

DYNAMIC ANALYSIS
AND DESIGN OF
MECHANICAL STRUCTURE

机械结构
动态分析与设计



• 王建中 周亚明 编著 •

武汉工业大学出版社

机械结构动态分析与设计

王建中 周亚明 编著

江苏工业学院图书馆
藏书章

武汉工业大学出版社

(鄂)新登字 13 号

内 容 简 介

本书共分八章,系统介绍机械结构动态分析与设计的基本理论和应用方法,主要包括结构动力有限元分析、振动模态分析、参数识别、灵敏度分析、结构动力修改与再分析及动态优化设计等内容。全书以解决工程实际问题为出发点,强调理论联系实际,结合大量生动的工程应用实例,使读者在了解该领域国内外最新研究成果及发展动态的同时,重点掌握实际工程应用的基本方法。

本书可供机械、航空、航天、造船、车辆、兵器、交通、土木等工程领域的科研人员及工程技术人员参考,也可作为相关专业大学高年级学生、研究生和教师的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

机械结构动态分析与设计/王建中、周亚明编著,一武汉:

武汉工业大学出版社,1995.9

ISBN7-5629-1016-2

I、机…

II、王…

III、机械结构—动态分析—设计

IV、TH113.2

武汉工业大学出版社出版发行

(武汉市武昌珞狮路14号)

武汉工业大学出版社印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:17 字数:420千字

1995年9月第1版 1995年9月第1次印刷

印数:1-1000册

定价:20.00元

前 言

机械结构动态分析与设计主要包括结构动力有限元分析、振动模态分析、参数识别、灵敏度分析、结构动力修改与再分析及动态优化设计等内容。这些内容是机械力学的重要分支,也是机械学科目前最活跃的前沿领域之一。特别是机械结构灵敏度分析与动力修改能定量地指导改善机械结构动力学特性,这是对传统经验设计的一个重要突破。

该领域的研究,在国际国内目前都是方兴未艾,无论是在理论方法研究方面,还是在应用研究方面都取得了大量的成果。但这些丰富多彩成果均散见于浩如烟海的有关杂志和报告中,而从基础到应用,较全面、系统地介绍这些成果,尤其是从实际工程应用的角度出发介绍这些成果的著作目前还不多见。另外,本书的作者多年来一直从事该领域的理论、试验及应用研究,取得了一些成果,同时还开展了相关的研究生教学工作。正是基于上述原因,我们编著该书,希望为从事这方面学习、研究及应用工作的科技人员、教师和研究生提供一本较系统的、实用的、反映该领域最新研究成果的专门著作。

本书的特点是以解决工程实际问题为出发点,强调理论与实际相结合,从实用的角度深入浅出地介绍基本理论、试验和应用方法,重点介绍国内外该领域的最新研究成果,包括本书作者的研究成果。目的是使读者在了解基本理论和发展动态的同时,主要掌握实际应用的方法。书中列有大量生动的工程应用实例,它们是国内外该领域应用成果的总结。通过这些实例,读者可以了解该领域研究及应用的现状和发展方向。对急需实用的读者,还可以直接从这些实例中了解一些工程应用的基本过程和具体方法,从而解决一定的实际问题。本书的章节安排及内容取舍充分体现了以实际工程应用为中心、反映最新研究成果的特点。

全书共分八章,其中第一、二、三、六、七、八章由王建中编著,第四章、第五章、第六章第五节以及第三章第五节的部分实例由周亚明编著。全书由王建中主编。

为了较全面、系统反映该领域的研究及应用成果,本书参考和收集了不少国内外公开发表的论文及资料,在此对这些论文和资料的作者表示感谢。

特别感谢姚安佑教授、黄之初副教授、张飞猛高级工程师、张清杰教授,他们在本书的出版过程中,给予了热情的支持和帮助。

沈学雷、石林祥等研究生为本书的抄写作了部分工作,特此致谢。

本书内容涉及尚未形成完整体系的新领域,不少问题正在进一步探索和发展中,加之作者水平有限,书中缺点、错误在所难免,祈请读者批评指正。

编 著 者

1995.7

目 录

第一章 概述	(1)
第二章 机械结构动力分析的有限单元法	(4)
2.1 有限单元法概论	(4)
2.1.1 有限单元法的基本概念	(4)
2.1.2 有限单元法的发展及工程应用情况	(5)
2.1.3 有限单元法的基本步骤	(7)
2.2 有限单元法的前后处理	(11)
2.2.1 有限单元法的前处理	(11)
2.2.2 有限单元法的后处理	(13)
2.3 结构动力分析的有限单元法	(16)
2.3.1 结构系统的运动方程	(16)
2.3.2 特征值的解法	(18)
2.3.3 结构动力响应的计算	(26)
2.4 复杂结构有限元分析中几个问题的处理	(28)
2.4.1 模型的简化	(28)
2.4.2 解题规模的缩小	(31)
2.4.3 求解方法的选择	(34)
2.5 有限元分析通用程序简介	(37)
2.6 结构动力有限元分析应用实例	(39)
第三章 机械结构振动模态分析与模态参数识别	(52)
3.1 引言	(52)
3.2 结构振动模态分析	(52)
3.2.1 频响函数(传递函数)分析	(53)
3.2.2 振动系统模态分析基础	(69)
3.2.3 振动系统的实模态分析	(74)
3.2.4 振动系统的复模态分析	(77)
3.3 模态参数识别	(85)
3.3.1 实模态参数的识别	(86)
3.3.2 复模态参数的识别	(95)
3.3.3 模态参数识别应注意的问题	(102)
3.4 模态试验技术	(102)
3.4.1 模态测试系统	(103)
3.4.2 数字信号分析技术	(103)
3.4.3 被试结构的支承	(107)
3.4.4 激振器的使用与标定	(108)
3.4.5 传感器的使用与标定	(115)

