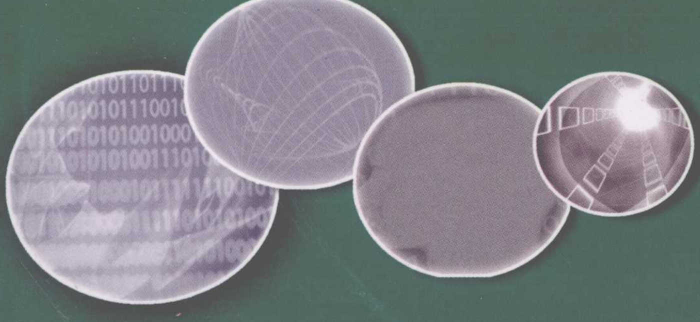
GAODENGYINGYONGSHUXUE

高等应用数学

陈继业 主编



白山出版社

高等应用数学

主　编　陈继业
副主编　李会林　郝连军
　　　　王达开　詹耀华
　　　　刘全振　赵建玲
编　委　宋冬梅　王明礼

白山出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学/陈继业主编. —沈阳：白山出版社，2008.5
ISBN 978—7—80687—347—2

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 陈…　Ⅲ. 应用数学Ⅳ. 029.

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 059425 号

出版发行：白山出版社
地　　址：沈阳市沈河区二纬路 23 号
邮　　编：110013
电　　话：024—23065667
电子信箱：baishan867@163.com
责任编辑：朱忠义
装帧设计：李　阳
责任校对：王　鹏
印　　刷：沈阳市北陵印刷厂有限公司
幅面尺寸：185mm×260mm
印　　张：9.25
字　　数：280 千字
版　　次：2008 年 5 月第一次
印　　次：2008 年 5 月第一次印刷
印　　数：1～2000 册
书　　号：ISBN 978—7—80687—347—2
定　　价：29.80 元

前　言

本书是为高等职业技术学院基础课——高等应用数学编写的教材，其内容包括函数极限与连续、微积分、微积分方程、线性代数、拉普拉斯变换五部分。

高等应用数学作为高等职业技术学院的基础课，在培养高素质、复合型人才方面起着重要的作用。首先，数学是较为抽象的科学，在数学教学中可以培养学生遇事看本质的思维方法和抽象思维能力；其次，数学是逻辑性最强的科学，在教学中可以培养学生思维的严密性，批判性和实事求是、言必有据、正直讲理的思维品质；再次，数学还是应用及其广泛的科学，在教学中可以通过一题多解、一法多变来培养学生思维的广阔性和灵活性；此外，数学概念、定理所包含的辩证唯物主义思想，数学解题所要求的精益求精、坚忍不拔的优良品质与规则意识等等，都是很好的人文教育题材，对学生人文精神的培育与综合素质的提高具有重要的价值。可以说，重视数学尤其是高等应用数学的教学，对提高高等职业技术学院的学生整体素质有着重要的意义。

本书遵循“必须”、“够用”、“突出”的原则，选取学生需要的内容材料，在难度上进行了推敲，既满足学生学习的基本需要，也为学生进一步深造提供相应的发展空间。

本书是集体努力的结晶。由辽宁石化职业技术学院的陈继业任主编，由李会林（朝阳高等师范专科学校）、詹耀华（辽宁金融职业学院）、刘全振（河北旅游职业学院）、赵建玲（张家口职业技术学院）、郝连军（辽宁石化职业技术学院）、王达开（辽宁石化职业技术学院）任副主编，宋冬梅（河北女子职业技术学院）、王明礼（邢台学院）任编委。具体编写任务如下：陈继业、宋冬梅、郝建军编写第一章；李会林编写第二章；詹耀华、刘全振编写第三章；刘全振、赵建玲编写第四章；赵建玲、詹耀华编写第五章；陈继业、李会林编写第六章；陈继业、王明礼、王达开编写第七章；郝连军编写了各章的科学史话部分；习题答案由王达开提供。陈继业撰写了编写提纲并统稿，宋冬梅、王明礼做了大量的文字工作。

