离散}=\{U\mid U$ 为 M 的子集$\}$,则$(M,\mathcal{T}_{离散})$为拓扑空间. 称$(M,\mathcal{T}_{离散})$为**离散拓扑空间**. 显然,独点集为开集,故$(M,\mathcal{T}_{离散})$为 T_2 空间. 当 M 可数时,$\mathcal{T}_0=\{\{x\}\mid x\in M\}$为$(M,\mathcal{T}_{离散})$的可数拓扑基,因而$(M,\mathcal{T}_{离散})$为 A_2 空间;当 M 不可数时,则$(M,\mathcal{T}_{离散})$为非 A_2 空间.(反证)假设$(M,\mathcal{T}_{离散})$为 A_2 空间,故存在可数拓扑基$\mathcal{T}_0$. 因为$\{x\}\in\mathcal{T}_{离散}$,所以 $\exists\, U_x\in\mathcal{T}_0$,使得

$$x\in U_x\subset\{x\},$$

从而,$U_x=\{x\}$. 这就推得$\{\{x\}\mid x\in M\}\subset\mathcal{T}_0$,$\mathcal{T}_0$为不可数子集族,它与$\mathcal{T}_0$为可数拓扑基相矛盾.

(3) 设$(M,\mathcal{T})$为拓扑空间，$X\subset M$，则 X 的子集族$\mathcal{T}_X=\{U\cap X\,|\,U\in\mathcal{T}\}$为 X 的一个拓扑，称$(X,\mathcal{T}_X)$为$(M,\mathcal{T})$的**子拓扑空间**.

(4) 设 ρ: $M\times M\to\mathbf{R}$ 满足：

① $\rho(x,y)\geqslant 0$，$\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$(正定性).

② $\rho(x,y)=\rho(y,x)$(对称性).

③ $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$(三点(角)不等式).

则称 ρ 为M 上的一个**度量或距离**. 而(X,ρ)称为 X 上的一个**度量(或距离)空间**.

读者容易验证：

$$\mathcal{T}_\rho=\{U\mid\forall x\in U,\exists\delta>0,\text{使开球 }B(x;\delta)\subset U\}$$

为 M 上的一个拓扑，$(M,\mathcal{T}_\rho)$为由度量(或距离)ρ 诱导的拓扑空间. 其中

$$B(x;\delta)=\{y\in M\mid\rho(y,x)<\delta\}.$$

对$\forall\, p,q\in M$，$p\neq q$，因为

$$B\left(p;\frac{\rho(p,q)}{2}\right)\cap B\left(q;\frac{\rho(p,q)}{2}\right)=\varnothing,$$

$p\in B\left(p;\dfrac{\rho(p,q)}{2}\right)$，$q\in B\left(q;\dfrac{\rho(p,q)}{2}\right)$，所以$(M,\mathcal{T}_\rho)$为 T_2 空间.

在 Euclid 空间$(\mathbf{R}^m,\rho)$ 中，$\rho(x,y)=\left[\sum\limits_{i=1}^{m}(x^i-y^i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$，易见

$$\mathcal{T}_0=\left\{B\left(x;\frac{1}{n}\right)\,\Big|\,x\in\mathbf{Q}^n,n\in\mathbf{N}\right\}\subset\mathcal{T}_\rho$$

为$(\mathbf{R}^m,\mathcal{T}_\rho)$的可数拓扑基，从而$(\mathbf{R}^m,\mathcal{T}_\rho)$为 A_2 空间.

(5) 设 M 为不可数集，令

$$\rho:M\times M\to\mathbf{R},$$

$$(x,y)\mapsto\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y,\end{cases}$$

则 ρ 为M 上的一个度量，且

$$B(x;\delta)=\begin{cases}M, & \delta>1,\\ \{x\}, & 0<\delta\leqslant 1.\end{cases}$$

由此知，$\mathcal{T}_\rho=\mathcal{T}_{\text{离散}}$. 根据(2)，$(M,\mathcal{T}_\rho)=(M,\mathcal{T}_{\text{离散}})$为非 A_2 空间.

定义 1.1.2 设M为T_2(Hausdorff)、A_2(具有第二可数性公理)空间. 如果对$\forall\, p\in M$，都存在 p 在M 中的开邻域U 和同胚φ: $U\to\varphi(U)$，其中 $\varphi(U)\subset\mathbf{R}^m$ 为开集(**局部欧**)，则称 M 为 **m 维拓扑流形**或 **C^0 流形**.

