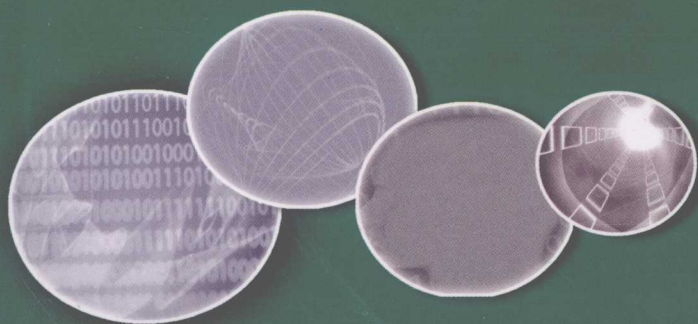


GAODENGYINGYONGSHUXUE

高等应用数学

· 陈继业 主编 ·



白山出版社

高等应用数学

主 编 陈继业

副主编 李会林 郝连军

王达开 詹耀华

刘全振 赵建玲

编 委 宋冬梅 王明礼

白山出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学/陈继业主编. —沈阳:白山出版社,2008.5
ISBN 978-7-80687-347-2

I. 高… II. 陈… III. 应用数学IV. 029.

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 059425 号

高等应用数学

主 编 陈继业

副主编 林会李 姜玉珠

参 审 王杰平

参 审 陈金成

参 审 王明林 宋学刚 姜 鹏

出版发行:白山出版社

地 址:沈阳市沈河区二纬路 23 号

邮 编:110013

电 话:024-23065667

电子信箱:baishan867@163.com

责任编辑:朱忠义

装帧设计:李 阳

责任校对:王 鹏

印 刷:沈阳市北陵印刷厂有限公司

幅面尺寸:185mm×260mm

印 张:9.25

字 数:280 千字

版 次:2008 年 5 月第一次

印 次:2008 年 5 月第一次印刷

印 数:1~2000 册

书 号:ISBN 978-7-80687-347-2

定 价:29.80 元

前言

本书是为高等职业技术学院基础课——高等应用数学编写的教材,其内容包括函数极限与连续、微积分、微积分方程、线性代数、拉普拉斯变换五部分。

高等应用数学作为高等职业技术学院的基础课,在培养高素质、复合型人才方面起着重要的作用。首先,数学是较为抽象的科学,在数学教学中可以培养学生遇事看本质的思维方法和抽象思维能力;其次,数学是逻辑性最强的科学,在教学中可以培养学生思维的严密性,批判性和实事求是、言必有据、正直讲理的思维品质;再次,数学还是应用及其广泛的科学,在教学中可以通过一题多解、一法多变来培养学生思维的广阔性和灵活性;此外,数学概念、定理所包含的辩证唯物主义思想,数学解题所要求的精益求精、坚忍不拔的优良品质与规则意识等等,都是很好的人文教育题材,对学生人文精神的培育与综合素质的提高具有重要的价值。可以说,重视数学尤其是高等应用数学的教学,对提高高等职业技术学院的学生整体素质有着重要的意义。

本书遵循“必须”、“够用”、“突出”的原则,选取学生需要的内容材料,在难度上进行了推敲,既满足学生学习的基本需要,也为学生进一步深造提供相应的发展空间。

本书是集体努力的结晶。由辽宁石化职业技术学院的陈继业任主编,由李会林(朝阳高等师范专科学校)、詹耀华(辽宁金融职业学院)、刘全振(河北旅游职业学院)、赵建玲(张家口职业技术学院)、郝连军(辽宁石化职业技术学院)、王达开(辽宁石化职业技术学院)任副主编,宋冬梅(河北女子职业技术学院)、王明礼(邢台学院)任编委。具体编写任务如下:陈继业、宋冬梅、郝建军编写第一章;李会林编写第二章;詹耀华、刘全振编写第三章;刘全振、赵建玲编写第四章;赵建玲、詹耀华编写第五章;陈继业、李会林编写第六章;陈继业、王明礼、王达开编写第七章;郝连军编写了各章的科学史话部分;习题答案由王达开提供。陈继业撰写了编写提纲并统稿,宋冬梅、王明礼做了大量的文字工作。

由于时间仓促,加之作者水平有限,疏漏之处在所难免,望广大读者批评指正!

