现代声学科学与技术丛书

创新与和谐

——中国声学进展

程建春　田静◎主编

科学出版社
www.sciencep.com

现代声学科学与技术丛书

创新与和谐

——中国声学进展

程建春　田　静　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

现代声学已渗透到几乎所有重要的自然科学和工程技术领域，在当代科学技术的发展、社会经济的进步、国防事业的现代化以及人民物质与精神生活的改善与提高中发挥着极其重要，甚至不可替代的作用。本书系统地介绍了声学领域各交叉学科方向的研究进展，重点突出中国声学工作者的贡献。

本书可作为声学专业的研究生及相关工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

创新与和谐：中国声学进展/程建春，田静主编. —北京：科学出版社，2008

(现代声学科学与技术丛书)

ISBN 978-7-03-022480-4

Ⅰ. 创… Ⅱ. ①程… ②田… Ⅲ. 声学-研究-中国 Ⅳ.O42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 101599 号

责任编辑：王飞龙 胡 凯／责任校对：张怡君

责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 8 月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)

2008 年 8 月第一次印刷 印张：46 3/4

印数：1—1 800 字数：905 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

前　言

声学既是一门经典学科，又是一门“常为新”的学科。从经典声学到现代声学，声学始终是最具生命力的学科之一，表现为其内涵不断深化、外延不断扩大。现代声学是一门跨层次的基础性学科，研究从微观到宏观、从次声(长波)到特超声(短波)的一切形式的线性与非线性声(机械)波现象。同时，现代声学具有极强的交叉性与延伸性，它与现代科学技术的大部分学科发生了交叉，形成了一系列诸如医学超声学、生物声学、海洋声学、环境声学等交叉学科方向，在现代科学技术中起着举足轻重的作用。现代声学更是一门具有广泛应用性的学科，对当代科学技术的发展、社会经济的进步、国防事业的现代化以及人民物质与精神生活的改善与提高中发挥着极其重要甚至不可替代的作用。

因此，声学学科已经大大超越了物理学的经典范畴，成为包括信息、电子、机械、海洋、生命、能源等学科在内的充满活力的多学科交叉学科。随着与当代电子与信息科学技术的不断融合，以及声学研究手段的不断进步，声学无疑是 21 世纪最具发展潜力的学科之一，将迎来更辉煌的篇章。

新中国的声学事业是由老一辈科学家创立的，他们包括：汪德昭院士、马大猷院士、魏荣爵院士、应崇福院士等。改革开放后，特别是党的十一届三中全会以来，在张仁和院士、张淑仪院士、侯朝焕院士、李奇虎院士、汪承灏院士、王威琪院士、杨士莪院士、马远良院士和宫先仪院士的带领下，中国的声学事业突飞猛进，有了很大的发展，在国际上占了一席之地。为了总结中国声学工作者在声学各子领域内的贡献，同时也为了让新涉及声学的科技人员和研究生对各子领域内学科发展情况有所了解，中国声学学会决定编写《创新与和谐——中国声学进展》一书。

本书全部由工作在一线的科技人员撰写而成，涉及的国内单位主要由中国科学院声学研究所，南京大学，同济大学，复旦大学，清华大学，北京大学，东南大学，西北工业大学，哈尔滨工程大学，杭州应用声学研究所，北京交通大学，华南理工大学，北京邮电大学，中国电子科技集团公司第二十六研究所，中国船舶科学研究中心，陕西师范大学，河海大学，后勤工程学院，深圳职业技术学院等。在此向所有的作者表示衷心的感谢！

最后，十分感谢南京大学 985 工程（二期）“声学与声信息处理”平台的资助！

中国声学学会理事长　田　静

2008 年 2 月

目　　录

功率超声及应用

生物医学超声

环境声学和建筑声学

语言声学、通讯声学和声频工程

线性与非线性声学

颗粒介质中的声散射

钱祖文

(中国科学院声学研究所，北京　100080)