3.4.6	附加质量及刚度的消除	(118)
3.4.7	测试系统的校准与标定	(119)
3.5	模态分析的工程应用	(119)
第四章	机械结构物理参数识别	(134)
4.1	引言	(134)
4.2	直接识别法	(134)
4.2.1	最小二乘法	(134)
4.2.2	辅助变量法	(135)
4.3	模态转换识别法	(136)
4.3.1	实模态转换法	(136)
4.3.2	复模态转换法	(137)
4.4	理论物理参数修改法	(138)
4.4.1	艾布拉赫姆(S. R. Ibrahim)法	(139)
4.4.2	陈介中(J. C. Chen)矩阵摄动法	(140)
4.4.3	Berman 法	(141)
4.5	求解特征值反问题识别法	(142)
4.5.1	特征值反问题	(142)
4.5.2	简单弹簧—质量系统的特征值反问题	(142)
4.5.3	多自由度离散系统的特征值反问题	(144)
第五章	机械结构动态载荷识别	(151)
5.1	引言	(151)
5.2	结构动态载荷频域识别法	(151)
5.2.1	频响函数矩阵求逆法	(151)
5.2.2	模态坐标转换法	(153)
5.3	结构动态载荷时域识别法	(154)
5.3.1	动态载荷时域识别的基本原理	(154)
5.3.2	动态载荷时域识别的步骤	(158)
第六章	机械结构动态特性灵敏度分析	(159)
6.1	引言	(159)
6.2	灵敏度的数学定义	(159)
6.3	特征灵敏度分析	(161)
6.3.1	复模态一阶特征灵敏度分析	(161)
6.3.2	实模态一阶特征灵敏度分析	(168)
6.3.3	复模态二阶特征灵敏度分析	(173)
6.3.4	实模态二阶特征灵敏度分析	(178)
6.3.5	逆特征灵敏度分析	(182)
6.4	频响函数灵敏度分析	(186)
6.4.1	复模态频响函数一阶灵敏度分析	(186)
6.4.2	复模态频响函数二阶灵敏度分析	(188)
6.4.3	实模态频响函数一阶灵敏度分析	(189)
6.4.4	实模态频响函数二阶灵敏度分析	(191)

6.5	动力响应灵敏度分析	(191)
6.6	灵敏度分析举例	(195)
6.6.1	理论算例	(195)
6.6.2	应用实例	(201)
第七章	机械结构动力修改与动态再分析	(208)
7.1	引言	(208)
7.2	结构动力修改	(209)
7.2.1	矩阵摄动法	(209)
7.2.2	特征方程拟合法	(210)
7.2.3	逆特征灵敏度法	(213)
7.3	结构修改后的动态再分析	(214)
7.3.1	结构小修改的再分析方法	(214)
7.3.2	结构大修改的再分析方法	(224)
7.3.3	结构局部修改的再分析方法	(225)
7.4	结构动力修改与再分析举例	(231)
7.4.1	理论算例	(231)
7.4.2	应用实例	(237)
第八章	机械结构动态优化设计	(241)
8.1	引言	(241)
8.2	泛函极值设计法	(242)
8.3	优化设计法	(243)
8.3.1	优化设计的基本概念	(243)
8.3.2	数学规划法	(248)
8.3.3	优化准则法	(248)
8.4	结构动态优化设计实例	(252)
参考文献	(264)
(871)
(872)
(873)
(874)
(875)
(876)
(877)
(878)
(879)
(880)
(881)
(882)
(883)
(884)
(885)
(886)
(887)
(888)
(889)
(890)
(891)
(892)
(893)
(894)
(895)
(896)
(897)
(898)
(899)
(900)

第一章 概述

机械结构动态分析与设计包括机械结构动力学分析与机械结构动态设计两个方面。其中,机械结构动力学分析主要有经典振动分析、有限元分析、模态分析等内容;机械结构动态设计包括动特性灵敏度分析、参数识别、动力修改、再分析、结构动态优化设计等内容。这些内容将在本书后续各章中分别讨论,这里仅作一简要论述。