由于时间仓促，加之作者水平有限，疏漏之处在所难免，望广大读者批评指正！

——编者

目 录

第一章　函数的极限与连续

科学史话

函数描述了客观世界中量与量之间的依赖关系，是高等数学研究的主要对象，极限揭示了函数的变化趋势，是现代数学的最基本概念，是学习微积分的重要基础。

18 世纪，微积分在 17 世纪的基础上进一步拓广与加深，函数的概念经过牛顿、莱布尼兹、欧拉、拉格朗日、约翰·伯努利等人的工作更加全面与精确了。

微积分的主要理论基础是极限论，可是，当时"极限"、"无穷小"、"连续"等基本概念是模糊的，极限论是不完善的。微积分理论不稳固的缺点，被一些唯心主义者抓住，进行了猛烈的攻击。

英国神学家贝克莱是攻击微积分的典型代表。1734 年他发表了一本名为《分析学家—与一个不信神的数学家的对话》，咒骂牛顿的微积分的推导是"分明的诡辩"，诬蔑微积分"招摇撞骗，把人们引入歧途"。他极尽谩骂之能事，实质是在兜售唯心论，维护宗教神学。

在贝克莱的挑动下，出现了数学史上的"第二次数学危机"，各执一词的双方展开了一场关于微积分奠基问题的大论战，长达 10 年之久。当时的著名物理学家朱林、数学家麦克劳林、泰勒等，对贝克莱进行了有力的反驳。同时，这场论战也激励着大批数学家，如法国的达朗贝尔、拉格朗日等对微积分基础概念进行深入研究，促进了微积分理论基础的建设。随着微积分在实践中的胜利，迫使贝克莱后来也不得不承认"流数术是一把万能的钥匙，借着它，近代数学家打开了几何以至大自然的秘密"。

1800 年前后，数学家开始关心数学分析的庞大分支在概念和证明中的不严密，诸如：函数、导数、积分概念的不清，一些数学家决心从这种混沌中整理出头绪。

波尔查诺在分析严密性的基础方面可与柯西、狄里赫利并列。1771 年，在他的《纯粹分析证明》一书中，用类似现在的方法给出了连续函数的定义：只要 ω（的绝对值）充分小，就能使 $f(x+\omega)-f(x)$（的绝对值）任意小。1834 年，他给出了一个连续而处处不可微的例子，证明他当时已经完全了解到连续性与可微的区别。

柯西在他 1821 年出版的《解析教程》、1823 年出版的《无穷小分析教程概论》、1825 年出版的《微分计算教程》中，提出了与现在很近似的极限定义，第一次严格地将连续、导数、积分概念建立在极限的基础上，完成了微积分概念的严格表述，但他的严密性还不够。

狄里赫利（狄利克雷）是高斯和雅可比的学生，黎曼的指导教师，对微积分基本概念的严密性有过重要贡献。高斯、傅立叶、拉格朗日、阿贝尔、黎曼、斯托克斯、泊松在分析的严密性上都有很大贡献，但是，贡献最大的是维尔斯特拉斯。维尔斯特拉斯是一个有条理而又苦干的人，50 岁才成为柏林大学教授。是他消除了柯西、波尔查诺极限思想的不明确，以现代的 $\varepsilon-\delta$ 的

方式定义了函数的连续性。是他明确而又全面地采用了 $\varepsilon-\delta$ 方法，既排除了莱布尼兹的"固定无穷小"，也消除了柯西的"无限趋近"，用 ε,δ 这样静态的有限量为路标，刻画了动态的无限量，这一科学概念的数学化，是辨证法的又一次显现和胜利。

在应用方面，如物理学中的瞬时速度，变力所作的功，化学中的反应速率等都是极限的概念来定义的。因此，掌握好极限的概念和运算是十分重要的。

1.1 极限的概念

极限概念是学习微积分的基础，必须掌握好。我们首先讨论数列(整标函数) $x_n=f(n)$, $n\in Z^+$ 的极限，然后讨论函数 $y=f(x)$(当 $x\to\infty$ 或 $x\to x_0$ 时)的极限。