(U,φ)称为**局部坐标系**(坐标卡、图片)，U 称为**局部坐标邻域**，φ 称为**局部坐标映射**. $x^i(p)=(\varphi(p))^i$，$i=1,2,\cdots,m$ 为 $p\in U$ 的**局部坐标**，简记为$\{x^i\}$，有时也称它为局部坐标系. 如果记 $\mathscr{D}^0$ 为局部坐标系的全体，那么，拓扑流形就是由 $\mathscr{D}^0$ 中的图片粘成的图册. 如果

$p\in U$，则称 (U,φ) 为 p **的局部坐标系**.

定义 1.1.3 设 $(M,\mathscr{D}^0)$ 为 m 维拓扑流形，Γ 为指标集，如果 $\mathscr{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\mid\alpha\in\Gamma\}\subset\mathscr{D}^0$ 满足：

(1) $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha=M$；

(2) C^r 相容性：如果 $(U_\alpha,\varphi_\alpha),(U_\beta,\varphi_\beta)\in\mathscr{D}$，$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，则 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ 是 C^r 类的，$r\in\{1,2,\cdots,\infty,\omega\}$（由对称性，当然 $\varphi_\alpha\cdot\varphi_\beta^{-1}$ 也是 C^r 类的）. 即

$$\begin{cases}y^1=(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})_1(x^1,x^2,\cdots,x^m),\\ \vdots\\ y^m=(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})_m(x^1,x^2,\cdots,x^m)\end{cases}$$

是 C^r 类的.

(3) 最大性：$\mathscr{D}$ 关于(2)是最大的，也就是说，如果 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}^0$，且它和任何 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}$ 是 C^r 相容的，则 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}$. 它等价于：如果 $(U,\varphi)\notin\mathscr{D}$，则 (U,φ) 必与某个 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}$ 不是 C^r 相容的.

我们称 $\mathscr{D}$ 为 M 上的 **C^r 微分构造或 C^r 构造**，$(M,\mathscr{D})$ 为 M 上的 **C^r 微分流形或 C^r 流形**. 当 $r=\omega$ 时，称 $(M,\mathscr{D})$ 为**实解析流形**（图 1.1.1）.

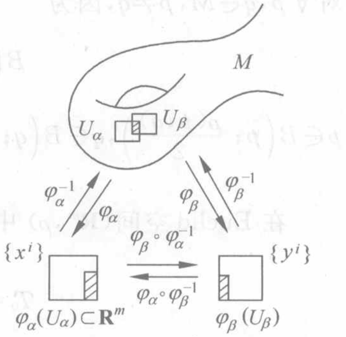

图 1.1.1

类似于拓扑流形，C^r 微分流形就是 $\mathscr{D}$ 中图片光滑（C^r，$r\geqslant1$）粘成的图册.

如果 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$\{x^i\}\in\mathscr{D}$ 和 (U_β,φ_β)，$\{y^i\}\in\mathscr{D}$ 为 p 的两个局部坐标系，$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，则由 Jacobi 行列式

$$1=\frac{\partial(y^1,y^2,\cdots,y^m)}{\partial(y^1,y^2,\cdots,y^m)}=\frac{\partial(y^1,y^2,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,x^2,\cdots,x^m)}\cdot\frac{\partial(x^1,x^2,\cdots,x^m)}{\partial(y^1,y^2,\cdots,y^m)}$$

可知，在 $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ 中，

$$\frac{\partial(y^1,y^2,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,x^2,\cdots,x^m)}\neq0.$$

一般说来，要得到 $\mathscr{D}$ 中所有的图片是困难的. 下面定理指出，只要得到满足定义 1.1.3 中条件(1)和条件(2)的 $\mathscr{D}'$ 就可惟一确定 $\mathscr{D}$ 了. 我们称 $\mathscr{D}'$ 为微分构造 $\mathscr{D}$ 的一个**基**. 这就给出了具体构造微分流形的方法. 它与线性代数中由基生成向量空间以及点集拓扑中由拓扑基生成拓扑的思想是完全类似的.