我们知道,结构动力学分析主要研究结构的动态载荷(激励)——结构(系统)——动力响应的特性及三者之间的关系,典型的结构动力学分析模型如图 1.1 所示。

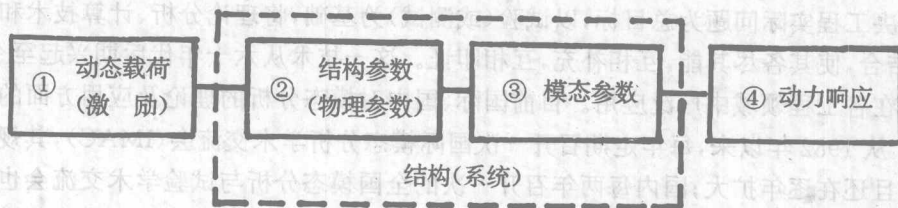


图 1.1 结构动力学分析模型

针对该模型可进行表 1.1 中所列的四种问题的研究。这四种问题归结起来可分为“正问题”和“逆问题”两类。

表 1.1 结构动力学分析的研究内容

问题 1°:	理论分析计算,	即①、②→③→④	(正问题)
问题 2°:	模态分析(动态试验),	即①、④→③	(逆问题)
问题 3°:	物理参数识别,	即①、④→③→②	(逆问题)
问题 4°:	动态载荷识别,	即②或③、④→①	(逆问题)

传统的结构动力学分析主要研究“正问题”,即表 1.1 中的问题 1°。对于简单系统,“正问题”主要是经典的振动分析,即通过理论分析的方法直接建立结构系统动力学分析的数学模型,然后求得系统的固有特性参数和动力响应。有关这部分内容的著述甚多,本书不再作介绍。

解决较复杂的结构系统的“正问题”,目前主要是利用有限单元法建立系统的动力学分析数学模型,然后进行特征分析,获得特征参数,并通过直接积分或振型迭加的方法计算动力响应。由于振型迭加的方法对于复杂结构系统的动力响应计算更加方便有效,因此,对结构系统进行特征分析,获得其特征参数(频率、振型、阻尼等)就成为结构动力学分析“正问题”的核心内容,这也是有限元分析的重要内容之一。

有限单元法是目前比较成熟、比较方便的一种解决结构动力学“正问题”的方法,是机械结构动态分析与设计的必备基础和重要工具。本书将在第二章介绍机械结构动力分析有限

单元法的其本内容,重点是介绍其实际应用方法。

由于工程结构的实际边界条件,零部件的连接及装配方式难以准确恰当处理,材料的特性参数往往有很大的离散性,某些特性参数(如阻尼)难以分析预示等因素的影响,在采用理论分析计算的方法(包括经典振动分析法和有限元分析法)建立结构动力分析数学模型时,往往带有不确定性。这使得计算结果不够可靠,对于复杂的工程结构更是如此。因此,用动态试验的方法确定结构动力特性是十分必要的。动态试验方法是通过对外载和动力响应的测试与分析,获得结构系统的动特性参数,或称模态参数。这种方法即所谓的模态分析法,或动态试验法。它是一种解决结构动力学“逆问题”的方法,即表 1.1 中的问题 2°。模态分析的方法还可以用来验证理论分析计算(正问题)的结果,也可以直接用于动力响应计算。

解决结构动力学“逆问题”远比求解它的“正问题”复杂。它不仅牵涉到结构动力学的基本理论和计算方法,而且需要动态测试技术、信号处理技术与计算机技术的紧密结合和综合应用。与传统的结构动力学“正问题”分析方法相比,模态分析及模态参数识别技术的特点是:以解决工程实际问题为总目标,以试验(或测试)为基础,将理论分析、计算技术和试验技术紧密结合,使其各尽其能,互相补充,互相印证。这一技术从六十年代后期兴起至今,发展很快,已在各工程领域中广泛应用。目前国际、国内对模态分析的理论及应用方面的研究日趋深入。从 1982 年以来,每年定期召开一次国际模态分析学术交流会(IMAC),其规模相当可观,而且还在逐年扩大;国内每两年召开一次的全国模态分析与试验学术交流会也得到广泛的关注与重视。近些年来,大量的以微机为中心、FFT 技术和相关分析技术为其础的现代结构动力试验分析设备及相应分析软件的出现,更使模态分析与模态参数识别技术如虎添翼。本书将在第三章详细、深入介绍模态分析与模态参数识别的基本理论、主要方法、模态试验技术以及有关的最新研究成果和应用实例。

模态分析的结果——模态参数,可以进一步用来识别结构的物理参数(也叫结构参数),以便用于结构动力修改和动态优化设计;或者用来识别作用于结构系统的动态外载荷,它是机械结构动态分析与设计的前提。这两类问题也是结构动力学的“逆问题”,前者为物理参数识别问题,即表 1.1 中的问题 3°,将在本书的第四章专门讨论;后者为动态载荷识别问题,即表 1.1 中的问题 4°,将在本书的第五章专门讨论。

机构结构动态设计是一个不断修改、不断完善的渐近过程。为了达到预期的目的,在设计中常需对结构进行修改,即再设计。有时是由于设计及制造的原因需要对结构修改,有时则是为了使结构的动态特性满足预定的要求而进行修改,即结构动态再设计。

由于影响结构动态特性的参数很多,而且影响关系也十分复杂,因此,究竟对哪些参数作怎样的修改才能使结构动态特性获得预期的改善,就成为结构动态再设计的关键。如果能找到各个参数对结构动态特性的定量的影响关系,那么就可以有针对性地对那些影响较大的、敏感的参数进行修改,以避免盲目性。这正是灵敏度分析所解决的问题。