1　引言

一列声波在均匀各向同性介质中传播时，只要碰不到边界，它将以“自由场”的形式继续向前传播。如果介质中存在其他物体(该物体称为非均匀体)，且其声学特性与其周围介质有区别，则介质中的声场除了原来的入射波部分以外，还多了一部分声波，前者称为入射波，后者称为次级波(包括散射波、黏滞波等)，在线性声学范畴内，后者与前者叠加。液体中的气泡、空气中的尘埃、海水中的浮游生物和悬浮泥沙，甚至海洋沉积物中的颗粒部分等都是非均匀体的实例。由于非均体的散射改变了声场特性，故需要对它进行专门研究并加以利用，从而形成一门分支学科——散射。历史上的瑞利散射解释了天空是蓝色的原因。实际上非均匀体的形状各式各样，但在作理论研究时，用有关的特征尺度(如声波波长、黏滞波长等)来看它们时往往将它们抽象成规范形状(如球、柱等)，这样不仅方便于数学处理，同时让读者在物理上也易于理解。小尺度规范体单散射问题的研究已颇为深入，其解析解的形式也很干净利索，但是大尺度体的散射问题却并非如此。如果空间存在多个散射体，它们之间存在单次相互作用，我们将相应的问题称为多体一次散射问题；如果它们之间存在多次相互作用，我们将相应的问题称为多体多次散射问题。在规范体散射的基础上，本文将着重讨论后者。

本文讨论的内容是流体和固体中颗粒物质的散射问题，后者可以是固体粒子，也可以是气体(气泡)。今后我们所论流体称为主体，非均匀体称为散射体，而将整个介质(包括主体和散射体)称为颗粒介质(有的文献称为二相介质)。

2　球体的单散射

自然界散射体的形状是各式各样的，一般处理起来不那么容易。故在处理实际问题时，理论工作者总是根据物理实际来尽量简化它。如处理声波为主体的问题时，则用声波波长的尺度来看散射体。若波长很长，可以将一个小的散射体看成为小球体，将一个细长的散射体看成为一个细长柱体。若处理的问题是以黏滞波扩散为主体时，则要用黏滞波的穿透深度(或它的波长)为尺度来观察物体的形状。在通常的

情况下，前者的尺度远大于后者，故对同一个物体而言，用前者的尺度去看它是一个光滑的球体，而用后者的尺度去看它就不一定光滑甚至不一定是球体了。这里只讨论各向同性介质，其波动方程为

$$\nabla^2 u = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$u = u_i + u_s, \tag{2}$$

式中 u 是声场量，它可以是质点速度或者声压等量。u_i 和 u_s 分别为入射部分和次级(包括散射)部分，C 为颗粒介质中的声速。我们举个例子，设声波在主体介质中的声速为 C_0，于是有

$$\frac{1}{C^2} = \frac{1}{(C_0+\Delta C)^2} \approx \frac{1}{C_0^2}\left(1-2\frac{\Delta C}{C_0}\right), \tag{3}$$

将式(2)和(3)代入式(1)可得到次级场 u_s(这里为散射声)满足下述非齐次方程

$$\nabla^2 u_s - \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} = -2\frac{\Delta C}{C_0^3}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \tag{4}$$

这里忽略了 $O\left(\frac{\Delta C}{C_0}\frac{u_s}{u_i}\right)$ 二阶小项(称为波恩近似)。式(4)表明，只要声速变化了，就会出现附加场，在这里是散射波。式(4)在无界空间的积分解为

$$u_s(x,y,z;t) = -\frac{1}{4\pi C_0^2}\iiint_{r\leqslant\infty} 2\frac{\Delta C}{C_0^3}\frac{\partial^2 u_i(\xi,\eta,\zeta;t-r/C_0)}{r\partial t^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta, \tag{5}$$

式中 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$。在处理连续介质中的非均匀散射问题时，利用积分解(5)是方便的；但在处理离散(颗粒)介质中的散射问题时，往往采用分离变量的方法。