——编者

目 录

第一章 函数的极限与连续	1
科学史话	1
1.1 极限的概念	2
1.1.1 数列的极限	2
1.1.2 函数的极限	2
1.1.3 无穷小与无穷大	4
习题 1-1	5
1.2 极限的运算	6
1.2.1 函数极限的四则运算法则	6
1.2.2 两个重要极限	7
习题 1-2	8
1.3 函数的连续性	9
1.3.1 初等函数	9
1.3.2 复合函数	9
1.3.3 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续	10
习题 1-3	11
1.4 习题课	12
习题 1-4	13
复习题一	14
第二章 导数、微分及应用	15
科学史话	15
2.1 导数定义及四则运算法则	16
2.1.1 导数的定义	16
2.1.2 求导公式	16
2.1.3 函数的和、差、积、商的求导法则	17
2.1.4 导数的几何意义及应用	18
习题 2-1	18
2.2 复合函数的求导法则、高阶导数	19
2.2.1 复合函数的求导法则	19
2.2.2 高阶导数	20

习题 2-2	21
2.3 微分的定义及应用	21
2.3.1 微分的定义、基本公式和法则	21
2.3.2 微分在近似计算上的应用	23
习题 2-3	23
2.4 函数的单调性、极值、最值	24
2.4.1 函数的单调性	24
2.4.2 函数的极值与最值	24
习题 2-4	26
2.5 曲线的凹凸性及拐点、函数作图	27
2.5.1 曲线的凹凸性及拐点	27
2.5.2 函数作图	28
习题 2-5	30
2.6 洛必达法则	31
2.6.1 $\frac{0}{0}$ 型未定势	31
2.6.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	32
2.6.3 其他类型的未定式	32
习题 2-6	33
2.7 习题课	33
习题 2-7	35
复习题二	35
第三章 不定积分	38
科学史话	38
3.1 不定积分的概念及性质	39
3.1.1 不定积分的概念	39
3.1.2 不定积分的基本积分公式	41
3.1.3 不定积分的性质	41
习题 3-1	42
3.2 不定积分的积分方法	43
3.2.1 换元积分法	43

3.2.2 分部积分法	46
习题 3-2	49
3.3 习题课	49
习题 3-3	51
复习题三	51
第四章 定积分	53
科学史话	53
4.1 定积分的概念、基本计算公式及性质	55
4.1.1 定积分的概念	55
4.1.2 微积分基本计算公式(牛顿-莱布尼兹公式)	55
4.1.3 定积分的性质(运算法则)	56
4.1.4 变上限定积分	56
习题 4-1	58
4.2 定积分的积分法	58
4.2.1 定积分的换元积分法	58
4.2.2 定积分的分部积分法	59
4.2.3 广义积分	59
习题 4-2	61
4.3 定积分在几何上的应用	61
习题 4-3	63
4.4 习题课	64
习题 4-4	66
复习题四	66
第五章 常微分方程	68
科学史话	68
5.1 常微分方程的基本概念与分离变量法	69
5.1.1 常微分方程的基本概念	69
5.1.2 分离变量法	71
习题 5-1	71
5.2 一阶线性微分方程与可降阶的高阶微分方程	72
5.2.1 一阶线性微分方程	72

5.2.2 可降阶的高阶微分方程	74
习题 5-2	75
5.3 二阶常系数线性微分方程	76
5.3.1 二阶常系数线性微分方程解的性质	76
5.3.2 二阶常系数非齐次线性微分方程的求解方法	77
习题 5-3	79
5.4 习题课	79
习题 5-4	82
复习题五	82
第六章 行列式、矩阵与线性方程组	84
科学史话	84
6.1 行列式的定义及性质	85
6.1.1 二、三阶行列式	85
6.1.2 行列式的性质	86
习题 6-1	87
6.2 克莱姆法则	88
习题 6-2	90
6.3 矩阵的定义、运算	90
6.3.1 矩阵的概念	90
6.3.2 矩阵的运算	92
习题 6-3	94
6.4 矩阵的初等变换、求秩	94
6.4.1 矩阵的初等变换	94
6.4.2 矩阵的秩的概念	95
6.4.3 求秩	96
习题 6-4	96
6.5 习题课	96
习题 6-5	99
复习题六	99
第七章 拉普拉斯变换	101
科学史话	101