所谓灵敏度分析就是研究各个结构参数或设计变量的变化对结构动态特性变化的敏感程度,即定量的影响关系(包括影响方向和影响程度)。它可以指示我们,修改哪些参数对结构动态特性影响最大,最为有效。因此,利用灵敏度分析的结果,对敏感程度较高的参数进行修改,可以获得事半功倍的效果。

利用灵敏度分析,可以避免结构动力修改中的盲目性,提高设计效率,减少设计成本,亦为结构动态优化设计提供依据。因此,它是结构动力修改和动态优化设计的基础。

灵敏度分析是一个重要且获得良好效益的领域,国内外发展很快,已在许多方面获得了应用,并产生了巨大的效益。但由于各种导数的计算所需机时较长、耗费较大,因而人们致力于研究各种导数的有效计算方法,发展和应用近似的灵敏度分析方法,评价分析模型的改进和设计,以使灵敏度分析更好地为动态优化设计所利用。最近,人们还将灵敏度分析应用于生理学、热动力学、物理化学和空气动力学等学科中,用来估计分析模型中参数变化的影响,并研究对参数变化不敏感的设计。本书将在第六章介绍机械结构动态特性灵敏度分析的基本理论、方法和应用情况。

灵敏度分析给出了影响结构动态特性的敏感参数,如何修改这些敏感参数才能使结构动态特性获得预期的改善则是结构动力修改将要进一步研究的问题。

结构动力修改技术所研究的问题也可分为两类,即所谓“正问题”和“反问题”。正问题研究的是当系统的某些结构参数由于设计及制造上的原因需要作某些修改时,根据其改变量求结构动态特性的改变量。这一类问题在结构的改型设计中,或在结构上添加(或拆除)某些附件时常遇到。反问题所研究的是希望通过某些结构参数的改变使结构系统的动态特性满足预定的要求,或避开(或落入)某个预期的范围。这类问题在结构动态特性优化设计及避免共振时经常遇到。正问题是修改由于设计及制造上的原因需要改变的那些结构参数,不一定是影响系统动态特性的敏感参数;而反问题中一般是对那些敏感参数进行修改,以其获得事半功倍的效果。

修改后的结构系统动态特性如何?是否满足预定要求?这是结构动力修改后必须验证的问题。为了判断结构动力修改的效果,需要对修改后的结构系统重新进行动态分析,即动态再分析。但是,如果重新采用原方法(用有限元模型求解)进行再分析,则又一次花费大量的时间、人力及财力,极不经济,对大型复杂结构更是麻烦的昂贵。因此,人们希望能充分利用原分析结果,采用较为简单的分析方法求得修改后结构的动态特性,以避免大量的重复计算工作,节省人力、财力。为此,许多研究者对再分析进行了大量的研究,提出了不少的再分析方法。它们的共同点是:利用结构参数的修改量,结合原分析获得的动态特性参数,求得修改后结构系统动态特性参数的改变量,从而获得修改后结构系统的动态特性参数,避免了大量的重复工作。本书将在第七章介绍结构动力修改与动态再分析的内容。

在实际工程结构设计时,要考虑的因素很多。为了达到预定的目的,人们在设计中总希望在给定的条件下得到在技术、经济上尽量符合理想的设计方案。目前的主要办法是采用重复设计法,即设计、分析、修改(再设计)、再分析不断重复、循环。重复设计法的核心内容就是灵敏度分析、结构修改及再分析技术。随着科学技术的发展,结构动态优化设计逐渐被人们认识、发展,它使机械结构设计进入新的阶段。

结构动态优化设计能获得满足全部约束条件,并使目标最优的设计方案,且不需要重复设计,这是结构设计最理想的方法。不过,目前结构动态优化设计还存在一些有待解决的问题,是正在研究的课题。本书将在第八章介绍有关结构动态优化设计的内容。

上面对本书将要介绍的机构结构动态分析与设计两方面所包含的主要内容作了简要论述。应该说明的是,这些内容并不是孤立的,它们之间互相联系、互相交叉,且贯穿于机械结构动态设计的全过程。

第二章 机械结构动力分析的有限单元法

2.1 有限单元法概论

2.1.1 有限单元法的基本概念

有限元方法是结构分析的一种数值计算方法,它在 50 年代初期随着计算机的发展应运而生,并得到了广泛应用。这一方法的理论基础牢固,物理概念清晰,解题效率高,适用性强,目前已成为机械产品动、静、热特性分析的重要手段。