2.1 液体中固体小球体的单散射(液-固散射)

上面列出了散射问题的积分解，其目的是说明只要声速或其他物理量变化了，就会出现附加场，在处理下面的问题时不打算从积分解出发，而是由分离变量的多极子叠加理论来处理。

一个颗粒物质的密度比其周围的主体介质密度大得非常多，以至于后者可以忽略不计时，我们将它称为“重”粒子，在声场的作用下它几乎不运动；如果它的弹性模量很大，则称它为“硬”粒子，在声场的作用下它几乎是刚性的。

瑞利计算了小粒子的散射，得到了散射截面与频率成四次方成正比的结果[1]。所谓小粒子是指其大小比声波波长小得非常多的粒子。Sewell 研究了当介质主体存在黏滞时的声场中不动硬粒子的声散射[2]。在声场中“不动”的要求是散射体的

密度远大于主体介质的密度，这对于水中的颗粒散射问题是难以满足的。为此，Lamb 研究了“可动”颗粒的散射问题[3]。

当然，很多实际情况下散射颗粒既不是很重，也不是很硬，故在一般情况下，要处理的问题是属于可动粒子的弹性散射范畴。文献[4]的作者研究了弹性粒子的散射，进一步处理了地震波在二相介质中的声传播。本章首先讨论流体中可动硬颗粒的散射问题。在处理球体散射时，最适配的坐标系是球坐标系。粒子的质点速度矢量为

$$\boldsymbol{V} = -\nabla\varphi + \nabla\times\boldsymbol{A}, \tag{6}$$

式中 φ 和 $\boldsymbol{A}$ 分别为声场的标量势和矢量势，后者描述的是介质中出现的黏滞波。在黏滞介质中运动的颗粒会产生这种波，它是一种非稳态横波。如果入射波为声(纵)波，颗粒散射声波的同时，还要产生黏滞波。这似乎表明，颗粒不仅产生散射纵波，还产生了“散射横波”。显然，它们都是次级波。为此，今后将次级波的产生过程统称为散射过程。这样不仅叙述方便，而且可以在液-固和固-固散射之间建立一个对应的联系。

我们假设入射场是简谐的，将式(6)代入黏性流体力学方程组可以分别得到标量势和矢量势说满足的波动方程组[6,7]

$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0, \tag{7}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} + \kappa^2\boldsymbol{A} = 0, \tag{8}$$

式中 $\kappa^2 = \mp\mathrm{i}\omega/\nu$，$\nu$ 是主体介质的黏滞率，它与切变黏滞系数 η 的关系是 $\nu = \eta/\rho$，“$\mp$”号的选取取决于时间因子 $\exp(\pm\mathrm{i}\omega t)$ 的“$\pm$”符号。设球形粒子的半径为 R，其振动速度为 $u_0\exp(-\mathrm{i}\omega t)$，主体介质中流体的质点振动速度为 V。在颗粒的表面的边界条件可表为

$$V_r\big|_{r=R} = u_0\cos\vartheta, \qquad V_\vartheta\big|_{r=R} = -u_0\sin\vartheta, \tag{9}$$

式中 r, ϑ 为球坐标变量，如将极轴取在入射平面波 $\varphi_i = \exp(\mathrm{i}kx)$ 传播的方向上，则声场与方位角无关。将入射平面波、散射波和黏滞波展成球面波的叠加(分离变量法)

$$\varphi_i = \exp(\mathrm{i}kx) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^n(2n+1)j_n(kr)P_n(\cos\vartheta),$$

$$\varphi_s = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^n(2n+1)A_n^{(1)}h_n(kr)P_n(\cos\vartheta), \tag{10}$$

$$A = -\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^n(2n+1)C_n^{(1)}h_n(\kappa r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}P_n(\cos\vartheta)$$