定理 1.1.1 (1) 设 $\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}^0$ 满足定义 1.1.3 中条件(1)和条件(2)，则它惟一确定了一个 C^r 微分构造（$r\geqslant1$）

$$\mathscr{D}=\{(U,\varphi)\in\mathscr{D}^0\mid(U,\varphi)\text{ 与 }\mathscr{D}'C^r\text{ 相容}\};$$

(2) 设 $\mathscr{D}_1',\mathscr{D}_2'\subset\mathscr{D}^0$ 满足定义1.1.3 中条件(1)和条件(2)且彼此的元素 C^r 相容，则它们

确定的 C^r 微分构造 $\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2$ 是相同的,即 $\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$.

证明 (1) 由条件(2)和 $\mathscr{D}$ 的定义,$\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}$,故 $\mathscr{D}$ 满足条件(1).

设 $(U,\varphi),(V,\psi)\in\mathscr{D}$,若 $p\in U\cap V$,则存在 p 的局部坐标系 $(W,\theta)\in\mathscr{D}'$,使在 $U\cap V\cap W$ 中,

$$\psi\circ\varphi^{-1}=(\psi\circ\theta^{-1})\circ(\theta\circ\varphi^{-1})$$

是 C^r 类的. 因此,$\mathscr{D}$ 满足条件(2).

设 (U,φ) 与 $\mathscr{D}C^r$ 相容,由 $\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}$ 可知 (U,φ) 与 $\mathscr{D}'C^r$ 相容,即 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}$. 因此,$\mathscr{D}$ 满足条件(3).

综合上述,$\mathscr{D}$ 为 C^r 微分构造.

(2) 设 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1$,对 $\forall\,(V,\psi)\in\mathscr{D}_2'$,若 $p\in U\cap V$,则存在 p 的局部坐标系 $(W,\theta)\in\mathscr{D}_1'$,使在 $U\cap V\cap W$ 中,

$$\psi\circ\varphi^{-1}=(\psi\circ\theta^{-1})\circ(\theta\circ\varphi^{-1})$$

和

$$\varphi\circ\psi^{-1}=(\varphi\circ\theta^{-1})\circ(\theta\circ\psi^{-1})$$

是 C^r 的,所以 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}_2$,$\mathscr{D}_1\subset\mathscr{D}_2$. 同理,$\mathscr{D}_2\subset\mathscr{D}_1$. 这就证明了 $\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$. □

引理 1.1.1 设 $k,r\in\{0,1,2,\cdots,\infty,\omega\}$,$k<r$,则 $\exists f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,s. t. f 是 C^k 类但非 C^r 类的($\exists$ 表示"存在"; s. t. 为 such that 的缩写,表示"使得").

证明 如果 $0\leqslant k<0$,则

$$f(x)=\begin{cases}x^{2k+1}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

为所求函数.

如果 $k=\infty$,$r=\omega$,则

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

为所求函数. 事实上,由归纳法和 L'Hospital 法则可知

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $P_n(u)$ 为 u 的多项式. 这就证明了 f 是 C^∞ 类的. 但它不是 C^ω 类的. (反证)假设 f 是 C^ω 类的,则 $\exists\delta>0$,使

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0,\quad x\in(-\delta,\delta),$$

这与 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}>0$,$x\in(0,\delta)$ 相矛盾. □

定理 1.1.2 设 $k,r\in\{0,1,2,\cdots,\infty,\omega\}$,$k<r$,$\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}^0$ 满足定义 1.1.3 中的条件(1)和

条件(2). 由 $\mathscr{D}'$ 惟一确定的 C^r 微分构造

$$\mathscr{D}^r = \{(U,\varphi) \in \mathscr{D}^0 \mid (U,\varphi) \text{ 与 } \mathscr{D}' C^r \text{ 相容}\}.$$

如果将与 $\mathscr{D}'$ 的 C^r 相容自然视作 C^k 相容，而由 $\mathscr{D}'$ 惟一确定的 C^k 构造

$$\mathscr{D}^k = \{(U,\varphi) \in \mathscr{D}^0 \mid (U,\varphi) \text{ 与 } \mathscr{D}' C^k \text{ 相容}\},$$

则

$$\mathscr{D}^r \subsetneqq \mathscr{D}^k.$$

证明　因 $k<r$，故 (U,φ) 与 $\mathscr{D}'C^r$ 相容也是 C^k 相容，这就推出了 $\mathscr{D}^r \subset \mathscr{D}^k$.

再证 $\mathscr{D}^r \neq \mathscr{D}^k$. 设 f 为引理 1.1.1 中的 f. 如果 $k>0$，令

$$g(x) = x + f(x),$$

则 $g'(0)=1+f'(0)=1$；如果 $k=0$，令

$$g(x) = x^{\frac{1}{3}}.$$

于是，$\exists\, \delta>0$，使 g 在 $(-\delta,\delta)$ 内严格递增.