1.1.1 数列的极限

定义 1.1 如果当 n 无限增大时(记为 $n\to\infty$)，数列 $\{x_n\}$ 的通项 x_n 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \quad 或 \quad x_n\to A(当\ n\to\infty\ 时).$$

若数列 $\{x_n\}$ 没有极限，则称数列 $\{x_n\}$ 是发散的(或极限不存在)。

例 1 考察数列的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $x_n=2+\dfrac{(-1)^n}{n}$；(2) $x_n=-\dfrac{1}{2^{n-1}}$. (3) $x_n=n^2$

解 (1) 由此数列的特点可知，当 n 无限增大时，$x_n=2+\dfrac{(-1)^n}{n}$ 无限接近于 2，所以得

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)=2.$$

(2) 由此数列的特点可知，当 n 无限增大时，$x_n=-\dfrac{1}{2^{n-1}}$ 无限接近于 0，所以得

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=0.$$

(3) 由此数列的特点可知，当 n 无限增大时，$x_n=n^2$ 无限增大，根据定义 1.1 知

$$\lim_{n\to\infty}n^2\ 发散.$$

1.1.2 函数的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ 内有定义。如果当 x 的绝对值无限增大(即 $x\to\infty$)时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (当\ x\to\infty\ 时).$$

由定义 2 可知，当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的极限为 0，可记为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}=0 \quad 或 \quad \frac{1}{x}\to 0(当 x\to\infty 时).$$

例 2　讨论极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}$.

解　当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的值无限接近于 0，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0$.

$x\to\infty$ 包含 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 两种情况，有时只需要考察 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数的变化趋势，对此有定义：

定义 1.3　设函数 $y=f(x)$ 在$(a,+\infty)$ 内有定义，如果当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\,(当 x\to+\infty 时).$$

设函数 $y=f(x)$ 在$(-\infty,b)$ 内有定义，如果当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\,(当 x\to-\infty 时).$$

例如函数 $y=\dfrac{1}{x}$，我们有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 及 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

一般地，如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$；反之，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

例 3　讨论当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 的极限.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x$ 虽然都存在，但它们不相等，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot}x$ 不存在.

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$的极限

$x\to x_0$ 表示以任何方式从 x_0 的左、右两侧无限趋近于 x_0.

下面考察当 $x\to 1$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势，当 x 无限趋近于 1 时，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的值无限趋近于 2。对于这种变化趋势我们有定义。

定义 1.4　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左、右近旁有定义（在点 x_0 处，函数 $f(x)$ 可以没有定义），如果当 x 无限趋近于 x_0 时，对应的函数 $y=f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\,(当 x\to x_0 时).$$

由定义 1.4，我们有

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2 \quad 或 \quad \frac{x^2-1}{x-1}\to 2\,(当 x\to 1 时).$$

极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 刻画了函数 $f(x)$ 在 x 趋于点 x_0 时的变化趋势．而不是在点 x_0 处的性态。

例 4　讨论函数 $f(x)=x^2(x\geqslant 0)$在 $x\to 2$ 时的极限。

解　当 $x\to 2$ 时，函数 $f(x)=x^2$ 无限接近于 4，所以$\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

由极限定义并借助于函数的图像，我们能确定一些常见函数的极限：

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} C=C(C\text{为常数});\ \lim_{x\to x_0}x=x_0.$$

3. 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$的左极限与右极限

在 $x\to x_0$ 时，$f(x)\to A$ 的极限定义中，x 既从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0（记作 $x\to x_0-0$ 或 $x\to x_0^-$），同时 x 也从 x_0 的右侧无限趋近于 x_0（记作 $x\to x_0+0$ 或 $x\to x_0^+$）在实际问题中，有时只能或只需讨论 x 从 x_0 的一侧向 x_0 无限趋近时，函数 $f(x)$的变化趋势，对此，给出下面定义：

定义 1.5 如果 $f(x)$在(a,x_0)内有定义，并且当 $x\to x_0-0$ 时，函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0-0)=A.$$

如果 $f(x)$在(x_0,b)内有定义，并且当 $x\to x_0+0$ 时，函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 B，则称 B 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的右极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=B \quad 或 \quad f(x_0+0)=B.$$