式中 φ_s 是散射标量势，A 是矢量势 $\boldsymbol{A}$ 的大小，由于轴对称，它只有沿方位角方向

的分量；$A_n^{(1)}$ 和 $C_n^{(1)}$ 是待定常数，它们由边界条件(9)来决定；$j_n(z)$、$h_n(z)$和 $P_n(x)$分别是球 Bessel 函数、第一类球 Hankel 函数和 Legendre 多项式。将式(10)代入式(6)并应用条件(9)，在 $kR<<1$ 的情况下可得

$$A_0^{(1)}=\frac{1}{3\mathrm{i}}(kR)^3 \tag{11}$$

$$A_1^{(1)}=\frac{1}{3}(kR)^3(\sigma-1)\left[g_r(\beta R)+\mathrm{i}g_i(\beta R)\right] \tag{12}$$

可以证明，$A_2^{(1)},A_3^{(1)},\ldots\approx O(k^5R^5)$ 为高阶小量，而

$$\begin{aligned}g_r(z)&=-\frac{12(\sigma-1)z^2(1+z)}{[2(2\sigma+1)z^2+9z]^2+81(1+z)^2},\\ g_i(z)&=\frac{4(2\sigma+1)z^4+12(\sigma+2)z^3+54z(1+z)+27}{[2(2\sigma+1)z^2+9z]^2+81(1+z)^2},\end{aligned} \tag{13}$$

式中 $\beta=\sqrt{\omega/2\nu}=2\pi/\lambda_\nu$ 为黏滞波的波数，λ_ν 为黏滞波的波长。如果主体介质是水，声波频率为 10kHz，λ_ν 接近于 2.51×10^{-3} cm，而相应的声波波长是 15cm，这时的 $1/\beta$(正比于黏滞波的穿透深度或者边界层的厚度)是 4×10^{-4}cm；$\sigma=\rho/\rho_l$ 是散射体的物质密度与主体介质的密度之比。

当 $kR<<1$ 的条件不满足，我们没有理由认为 $A_2^{(1)},A_3^{(1)},\cdots\cdots$ 很小，随着 kR 的增大，球面波叠加表达式收敛很慢。这时人们往往采用 T 矩阵方法来处理这类问题[8]。

散射截面

黏滞介质中的粒子对声波的影响可以这样来考虑，一方面是改变了声场的分布，例如在一列平面入射波的路径上有一个小粒子，它将一部分入射声能散射到周围空间，从而使入射场减弱，我们将称之为散射衰减；另一方面，由于粒子在黏滞介质中运动，它在介质中产生黏滞波，从而产生不可逆的能量耗散。需要说明的是，耗散掉的能量是机械能直接转化为热能，而散射衰减只是将机械能在空间重新分布，并不直接转化为热能。为了描写单个粒子对声场产生的这两部分影响，引入散射截面的概念是比较适宜的。结合文献[3]和[6]，可以将散射截面定义为

$$S_s=\frac{\text{散射功率}+\text{耗散功率}}{\text{入射声强}}=\frac{4\pi}{k^2}\left\{-\mathrm{Re}(A_0^{(1)}+3A_1^{(1)})+|A_0^{(1)}|^2+3|A_1^{(1)}|^2\right\}, \tag{14}$$

式中符号“Re(z)”的意思是取 z 的实部。需要说明的是，文献[6]的(13.3)式 中“Re”项后的宗量应该是取负号。Urick[5]应用 Lamb[3]的定义,不考虑偶极子散射功率(即 $A_1^{(1)}$ 所对应的散射)得到的归一化散射截面公式如下

$$\frac{S_s}{\pi R^2}=\frac{4}{9}(kR)^4+\frac{4}{3}kR\frac{(\sigma-1)^2s}{s^2+(\sigma+\tau)^2}, \tag{15}$$

式中

$$s=\frac{9}{4x}\left(1+\frac{1}{x}\right),\quad \tau=\frac{1}{2}+\frac{9}{4x},\quad x=\beta R. \tag{16}$$