在机械产品设计中,经常有两类问题需要解决:一是强度问题,例如在机床结构设计中,对齿轮的弯曲强度、疲劳强度、接触强度的计算。通常物体的强度是靠控制它内部的最大应力来保证的,即 $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ ($[\sigma]$ 为材料的许用应力);另一类问题是刚度问题,例如车床在加工过程中,床身由于切削力作用而产生变形,使得刀具和工件的相对位置发生变化,有可能满足不了加工精度的要求,因而必须控制机床的零部件在受力后的变形值,使它在允许范围内。在机床结构设计时,刚度问题比强度问题更为重要。弹性力学原则上可以提供关于应力和位移的计算方法,但实际上,由于机械产品结构的复杂性,长期以来主要应用经验类比设计,对机床的动、静、热特性只能作定性分析和经验类比估算。在决定实际结构时,取较大的安全系数,结果使产品“傻大粗”,材料的潜力不能充分发挥,产品性能也难以把握,只有等到样机制成,进行各种性能试验时才能有所了解,对薄弱环节提出改进方案,这样必然导致设计制造周期长、成本高。

在当今科学技术及生产技术发展日新月异的情况下,市场的需求是瞬息多变的,机械产品以多品种、小批量生产为主,这就要求新产品设计、制造周期短,质量高,成本低,具有较强的竞争能力。传统的设计方法已越来越适应不了发展的需要。因此,近年来,由于计算机的应用,正在设计领域中进行着一场深刻的革新,如用理论设计代替经验设计;用精确设计代替近似设计;用优化设计代替一般设计;用动态分析代替静态分析等等,而有限元方法为在设计阶段掌握产品性能提出了强有力的工具。可以认为有限元方法计算是利用计算机对机械产品动、静、热特性进行了模拟试验。随着计算机及计算技术的发展,机械产品设计必然进入到一个新的阶段。国外机械产品设计已进入计算机辅助设计及自动设计时代,目前它正以有限元—优化设计为中心不断地向前发展。

有限元方法是数值计算中的一种离散化方法,用数学术语来说,就是从变分原理出发,通过分区插值,把二次泛函(能量积分)的极值问题化为一组多元线性代数方程来求解。人们知道,直接从一个微分方程推导出它的泛函,常常是很复杂的,有时甚至是不可能的,所以在求泛函时,常借助于所研究问题的物理特性。诸如金属切削机床这类机械产品的刚性问题,属于小变形弹性问题,因而弹性力学中的最小位能原理提供了极大的方便。关于这方面内容请参阅弹性力学的变分法章节。

从物理或几何概念来说,有限元方法是结构分析的一种计算方法,是矩阵方法在结构力学和弹性力学等领域中的发展和应用,其基本思想是将弹性连续体划分成有限个小单元体,它们在有限个节点上相互连结,如图 2.1 所示。在一定精度要求下,对每个单元用有限个参数来描述它的力学特性,而整个连续弹性体的力学特性,可认为是这些小单元体力学特性的总和,从而建立起连续体的力的平衡关系。

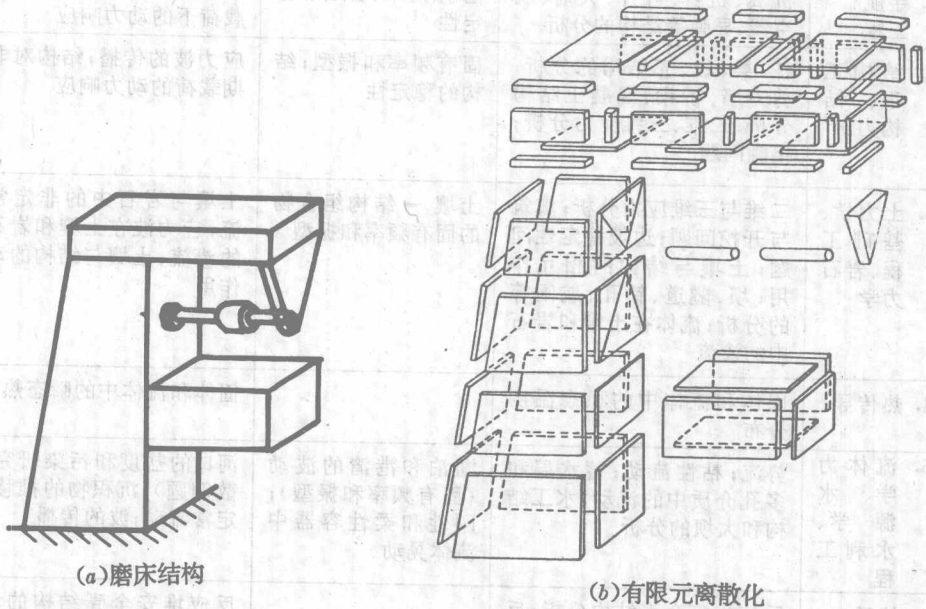


图 2.1 磨床结构的有限元表述

图 2.1b 是磨床结构的有限元划分图,对每个单元体进行力学分析,建立起单元体的平衡方程,然后按“叠加”的原则建立起整个弹性体的平衡方程,从而求得变形及应力。

2.1.2 有限单元法的发展及工程应用情况

尽管“有限元”这一名词的提法仅几十年的历史,但这一概念在几个世纪以前就曾被使用。例如,古代的数学家通过将圆近似为多边形而获得其圆周率,如图 2.2 所示。按照今天的观点,多边形的每一边也可以称为“有限单元”。