设 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}^r$，$p\in U$，令

$$\theta(x) = x - \varphi(p)$$

为平移；

$$(-\delta,\delta)^m = \{x=(x^1,x^2,\cdots,x^m) \in \mathbf{R}^m \mid |x^i| < \delta\},$$

$$\eta\colon (-\delta,\delta)^m \to \mathbf{R}^m,\ \eta(x) = (g(x^1),x^2,\cdots,x^m).$$

则 $\exists\, p$ 的开邻域 $V\subset U$，且 $0\in\theta\circ\varphi(V)\subset(-\delta,\delta)^m$. 于是，

$$(\eta\circ\theta\circ\varphi)\circ\varphi^{-1} = \eta\circ\theta$$

是 C^k 类的但不是 C^r 类的. 这就证明了 $(V,\eta\circ\theta\circ\varphi)$ 和 (U,φ) 是 C^k 相容但不是 C^r 相容的，即

$$(V,\eta\circ\theta\circ\varphi) \in \mathscr{D}^k,$$

但

$$(V,\eta\circ\theta\circ\varphi) \notin \mathscr{D}^r. \qquad \square$$

从这个定理可知，当 $k<r$ 时，如果加进与 C^r 流形 $(M,\mathscr{D}^r)$ C^k 相容的所有图片，它就可成为一个 C^k 流形 $(M,\mathscr{D}^k)$. 此时，$\mathscr{D}^k$ 的图片确实比 $\mathscr{D}^r$ 的图片严格增多了. 以后，当 $k<r$ 时，凡是 C^r 流形，总是按上述理解，它也是一个 C^k 流形.

有了上述这些定理，我们就可以构造各种各样的流形了.

例 1.1.2　设 $M\subset\mathbf{R}^m$ 为开集，$\mathscr{D}'=\{(M,\mathrm{Id}_M) \mid \mathrm{Id}_M\colon M\to M, \mathrm{Id}_M(p)=p, p\in M$ 为恒同映射$\}$，则由 $\mathscr{D}'$ 惟一确定了一个 C^ω 流形. 由定理 1.1.2，它也惟一确定了一个 C^r 流形，$r\in\{0,1,2,\cdots,\infty\}$，但当 r 增大时，图片严格减少.

例 1.1.3　设 $(M,\mathscr{D}_M)$ 为 m 维 C^r 流形，$U\subset M$ 为开集，$\mathscr{D}_M=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha) \mid \alpha\in\Gamma\}$，令

$$\mathscr{D}_U = \{(U\cap U_\alpha, \varphi_\alpha|_{U\cap U_\alpha}) \mid U\cap U_\alpha \neq \varnothing, \alpha\in\Gamma\}.$$

易证 $(U,\mathscr{D}_U)$ 也为一个 m 维 C^r 流形，称为 $(M,\mathscr{D}_M)$ 的 **C^r 开子流形**.

例 1.1.4　单位球面 $S^m=\left\{x=(x^1,x^2,\cdots,x^{m+1})\in\mathbf{R}^{m+1} \;\middle|\; \sum\limits_{i=1}^{m+1}(x^i)^2=1\right\}$ 为 m 维 C^ω

流形.

证明 设 $p\in S^m\subset\mathbf{R}^{m+1}$，它的直角坐标为$(x^1,x^2,\cdots,x^{m+1})$. 如果将 $\mathbf{R}^m=\{(x^1,x^2,\cdots,x^m,0)\mid x^i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,m\}\subset\mathbf{R}^{m+1}$ 与$\{(x^1,x^2,\cdots,x^m)\mid x^i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,m\}$视作相同，则从图 1.1.2 容易算出：

$$\varphi_{南}:U_{南}\to\mathbf{R}^m \quad (南极投影),$$

$$\begin{aligned}(u^1,u^2,\cdots,u^m)&=\varphi_{南}(x^1,x^2,\cdots,x^{m+1})\\&=\left(\frac{x^1}{1+x^{m+1}},\frac{x^2}{1+x^{m+1}},\cdots,\frac{x^m}{1+x^{m+1}}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^1,x^2,\cdots,x^{m+1})&=\varphi_{南}^{-1}(u^1,u^2,\cdots,u^m)\\&=\left(\frac{2u^1}{1+\sum\limits_{i=1}^m(u^i)^2},\cdots,\frac{2u^m}{1+\sum\limits_{i=1}^m(u^i)^2},\frac{1-\sum\limits_{i=1}^m(u^i)^2}{1+\sum\limits_{i=1}^m(u^i)^2}\right);\end{aligned}$$