式(15)中右边第一项是零阶散射波的归一化散射截面，第二项是由于黏滞衰减所引起的，在理想介质中为零，这时式(15)得不到 Sewell 结果[由(15)得到的是(4/9)而不是(7/9)$(kR)^4$]。如果从定义式(14)出发，利用式(11)、(12)和(13)，人们很易得到

$$\frac{S_s}{\pi R^2}=\frac{4}{9}(kR)^4+\frac{4}{3}kR\frac{(\sigma-1)^2 s}{s^2+(\sigma+\tau)^2}+\frac{S_{s1}}{\pi R^2}, \tag{15a}$$

当 $x>>1$，由式(12)和式(13)很容易计算出为

$$\frac{S_{s1}}{\pi R^2}=\frac{4\pi}{k^2}\frac{3|A_1^{(1)}|^2}{\pi R^2}=\frac{4}{3}(kR)^4\left(\frac{\sigma-1}{2\sigma+1}\right)^2 \tag{17}$$

对于理想流体中的重粒子，$\nu=0$，$\sigma>>1$，上式成为(1/3)$(kR)^4$，代入式(15a)，可得与 Sewell 一致的结果。

2.2 液体中小气泡的单散射

水中气泡共振时，对声波衰减很大，其原因是：第一，气泡共振时，在压缩过程中，它向周围介质传递的热量大于它在膨胀过程中外界给予它的热量。由于热传导是不可逆过程，因此有部分声能损耗于热传导上；第二，由于它的强迫振动，不可避免地要向外辐射声波，从而受到辐射损失；第三，如果气泡是在黏滞介质中运动，还会有部分声能损失于黏滞摩擦。在水声工作频段，热传导损失是主要的，黏滞摩擦损失可以忽略不计[9]。

单个气泡的散射[10]

将入射平面波展成球面波的叠加，

$$\varphi_i^{(0)}=\exp(\mathrm{i}kx)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^n(2n+1)j_n(kr)P_n(\cos\vartheta), \tag{18}$$

气泡外面产生散射波

$$\varphi_{se}^{(1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^n(2n+1)A_n^{(1)}h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\vartheta), \tag{19}$$

气泡内部产生声场

$$\varphi_{si}^{(1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^n(2n+1)B_n^{(1)}j_n(k_0 r)P_n(\cos\vartheta) \tag{20}$$

式中 k 和 k_0 分别是水中和气泡内的波数，$h_n^{(2)}(kr)$ 是第一类球汉克尔函数，$A_n^{(1)}$ 和 $B_n^{(1)}$ 是待定常数，它们由气泡表面的边界条件决定，而边界条件为压力连续和法向速度连续。当 $kR<<1$ 和 $k_0R<<1$ 时可得

$$A_0^{(1)}=\frac{-(kR)^2+\mathrm{i}kR(1-\omega_r^2/\omega^2)}{(kR)^2+(1-\omega_r^2/\omega^2)^2},\tag{21}$$

式中

$$\omega_r=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{3\rho_0C_0^2}{\rho}}$$

ρ 和 ρ_0 分别为水和气体中的密度，C_0 为气体中的声速。如果气泡内气体的变化是绝热过程，则有

$$\omega_r=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho}},\tag{22}$$

即为 Minnaert 共振频率公式，γ 和 P_0 分别为气体的比热比和大气压力。对于水中空气泡而言，在一个大气压时，共振频率 $f_r\,(\mathrm{Hz})=\omega_r/2\pi\approx 320/R\,(\mathrm{cm})$。散射截面

$$\sigma_s=4\pi|A_n^{(1)}|^2=\frac{4\pi R^2}{\delta_{rad}^2+\left(1-\omega_r^2/\omega^2\right)},\tag{23}$$