左极限或右极限统称为单侧极限。

一般地，如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$的极限存在，则当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$的左、右极限存在且相等；反之，结论也成立。

例 5 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$，当 $x\to x_0$ 时的极限。

解 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$，因为

$$f(0+0)\neq f(0-0),$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在。

1.1.3 无穷小与无穷大

1. 无穷小定义、性质

定义 1.6 如果当 $x\to x_0(x\to\infty)$时，函数 $f(x)$的极限为零，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$(或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$)，则称 $f(x)$为当 $x\to x_0(x\to\infty)$时的无穷小。

例如，由于$\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0$，因此，函数 $x-3$ 为当 $x\to 3$ 时的无穷小。

无穷小有下列性质（证略）：

性质 1 有限个无穷小的代数和为无穷小；

性质 2 有界函数与无穷小的积为无穷小；

性质 3 有限个无穷小的积为无穷小。

例 6 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$，由性质 2 得$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=0$.

另外同学们应记忆的有界量如：$(-1)^n$、所有反三角函数、正弦、余弦函数等等。

2. 无穷大定义

定义 1.7 如果当 $x\to x_0(x\to\infty)$时，函数 $f(x)$的绝对值无限增大，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$(或

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$)，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时的无穷大。

例如，当 $x\to x_0$ 时，$\left|\frac{1}{x}\right|$ 无限增大，所以 $\frac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 时是无穷大量，记作 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$.

应当指出，说一个函数是无穷大时，必须指明自变量变化的趋向；不论多么大的常数，都不是无穷大。

3. 无穷小与无穷大的关系

我们知道，当 $x\to 3$ 时，$\frac{1}{x-3}$ 是无穷大，$x-3$ 是无穷小；当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x+1}$ 是无穷小，$x+1$ 是无穷大。一般地，有定理如下：

定理 1.1　自变量在同一变化趋势下，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ ($\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$)，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$ ($\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$)；反之，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ 且 $f(x)\neq 0$ ($\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 且 $f(x)\neq 0$)，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty$ ($\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=\infty$).

例 7　讨论极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{3+x^2}$.

解　容易看出，函数 $3+x^2$ 当 $x\to\infty$ 时为无穷大，由定理得 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{3+x^2}=0$.

习题 1—1

1. 利用函数图像，考察函数变化趋势，并写出其极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(4x-5)$；　(2) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)$；

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 1}\lg x$；　(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{3}\right)^x$；　(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x$；　(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x$；

(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$.

2. 当 $x\to 0$ 时，哪些是无穷小？哪些是无穷大？

(1) $1000x^2$；　(2) $\frac{1}{2}x^2-x$；　(3) $\frac{2}{x}$；　(4) $\frac{x}{0.01}$；

(5) $\frac{x}{x^2}$；　(6) $\frac{x^2}{x}$；　(7) $x^2+0.1x$；　(8) $\frac{1+2x}{x^2}$；

(9) $\ln x\ (x>0)$.

3. 求函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{x}}{x}$.

1.2 极限的运算

1.2.1 函数极限的四则运算法则

设$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$.

法则 1　两个具有极限的函数的代数和的极限，等于这两个函数的极限的代数和，即

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm \lim g(x)=A\pm B.$$

法则 2　两个具有极限的函数的积的极限等于这两个函数的极限的积，即

$$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)=AB.$$

特别地，若 $g(x)=f(x)$，则

$$\lim[f(x)g(x)]=\lim[f(x)]^2=[\lim f(x)]^2=A^2.$$

若 $g(x)=c$（常数），则

$$\lim[f(x)g(x)]=\lim[cf(x)]=\lim c\lim f(x)=c\lim f(x).$$

即常数因子可以提到极限符号外面。

法则 3　两个具有极限的函数的商的极限，当分母的极限不为零时，等于这两个函数的极限的商，即

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

法则 1 和法则 2 可以推广到具有极限的有限个函数的情形。当 n 为正整数时，则有

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n,n\in Z^+$$

下面用法则来求函数的极限。

例 1　求$\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-x+7)$.