$$\varphi_{北}:U_{北}\to\mathbf{R}^m \quad (北极投影),$$

$$\begin{aligned}(\bar{u}^1,\bar{u}^2,\cdots,\bar{u}^m)&=\varphi_{北}(x^1,x^2,\cdots,x^{m+1})\\&=\left(\frac{x^1}{1-x^{m+1}},\frac{x^2}{1-x^{m+1}},\cdots,\frac{x^m}{1-x^{m+1}}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^1,x^2,\cdots,x^{m+1})&=\varphi_{北}^{-1}(\bar{u}^1,\bar{u}^2,\cdots,\bar{u}^m)\\&=\left(\frac{2\,\bar{u}^1}{1+\sum\limits_{i=1}^m(\bar{u}^i)^2},\cdots,\frac{2\,\bar{u}^m}{1+\sum\limits_{i=1}^m(\bar{u}^i)^2},\frac{\sum\limits_{i=1}^m(\bar{u}^i)^2-1}{1+\sum\limits_{i=1}^m(\bar{u}^i)^2}\right),\end{aligned}$$

且

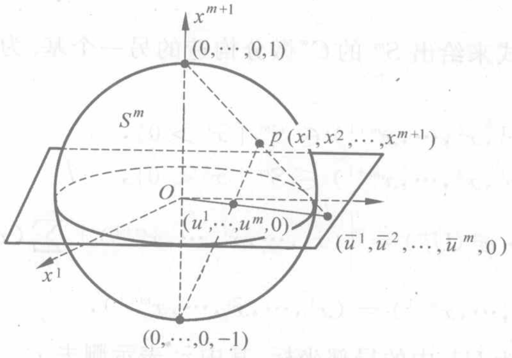

图 1.1.2

$$(\bar{u}^1,\bar{u}^2,\cdots,\bar{u}^m)=\left(\frac{u^1}{\sum\limits_{i=1}^m(u^i)^2},\cdots,\frac{u^m}{\sum\limits_{i=1}^m(u^i)^2}\right),$$

$$(u^1,u^2,\cdots,u^m)=\left(\frac{\bar{u}^1}{\sum\limits_{i=1}^m(\bar{u}^i)^2},\cdots,\frac{\bar{u}^m}{\sum\limits_{i=1}^m(\bar{u}^i)^2}\right).$$

于是

$$\mathscr{D}_1'=\{(U_{南},\varphi_{南}),(U_{北},\varphi_{北})\}$$

满足定义 1.1.3 中条件：

(1) $S^m=U_{南}\cup U_{北}$；

(2) $\mathscr{D}_1'$中的元素是 C^ω 相容的. 即$\{u^i\}$与$\{\bar{u}^i\}$彼此可表示为实有理函数，由于实变量的有理函数自然可延拓为复变量的有理函数. 再由求导的加减乘除法则，后者关于复变量是可导的，故复解析. 于是它在每一点的一个开邻域内可展开为复的收敛的幂级数. 如果再限制到实变量，它在每一实点的一个实开邻域内可展开为收敛的幂级数. 因此，实有理函数是实解析的. 应用参考文献[27]445 页的方法也可证明上述结论.

根据定理 1.1.1(1)$\mathscr{D}_1'$确定了 S^m 上的一个 C^ω 微分构造

$$\mathscr{D}_1=\{(U,\varphi)\mid(U,\varphi)\text{ 与 }\mathscr{D}_1'C^\omega\text{ 相容}\}.$$

而 $\mathscr{D}_1'$是 C^ω 微分构造 $\mathscr{D}_1$ 的一个基. 通过计算得到 Jacobi 行列式为

$$J_{\varphi_{北}\circ\varphi_{南}^{-1}}=-\frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^m(u^i)^2\right)^m}.$$

如果将局部坐标$\{\bar{u}^1,\bar{u}^2,\bar{u}^3,\cdots,\bar{u}^m\}$换成$\{\bar{u}^2,\bar{u}^1,\bar{u}^3,\cdots,\bar{u}^m\}$，则相应的 Jacobi 行列式就大于 0.