由上式可知，在共振时，理想流体中小气泡(只有辐射阻尼)的散射截面远大于它的几何截面。但值得提起的是实际气泡在液体中振动时，不仅遭受到辐射阻尼 $\delta_{rad}=kR$，还要受到热扩散阻尼 δ_{th} 等(即式(23)中的 δ_{rad} 应当用 $\delta_m=\delta_{rad}+\delta_{th}+\delta_{vis}$ 来代替)。通常后者(≈0.1 的量级)比前者大得多，故实际气泡的共振散射截面比(23)式给出的要小得多，但它仍然很大。对于实际气泡，式(21)应写为

$$A_0^{(1)}=\frac{-kR\delta_m+\mathrm{i}kR(1-\omega_r^2/\omega^2)}{\delta_m^2+(1-\omega_r^2/\omega^2)^2}\tag{21a}$$

下面将可看到，利用式(21)式算出单个气泡的阻尼常数比在气泡幕中测出的数据还是小很多，它表明气泡之间还存在相互作用(见后)。

2.3　液体中固体弹性粒子的声散射

通常的弹性固体中的声速比水中高 2~3 倍，故其波长要长 2~3 倍。只要水中的 $kR<<1$，那么固体中的 kR 就更加<<1 了。一般说来，声波在这类颗粒的内部形不成共振条件。当主体是非黏流体，文献[4]算出

$$A_0^{(1)}=\frac{K'-K}{3\mathrm{i}K'}(kR)^3,\quad A_1^{(1)}=\frac{1}{3\mathrm{i}}\frac{\rho-\rho'}{\rho+2\rho'}(kR)^3$$

式中 K 和 ρ 分别是体积弹性模量和密度，不带撇号和带撇号的量分别表示属于液体和固体的量，这里我们将[4]中的符号改写成本文 2.1 节的符号。由于 $A_1^{(1)}$ 对应于偶极散射，它与弹性无关，这一项很易由式(12)和(13)推出。对于砂和水 $K'>>K$，因

此，在处理这类问题时，可以近似地将砂看成是硬粒子[11]。

2.4 固体中粒子的声散射

即使在均匀各向同性的固体中，只要存在非均匀散射体，例如性质不同的弹性粒子(甚至刚性粒子)、空腔等都会产生散射，因此，研究这个问题对声学无损检测是有重要意义的。据作者所知，文献[12]是对这方面工作进行系统研究的早期论文。后来文献[4]进行了后续性的研究，可以证明，文献[4]中的全部解完全能够由文献[12]导出。

引入位移标量势 ψ 和位移矢量势 $\nabla\times(\Pi \boldsymbol{r})$，于是位移矢量势可表为[12]

$$s=-\nabla\psi+\nabla\times\nabla\times(\Pi \boldsymbol{r}) \tag{24}$$

由于轴对称，式中 Π 是只依赖于 r,ϑ 的标量函数，它和 ψ 分别满足方程(8)和(7)，这时的波数 k 和 κ 分别为 P 波的波数和 S 波的波数，因而它们的散射波解分别可表示为式(10)的形式，即 ψ_s 对应于 φ_s。另一方面，很易证明，$\nabla\times(\Pi \boldsymbol{r})=-\boldsymbol{i}_\varphi\partial\Pi/\partial\vartheta$ 对应于式(6)中的 A，$\boldsymbol{i}_\varphi$ 是沿方位角方向的单位矢量。设入射波为平面 P 波，它沿 x 方向传播，它的位移标量势可表为

$$\psi_i=\frac{A}{k^2}\exp\left[\mathrm{i}(kx-\omega t)\right]=\frac{A}{k^2}\exp(-\mathrm{i}\omega t)\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^n(2n+1)j_n(kr)P_n(\cos\vartheta) \tag{25}$$

将平面波展成球面波的叠加，并用 u 和 v 分别表示球坐标系中介质的径向和横向位移，于是有(按[4]的符号，省去因子 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$)

入射 P 波：

$$u_{i0}=-\frac{A}{k^2}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^n(2n+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}j_n(kr)P_n(\cos\vartheta),$$

$$v_{i0}=-\frac{A}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^n(2n+1)\frac{1}{r}j_n(kr)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}P_n(\cos\vartheta); \tag{26}$$