解　$$\lim_{x\to 2}(2x^2-x+7)=\lim_{x\to 2}2x^2-\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}7$$
$$=2(\lim_{x\to 2}x)^2-\lim_{x\to 2}x+7=13.$$

例 2　求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

解　由$\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)=0$，因此不能直接用法则 3，又$\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0$，在 $x\to 3$ 的过程中，$x\neq 3$。因此，求此分式的极限时，应首先约去非零公因子 $x-3$. 于是

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}.$$

例 3　求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+5}{x^2-4}$.

解　由于$\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$，$\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+5)=17$. 因此，它既不能用法则 3，分子分母又无非零公因子可约。此时，先考察函数倒数的极限。由于$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+5}=\dfrac{0}{17}=0$，据无穷小与无穷大的关系，可得$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+5}{x^2-4}=\infty$.

例 4 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x+3}{x^3+4x-8}$.

解 由于当 $x\to\infty$时，分子和分母都是无穷大而极限不存在，不能直接用法则 3. 此时，我们用分子、分母中自变量的最高次幂同除原式中的分子和分母，再用法则 3 求极限得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x+3}{x^3+4x-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{1+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{8}{x^3}}.$$

因为

$$\lim_{x\to\infty}\left(3+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)=3+5\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)^2+3\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)^3=3,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)=1+4\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)^2-8\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)^3=1.$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x+3}{x^3+4x-8}=\dfrac{3}{1}=3.$

例 5 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x+1}{2x^2+5}$.

解 将分子、分母同除以 x^3，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{3x^3+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{3+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\frac{0}{3}=0.$$

显然 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x+1}{2x^2+5}=\infty.$

从例 4、例 5 可以看出，求有理函数在 $x\to\infty$时的极限，当 $a_0\neq0,b_0\neq0$ 时，有如下结果：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, & 若\ m>n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & 若\ m=n,\\ \infty, & 若\ m<n.\end{cases}$$

1.2.2 两个重要极限

极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 和极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$ 是微积分中常用的极限，下面，我们来学习它们的应用。

1. 极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$（证明略）

例 6 求极限$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin3t}{t}$.

解 令 $x=3t,\dfrac{\sin3t}{t}=\dfrac{\sin x}{\dfrac{x}{3}}=3\ \dfrac{\sin x}{x}$

当 $t\to0$ 时，$x\to0$，由上面的重要极限，可得

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin3t}{t}=\lim_{x\to0}3\ \frac{\sin x}{x}=3\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=3\times1=3.$$

例 7　求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x}=1\times1=1.$

例 8　求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right]^2=\dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{\frac{x}{2}\to0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right]^2=\dfrac{1}{2}.$

2. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$（证明略）

若令$\dfrac{1}{x}=y$，则 $x\to\infty$时，$y\to0$. 于是有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\mathrm{e},$$

得极限的另一常用形式$\lim\limits_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\mathrm{e}$.

无理数 e 和无理数 π 一样，是数学中最重要的常数，18 世纪最伟大的数学家之一瑞士人欧拉（*Eulerl*. 1707－1783 年）首先用字母表示了这个无理数，它的精确到 20 位小数的值是

$$\mathrm{e}\approx2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 36$$

例 9　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$.

解　先将 $1+\dfrac{3}{x}$改写成 $1+\dfrac{3}{x}=1+\dfrac{1}{\dfrac{x}{3}}$，再令 $t=\dfrac{x}{3}$，当 $x\to\infty$时，$t\to\infty$，得

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^3=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^3=\mathrm{e}^3.$$

例 10　求极限$\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}[1+(-x)]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\{[1+(-x)]^{\frac{1}{-x}}\}^{-1}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{[1+(-x)]^{\frac{1}{-x}}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}[1+(-x)]^{\frac{1}{-x}}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

习题 1－2

1. 求函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to-2}(3x^2-5x+2)$；　(2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$；　(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{2}{x-3}\right)$；

(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-3}$；　(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x^2+5}{(x-1)^2}$；

(7) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^2-x-2}$；　(8) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$；　(9) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}\right)$；