下面我们换一种方式来给出 S^m 的 C^ω 微分构造的另一个基. 为此，对 $\forall\, i=1,2,\cdots,m+1$，令

$$U_i^+=\{(x^1,x^2,\cdots,x^{m+1})\in S^m\mid x^i>0\},$$
$$U_i^-=\{(x^1,x^2,\cdots,x^{m+1})\in S^m\mid x^i<0\},$$
$$\varphi_i^\pm:U_i^\pm\to\varphi_i^\pm(U_i^\pm)=\left\{(x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{m+1})\;\Big|\;\sum_{j\neq i}(x^j)^2<1\right\},$$
$$\varphi_i^\pm(x^1,x^2,\cdots,x^{m+1})=(x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{m+1}),$$

称$(x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{m+1})$为 $U_i^\pm$ 中的局部坐标，其中$\hat{x}_i$ 表示删去 x^i.

容易看出，

$$\mathscr{D}_2'=\{(U_i^\pm,\varphi_i^\pm)\mid i=1,2,\cdots,m+1\}$$

满足定义 1.1.3 中的条件：

(1) $S^m=\bigcup_{i=1}^{m+1}(U_i^+\cup U_i^-)$；

(2) $\mathscr{D}_2'$中元素是C^ω相容的. 例如，

$$\varphi_2^+\circ(\varphi_1^-)^{-1}(x^2,x^3,\cdots,x^{m+1})=\varphi_2^+(x^1,x^2,\cdots,x^{m+1})$$

$$=(x^1,x^3,\cdots,x^{m+1})=\left(-\left[1-\sum_{i=2}^{m+1}(x^i)^2\right]^{\frac{1}{2}},x^3,\cdots,x^{m+1}\right)$$

是C^ω类的(利用$\sqrt{1-u}$在0的开邻域$(-1,1)$中可展开为收敛的幂级数和参考文献[27]438页的证明或直接用ε-N方法证明). 根据定理1.1.1(1)，$\mathscr{D}_2'$确定了S^m上的一个C^ω微分构造

$$\mathscr{D}_2=\{(U,\varphi)\mid(U,\varphi)\text{ 与 }\mathscr{D}_2'C^\omega\text{ 相容}\},$$

而$\mathscr{D}_2'$是C^ω微分构造$\mathscr{D}_2$的一个基. 通过计算得到Jacobi行列式为

$$J_{\varphi_j^\pm\circ(\varphi_i^\pm)^{-1}}=(-1)^{i+j}\frac{x^j}{x^i}.$$

如果取$(-1)^{i+1}\{x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{m+1}\}$为$U_i^+$的局部坐标($(-1)^{i+1}\{x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{m+1}\}$表示将坐标$\{x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{m+1}\}$作$i+1$次对换)；取$(-1)^i\{x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{m+1}\}$为$U_i^-$的局部坐标，则相应的Jacobi行列式就大于0.

因为$\{x^1,x^2,\cdots,x^{m+1}\}$与$\{u^1,u^2,\cdots,u^m\}$(或$\{\bar{u}_1,\bar{u}^2,\cdots,\bar{u}^m\}$)彼此可$C^\omega$表示出来，且$\mathscr{D}_1'$与$\mathscr{D}_2'$中的元素是$C^\omega$相容的. 由定理1.1.1(2)可知，$\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$.

应该指出的是，紧致集S^m不能与$\mathbf{R}^m$中的开集同胚，所以S^m不是局部坐标邻域.

例 1.1.5 m维实射(投)影空间$P^m(\mathbf{R})$为m维C^ω流形.

证明 设$x=(x^1,x^2,\cdots,x^{m+1})$，$y=(y^1,y^2,\cdots,y^{m+1})\in\mathbf{R}^{m+1}-\{0\}$，

$$x\sim y\Leftrightarrow x=\lambda y,\quad\lambda\neq0.$$

$x\in\mathbf{R}^{m+1}-\{0\}$的等价类$[x]=\{y\in\mathbf{R}^{m+1}-\{0\}\mid y\sim x\}$，等价类的全体为

$$P^m(\mathbf{R})=(\mathbf{R}^{m+1}-\{0\})/\sim=\{[x]\mid x\in\mathbf{R}^{m+1}-\{0\}\}.$$

投影

$$\pi:\mathbf{R}^{m+1}-\{0\}\to P^m(\mathbf{R}),$$
$$x\mapsto\pi(x)=[x].$$

设$\mathbf{R}^{m+1}-\{0\}$的拓扑为$\mathcal{T}$. 易证

$$\mathcal{T}'=\{U\mid\pi^{-1}(U)\in\mathcal{T}\}$$

为$P^m(\mathbf{R})$上的一个拓扑. 于是，$(P^m(\mathbf{R}),\mathcal{T}')$为$(\mathbf{R}^{m+1}-\{0\},\mathcal{T})$的商拓扑空间，称为***m*** **维实射(投)影空间**.