散射 P 波(球外，其波数为 k)：

$$u_{p1}=-\frac{1}{k^2}\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}h_n(kr)P_n(\cos\vartheta),$$

$$v_{p1}=-\frac{1}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{1}{r}h_n(kr)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}P_n(\cos\vartheta); \tag{27}$$

散射 S 波(球外，其波数为 κ)：

$$u_{s2}=-\frac{1}{\kappa^2}\sum_{n=1}^{\infty}C_n n(n+1)\frac{1}{r}h_n(\kappa r)P_n(\cos\vartheta),$$

$$u_{s2}=-\frac{1}{\kappa^2}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{\mathrm{d}}{r\mathrm{d}r}[rh_n(\kappa r)]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}P_n(\cos\vartheta)\ ; \tag{28}$$

球内 P 波(其波数为 k_1)：

$$u_{p3}=-\frac{1}{k_1^2}\sum_{n=0}^{\infty}D_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}j_n(k_1r)P_n(\cos\vartheta)$$

$$v_{p3}=-\frac{1}{k_1^2}\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{1}{r}j_n(k_1r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}P_n(\cos\vartheta) \tag{29}$$

球内 S 波(其波数为 κ_1)：

$$u_{s3}=-\frac{1}{\kappa_1^2}\sum_{n=0}^{\infty}E_nn(n+1)\frac{1}{r}j_n(\kappa_1r)P_n(\cos\vartheta)$$

$$v_{s3}=-\frac{1}{\kappa_1^2}\sum_{n=1}^{\infty}E_nn(n+1)\frac{\mathrm{d}}{r\mathrm{d}r}[rj_n(\kappa_1r)]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}P_n(\cos\vartheta) \tag{30}$$

B_n、C_n、D_n 和 E_n 为四个待定常数，它们由边界条件来确定，其条件是：在球表面上两边的位移和应力连续，共有四个方程，因而可以决定四个常数。当各种波的波长远远大于颗粒的半径时可得(忽略$(kR)^5$以上的项)

$$B_0=\mathrm{i}A(kR)^3\frac{K-K_1}{3K_1+4\mu},\quad B_1=\frac{1}{3}A(kR)^3\frac{\rho-\rho_1}{\rho}$$
$$B_2=\frac{20\mathrm{i}}{3}A(kR)^3\frac{\mu(\mu_1-\mu)}{6\mu_1(K+2\mu)+\mu(9K+8\mu)},\quad C_n=\left(\frac{\kappa}{k}\right)^{n+3}\frac{B_n}{n} \tag{31}$$

式中，

$$K=\lambda+\frac{2}{3}\mu,\ K_1=\lambda_1+\frac{2}{3}\mu_1,\ k=\frac{\omega}{C_p},\ \kappa=\frac{\omega}{C_s},\ k_1=\frac{\omega}{C_{p1}},$$
$$\kappa_1=\frac{\omega}{C_{s1}},\ C_p=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\ C_s=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}},\ C_{p1}=\sqrt{\frac{\lambda_1+2\mu_1}{\rho_1}},\ C_{s1}=\sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}} \tag{32}$$

λ,μ是各向同性弹性材料的两个拉密常数。带下标的量是属于球内(散射体)材料的物理量，不带下标的量是属于球外材料的物理量。值得注意的是，固-固散射的情况下，$B_2\neq0$，这一点不同于液-固散射(在那里，$A_2^{(1)},A_3^{(1)},\cdots\approx O(k^5R^5)$为高阶小量。另一方面，如果主体介质是流体，则上面的结果(固-固散射)难以退化到液-固散射，这种情况下的散射必须重新计算。

3　多体、多次散射

当应用单体散射理论处理实际问题，如水中气泡幕、海洋沉积物以及其他颗粒介质(如矿砂)中的声传播时，理论不能解释实验结果。这就提醒人们去研究多体、