今天意义上的有限单元法最早由 Courant 于 1943 提出。1956 年 Turner, Clough, Martin, Jopp 等人首次在宇航结构的分析中应用了简单的有限单元(铰接杆、三角形板等),这被看作是对有限单元法发展的关键贡献之一。然而,由于计算过分繁琐,缺乏先进的计算工具,有限单元法未获广泛使用。

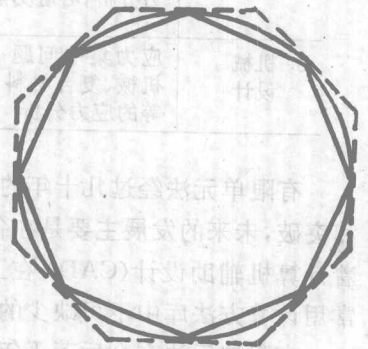


图 2.2 获得圆周率的多边形

直到 60 年代,随着计算机的飞速发展,才使得有限单元法的实际应用如虎添翼。可以说,有限单元法是计算机时代的产物。今天,有限单元法已成为工程师和科学家们广泛使用的分析工具,是现代工程设计中的重要支柱之一。

有限单元法最初发展应用于宇航工程,并迅速推广于造船、土木建筑、机电、化工、水利、国防等诸多领域。表 2.1 给出了有限单元法在平衡域稳态问题、特征值问题、动态域瞬态问题以及传导问题等方面的工程应用实例。

表 2.1 有限单元法工程应用实例

研究领域	平衡问题	特征值问题	动态问题
1. 宇航工程	机翼、机身、叶片、火箭、航空器、导弹等结构的分析	固有频率、颤振、稳定性	随机载荷下的响应;非周期载荷下的动力响应
2. 结构工程、结构力学	杆、梁、板、壳结构的分析;剪力墙、桥梁、混凝土结构分析;二维、三维应力分析;接触问题	固有频率和振型;结构的稳定性	应力波的传播;结构对非周期载荷的动力响应
3. 土力学、基础工程、岩石力学	二维与三维应力分析;填筑与开挖问题;边坡稳定性问题;土壤与结构的相互作用;坝、隧道、钻孔、航闸等的分析;流体在土壤和岩石中的渗流	土壤—结构组合物的固有频率和振型	土壤与岩石中的非定常渗流;应力波在土壤和岩石中的渗流;土壤与结构的动态作用
4. 热传导	固体和流体中的稳态温度分布		固体和流体中的瞬态热流
5. 流体力学、水源学、水利工程	势流;粘性流动;蓄水层和多孔介质中的流动;水工结构和大坝的分析	湖泊和港湾的波动(固有频率和振型);刚性和柔性容器中流体晃动	河口的盐度和污染研究(扩散问题);沉积物的推移;非定常流动;波的传播
6. 核子工程	反应堆安全壳结构分析;反应堆和反应堆安全壳结构中的稳态温度分布		反应堆安全壳结构的动态分析,反应堆结构的热粘弹性分析;反应堆和反应堆安全壳结构中的非稳态温度分布
7. 生物医学工程	眼球骨骼及牙齿的应力分析;填入与修补物的承载能力分析;心脏力学		头盖骨的冲击分析;解剖结构动力学
8. 机械设计	应力集中问题;压力容器、机械、复合材料、连杆、齿轮等的应力分析	固有频率及振型;稳定性分析	动态载荷下的裂纹与断裂问题

有限单元法经过几十年的发展,作为一种结构分析技术来讲,不可能期望再有别的发展和突破,未来的发展主要是在各工程领域中的应用、提高,并完善有限元方法的基本技巧。随着计算机辅助设计(CAD)在工程设计中日益广泛的应用,有限元方法程序包已成为 CAD 常用计算方法库中不可缺少的内容之一。

有限单元法在今后若干年内主要发展趋势是:

(1) 在完善各种特殊领域内的线性有限元方法软件的同时,大力研制高效率的非线性有限元方法软件;

(2) 逐步完善大型有限元方法软件的自适应性,以提高其运行效率,并尽量减少设计人员对软件系统的干涉;

(3) 配备功能较强的前后置处理程序块。没有前后置处理及不包含 CAD 技术的大型有限元软件,将逐步失去竞争力。

(4) 结构分析的有限元—优化一体化程序的发展,其中心是减少在结构优化计算过程中重作有限元分析的次数,缩短计算时间,提高计算效率,减少计算费用。

另外,从长远来看,将会有更多的有限元方法软件引进人工智能技术,形成比较完善的专家系统,实现有限元分析智能化。

2.1.3 有限单元法的基本步骤

在有限单元法中,将连续介质(如固体、液体、气体)看成是有限个单元的组合,单元通过节点互连接,节点通常是在单元的边界上。由于在连续介质中分布变量或场变量(如位移、应力、温度、压力等)的实际变化是未知的,因此我们通常假设,在每个单元中分布变量的变化规律可以近似地以一个简单函数来表示。这些近似函数(也称插值函数或插值模型)是通过分布变量在各节点的值来定义的。这样,整个连续介质的场变量的变化规律就可以由各节点值来反映。

有限单元法求解问题一般总是遵循以下的步骤:

1. 结构的离散化

有限单元法的第一步就是将结构或求解区域分成单元,因此被分析的结构必须以恰当的单元来模拟,这时单元数、单元类型、单元大小等必须确定。

2. 选择恰当的插值模型或位移模型

由于复杂结构在特定载荷条件的位移解的形式是难以精确预测的,因此我们假设某种适当形式的解来近似单元内的未知解。从计算的角度,这种假设的位移解应该是简单的,但它必须满足一定的收敛要求。总的来说,插值模型是以一个多项式的形式来描述的。

3. 单元刚度矩阵及载荷矢量的推导

利用假设的一个位模型,单元“ e ”的刚度矩阵 $K^{(e)}$ 和载荷矢量 $F^{(e)}$ 即可通过平衡条件推导出来。

4. 组合单元方程以获得总体平衡方程

由于结构是由多个单元组成,离散的单元刚度矩阵和载荷矢量必须以适当的方式组合成如下形式的总体平衡方程

$$\underline{K} \underline{\phi} = \underline{F}$$

式中, \underline{K} 为总刚度矩阵, $\underline{\phi}$ 为节点位移矢量, \underline{F} 为节点力对整体结构的矢量。

5. 求解节点位移

总体平衡方程还必须修改以适应问题的边界条件。考虑边界条件后,平衡方程可表示为:

$$K\phi = F$$

对于线性问题,节点位移矢量 ϕ 很容易求解。但对于非线性问题, ϕ 的解要通过分步求解的方法获得,其中每一步都包含刚度矩阵 K 和(或)载荷矢量 F 的修改。

6. 单元应变和应力的计算

利用已获得的节点位移,可计算单元的应变和应力。

下面给出一算例来具体演示上述六个步骤。

例：阶梯杆的应力分析^[6]

如图 2.3a 所示，已知 $A^{(1)} = 2 \text{ cm}^2, A^{(2)} = 1 \text{ cm}^2, l^{(1)} = l^{(2)} = 10 \text{ cm}, E^{(1)} = E^{(2)} = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2, P_3 = 1 \text{ Kg}$ ，求轴向载荷 P_3 作用下阶梯杆的应力。

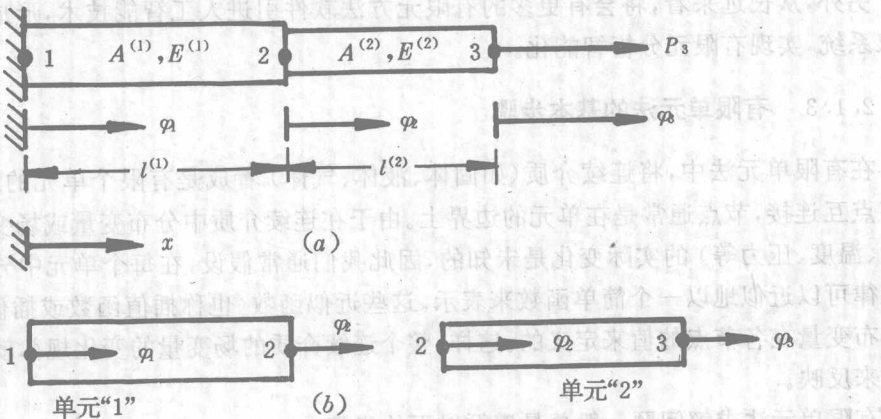


图 2.3 轴向载荷作用下的阶梯杆

解：1. 离散化

将阶梯杆分成图 2.3b 所示的两个单元。假设杆是一维结构，因此在单元上任意点只有轴向位移。三个节点的轴向位移（以 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 表示）即为未知变量。

2. 位移模型

对于每一个单元，我们假定轴向位移 φ 为一线性函数（如图 2.4 所示）。

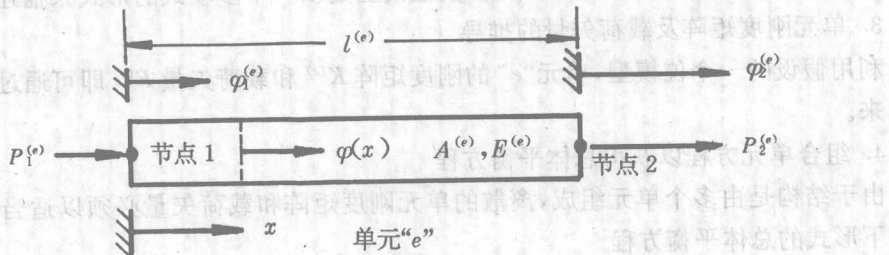


图 2.4 单元“e”的位移与载荷

$$\phi^{(e)} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}^{(e)} \quad P^{(e)} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}^{(e)}$$

$$\varphi(x) = a + bx \tag{2.3}$$

式中， a, b 为常数。假设单元“e”的端点位移为 $\varphi_1^{(e)}(x=0), \varphi_2^{(e)}(x=l^{(e)})$ ，则

$$a = \varphi_1^{(e)}, b = (\varphi_2^{(e)} - \varphi_1^{(e)})/l^{(e)}$$

因此，

$$\varphi(x) = \varphi_1^{(e)} + (\varphi_2^{(e)} - \varphi_1^{(e)})x/l^{(e)} \tag{2.4}$$