下面我们来证明$P^m(\mathbf{R})$为m维C^ω流形. 首先，对$\forall[x],[y]\in P^m(\mathbf{R})$，$[x]\neq[y]$，则存在含$\pi^{-1}([x])$的以原点为中心的去心开锥体$V_x$和含$\pi^{-1}([y])$的以原点为中心的去心开锥体$V_y$，使得$V_x\cap V_y=\varnothing$. 因而，$\pi(V_x)$和$\pi(V_y)$分别是含$[x]$和$[y]$的不相交的开邻域，故$(P^m(\mathbf{R}),\mathcal{T}')$为$T_2$空间.

其次，令

$$U_k=\{[x]\in P^m(\mathbf{R})\mid x=(x^1,x^2,\cdots,x^{m+1}),x^k\neq 0\},$$

$$\varphi_k:U_k\to\mathbf{R}^m,$$

$$\varphi_k([x])=\left(\frac{x^1}{x^k},\cdots,\frac{x^{k-1}}{x^k},\frac{x^{k+1}}{x^k},\cdots,\frac{x^{m+1}}{x^k}\right)=({}_k\xi^1,\cdots,{}_k\xi^{k-1},{}_k\xi^{k+1},\cdots,{}_k\xi^{m+1}).$$

我们称 $\{x^1,x^2,\cdots,x^{m+1}\}$ 为 $[x]$ 的齐次坐标，$\{{}_k\xi^1,\cdots,{}_k\xi^{k-1},\cdots,{}_k\xi^{k+1},\cdots,{}_k\xi^{m+1}\}$ 为 $[x]$ 关于 U_k 的非齐次坐标.

显然，$\bigcup\limits_{k=1}^{m}U_k=P^m(\mathbf{R})$，且当 $U_k\cap U_l\neq\varnothing,k\neq l$ 时，

$$\varphi_l\circ\varphi_k^{-1}:\varphi_k(U_k\cap U_l)\to\varphi_l(U_k\cap U_l),$$

$$\varphi_l\circ\varphi_k^{-1}({}_k\xi^1,\cdots,{}_k\xi^{k-1},{}_k\xi^{k+1},\cdots,{}_k\xi^{m+1})=\varphi_l([x])=({}_l\xi^1,\cdots,{}_l\xi^{l-1},{}_l\xi^{k+1},\cdots,{}_l\xi^{m+1}),$$

$$\begin{cases}{}_l\xi^h=\dfrac{x^h}{x^l}=\dfrac{x^h}{x^k}\Big/\dfrac{x^l}{x^k}=\dfrac{{}_k\xi^h}{{}_k\xi^l}, & h\neq l,k,\\[2ex] {}_l\xi^k=\dfrac{x^k}{x^l}=1\Big/\dfrac{x^l}{x^k}=\dfrac{1}{{}_k\xi^l}\end{cases}$$

为有理函数，因而它是 C^ω 函数. 由定理 1.1.1 可知，

$$\mathscr{D}'=\{(U_k,\varphi_k)\mid k=1,2,\cdots,m+1\}$$

确定了 $P^m(\mathbf{R})$ 上的一个 C^ω 微分构造 $\mathscr{D}$，使 $(P^m(\mathbf{R}),\mathscr{D})$ 成为 C^ω 流形.

通过计算得到 Jacobi 行列式为

$$J_{\varphi_l\circ\varphi_k^{-1}}=\frac{\partial({}_l\xi^1,\cdots,{}_l\xi^{l-1},{}_l\xi^{l+1},\cdots,{}_l\xi^{m+1})}{\partial({}_k\xi^1,\cdots,{}_k\xi^{k-1},{}_k\xi^{k+1},\cdots,{}_k\xi^{m+1})}$$

$$=(-1)^{l+k}\frac{1}{({}_k\xi^l)^{m+1}}.$$

当 m 为奇数时，$({}_k\xi^l)^{m+1}>0$. 如果 k 为奇数，相应的局部坐标不变；如果 k 为偶数，相应的局部坐标只改变其中一个，即 ${}_k\xi^s$ 变为 $-{}_k\xi^s$，而其余的不变. 显然，局部坐标改变后的 Jacobi 行列式大于 0；当 m 为偶数时，由于 ${}_k\xi^l$ 有正有负，故 $J_{\varphi_l\circ\varphi_k^{-1}}$ 也有正有负.

我们再用另一观点来研究 $P^m(\mathbf{R})$. 设

$$x=(x^1,x^2,\cdots,x^{m+1}),\quad y=(y^1,y^2,\cdots,y^{m+1})\in S^m,$$

$$x\sim y\Leftrightarrow x=-y;\ [x]=\{x,-x\},$$

$$P^m(\mathbf{R})=S^m/\sim=\{[x]\mid x\in S^m\}.$$

令

$$U_k=\{[x]\in P^m(\mathbf{R})\mid x^k\neq 0\},$$

$$\varphi_k:U_k\to\left\{\xi_k=(\xi_k^1,\xi_k^2,\cdots,\xi_k^m)\,\middle|\,\sum_{j=1}^{m}(\xi_k^j)^2<1\right\},$$

$$\varphi_k([x])=x^k\cdot|x^k|^{-1}(x^1,x^2,\cdots,x^{k-1},x^{k+1},\cdots,x^{m+1})$$

$$= (\xi_k^1, \xi_k^2, \cdots, \xi_k^m) = \xi_k.$$

类似例 1.1.4 可以证明

$$\mathscr{D}' = \{(U_k, \varphi_k) \mid k = 1, 2, \cdots, m+1\}$$

满足定义 1.1.3 中条件(1)和条件(2)，从而它确定了 $P^m(\mathbf{R})$ 上的一个 C^ω 微分构造. □

例 1.1.6 m 维复解析流形为 $2m$ 维实解析流形.

如果定义 1.1.3 中，用 $\mathbf{C}^m = \{z = (z^1, z^2, \cdots, z^m) \mid z^j \in \mathbf{C}$(复数域)$\}$ 代替 $\mathbf{R}^m$，复解析(复函数在每一点的一个开邻域中可以展开成复的收敛幂级数)代替实解析，则称 $(M, \mathscr{D})$ 为 **m 维复解析流形**.

设 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$，$\{z^j\}$ 和 (U_β, φ_β)，$\{w^j\}$ 为局部坐标系，$U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$，$\varphi_\alpha(p) = (z^1, z^2, \cdots, z^m) = z \in \mathbf{C}^m$，$\varphi_\beta(p) = (w^1, w^2, \cdots, w^m) = w \in \mathbf{C}^m$，

$$z^j = x^j + \mathrm{i}y^j, \quad w^j = u^j + \mathrm{i}v^j, \quad x^j, y^j, u^j, v^j \in \mathbf{R},$$

$j = 1, 2, \cdots, m$，其中 $\mathrm{i}^2 = -1$. 于是，

$$u + \mathrm{i}v = w = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(z) = f_{\alpha\beta}(x, y) + \mathrm{i}g_{\alpha\beta}(x, y).$$

利用实和复幂级数的 Cauchy 收敛原理以及

$$\max\{|a|, |b|\} \leqslant (a^2 + b^2)^{1/2} = |a + ib|, \quad a, b \in \mathbf{R}$$

可知，$u = f_{\alpha\beta}(x, y)$，$v = g_{\alpha\beta}(x, y)$ 为实解析函数. 如果将 $\{x^1, x^2, \cdots, x^m, y^1, y^2, \cdots, y^m\}$ 和 $\{u^1, u^2, \cdots, u^m, v^1, v^2, \cdots, v^m\}$ 分别视作 p 点的实局部坐标，则 $(M, \mathscr{D})$ 自然可视作 $2m$ 维实解析流形. 此外，由 Cauchy-Riemann 条件：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^j}{\partial x^l} = \dfrac{\partial v^j}{\partial y^l}, \\[2ex] \dfrac{\partial u^j}{\partial y^l} = -\dfrac{\partial v^j}{\partial x^l}, \end{cases}$$

我们得到 Jacobi 行列式为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(u^1, u^2, \cdots, u^m, v^1, v^2, \cdots, v^m)}{\partial(x^1, x^2, \cdots, x^m, y^1, y^2, \cdots, y^m)} \\ &= \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & -\dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x} & -\dfrac{\partial v}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x} & 0 \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$