3. 单元刚度矩阵

单元刚度矩阵可以利用最小势能原理获得。杆在轴向形时的势能可以写为

$$I = \text{应变能} - \text{外力功} = \pi^{(1)} + \pi^{(2)} - W_F \quad (2.5)$$

$$\text{而 } \pi^{(e)} = A^{(e)} \int_0^{l^{(e)}} \frac{1}{2} \sigma^{(e)} \cdot \epsilon^{(e)} \cdot dx = \frac{1}{2} A^{(e)} E^{(e)} \int_0^{l^{(e)}} \epsilon^{(e)2} dx \quad (2.6)$$

式中 $A^{(e)}$ 为单元“e”的横截面积

$l^{(e)}$ 为单元“e”的长度 ($L/2$)

$\sigma^{(e)}$ 为单元“e”的应力

$\epsilon^{(e)}$ 为单元“e”的应变

$E^{(e)}$ 为单元“e”的杨氏模量

由 $\varphi(x)$ 的表达式(2.4), 我们得到

$$\epsilon^{(e)} = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \frac{\varphi_2^{(e)} - \varphi_1^{(e)}}{l^{(e)}} \quad (2.7)$$

所以,

$$\begin{aligned} \pi^{(e)} &= \frac{1}{2} A^{(e)} E^{(e)} \int_0^{l^{(e)}} \frac{\varphi_2^{(e)2} + \varphi_1^{(e)2} - 2\varphi_1^{(e)}\varphi_2^{(e)}}{l^{(e)2}} dx \\ &= \frac{A^{(e)} E^{(e)}}{2l^{(e)}} [\varphi_1^{(e)2} + \varphi_2^{(e)2} - 2\varphi_1^{(e)}\varphi_2^{(e)}] \end{aligned} \quad (2.8)$$

写成矩阵形式:

$$\pi^{(e)} = \frac{1}{2} \phi^{(e)T} K^{(e)} \phi^{(e)} \quad (2.9)$$

式中, $\phi^{(e)} = \begin{Bmatrix} \varphi_1^{(e)} \\ \varphi_2^{(e)} \end{Bmatrix}$ 为单元“e”的节点位移矢量, 对于单元“1”、“2”分别为 $\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$;

$K^{(e)} = \frac{A^{(e)} E^{(e)}}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 为单元“e”的刚度矩阵。

而外力的功可写成:

$$W_F = \varphi_1 F_1 + \varphi_2 F_2 + \varphi_3 F_3 \quad (2.10)$$

式中 F_i 为作用于 φ_i ($i = 1, 2, 3$) 方向的力, 在本例中, F_1 为固定端的反作用力, $F_2 = 0$, $F_3 = 1.0$ 。

如果整个杆在载荷 $F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$ 作用下平衡, 则最小势能原理为:

$$\frac{\partial I}{\partial \varphi_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.11)$$

这一方程可写为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \varphi_i} &= \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left(\sum_{e=1}^2 \pi^{(e)} - W_F \right) = 0 \\ \sum_{e=1}^2 (K^{(e)} \phi^{(e)} - F^{(e)}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

4. 单元刚度矩阵和载荷矢量组合

组合单元刚度矩阵 $K^{(e)}$ 和单元载荷矢量 $F^{(e)}$ 可获得整体平衡方程。式(2.12)可写成

$$\underline{K} \underline{\phi} - \underline{F} = 0 \quad (2.13)$$

式中, $\underline{K} = \sum_{e=1}^2 K^{(e)}$ 为整体刚度矩阵

$\underline{\phi} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}$ 为整体位移矢量

代入已知数据, 得 φ_1, φ_2

$$K^{(1)} = \frac{A^{(1)}E^{(1)}}{l^{(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \times 10^5 & -4 \times 10^5 \\ -4 \times 10^5 & 4 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{matrix} \quad (2.14)$$

$$K^{(2)} = \frac{A^{(2)}E^{(2)}}{l^{(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 10^5 & -2 \times 10^5 \\ -2 \times 10^5 & 2 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{matrix} \quad (2.15)$$

由于有三个未知节点位移 ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$), 总刚度矩阵应为三维, 于是,

$$\begin{matrix} & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \underline{K} = & \begin{bmatrix} 4 \times 10^5 & -4 \times 10^5 & 0 \\ -4 \times 10^5 & 4 \times 10^5 + 2 \times 10^5 & -2 \times 10^5 \\ 0 & -2 \times 10^5 & 2 \times 10^5 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{matrix} \\ & = 2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \end{matrix} \quad (2.16)$$

总载荷矢量则为

$$\underline{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

其中, F_1 为节点 1 的反作用力

因此, 总体平衡方程为

$$2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

5. 求解位移

由于矩阵 $\underline{K} = 2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 为奇异矩阵, 我们不能从式(2.18)求解位移, 这是因为还没有引入边界条件。

引入边界条件 $\varphi_1 = 0$, 则最终的总体平衡方程为

$$2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

求解方程(2.19)得

$$\varphi_2 = 0.25 \times 10^{-5} \text{cm}$$

$$\varphi_3 = 0.75 \times 10^{-5} \text{cm}$$