7.1 拉普拉斯变换的概念.....	102
7.1.1 拉普拉斯变换的基本概念.....	102
7.1.2 单位脉冲函数.....	104
习题 7-1	105
7.2 拉普拉斯变换的性质.....	106
习题 7-2	110
7.3 拉普拉斯变换的逆变换.....	110
习题 7-3	113
7.4 习题课	113
习题 7-4	117
复习题七	117
简易积分表.....	119
习题答案.....	127

第一章 函数的极限与连续

科学史话

函数描述了客观世界中量与量之间的依赖关系,是高等数学研究的主要对象,极限揭示了函数的变化趋势,是现代数学的最基本概念,是学习微积分的重要基础。

18 世纪,微积分在 17 世纪的基础上进一步拓广与加深,函数的概念经过牛顿、莱布尼兹、欧拉、拉格朗日、约翰·伯努利等人的工作更加全面与精确了。

微积分的主要理论基础是极限论,可是,当时“极限”、“无穷小”、“连续”等基本概念是模糊的,极限论是不完善的。微积分理论不稳固的缺点,被一些唯心主义者抓住,进行了猛烈的攻击。

英国神学家贝克莱是攻击微积分的典型代表。1734 年他发表了一本名为《分析学家—与一个不信神的数学家的对话》,咒骂牛顿的微积分的推导是“分明的诡辩”,诬蔑微积分“招摇撞骗,把人们引入歧途”。他极尽谩骂之能事,实质是在兜售唯心论,维护宗教神学。

在贝克莱的挑动下,出现了数学史上的“第二次数学危机”,各执一词的双方展开了一场关于微积分奠基问题的大论战,长达 10 年之久。当时的著名物理学家朱林、数学家麦克劳林、泰勒等,对贝克莱进行了有力的反驳。同时,这场论战也激励着大批数学家,如法国的达朗贝尔、拉格朗日等对微积分基本概念进行深入研究,促进了微积分理论建设。随着微积分在实践中的胜利,迫使贝克莱后来也不得不承认“流数术是一把万能的钥匙,借着它,近代数学家打开了几何以至大自然的秘密”。

1800 年前后,数学家开始关心数学分析的庞大分支在概念和证明中的不严密,诸如:函数、导数、积分概念的不清,一些数学家决心从这种混沌中整理出头绪。

波尔查诺在分析严密性的基础方面可与柯西、狄利赫利并列。1771 年,在他的《纯粹分析证明》一书中,用类似现在的方法给出了连续函数的定义:只要 ω (的绝对值)充分小,就能使 $f(x+\omega)-f(x)$ (的绝对值)任意小。1834 年,他给出了一个连续而处处不可微的例子,证明他当时已经完全了解到连续性与可微的区别。

柯西在他 1821 年出版的《解析教程》、1823 年出版的《无穷小分析教程概论》、1825 年出版的《微分计算教程》中,提出了与现在很近似的极限定义,第一次严格地将连续、导数、积分概念建立在极限的基础上,完成了微积分概念的严格表述,但他的严密性还不够。

狄利赫利(狄利克雷)是高斯和雅可比的学生,黎曼的指导教师,对微积分基本概念的严密性有过重要贡献。高斯、傅立叶、拉格朗日、阿贝尔、黎曼、斯托克斯、泊松在分析的严密性上都有很大贡献,但是,贡献最大的是维尔斯特拉斯。维尔斯特拉斯是一个有条理而又苦干的人,50 岁才成为柏林大学教授。是他消除了柯西、波尔查诺极限思想的不明确,以现代的 $\varepsilon-\delta$ 的

方式定义了函数的连续性。是他明确而又全面地采用了 $\epsilon - \delta$ 方法,既排除了莱布尼兹的“固定无穷小”,也消除了柯西的“无限趋近”,用 ϵ, δ 这样静态的有限量为路标,刻画了动态的无限量,这一科学概念的数学化,是辩证法的又一次显现和胜利。

在应用方面,如物理学中的瞬时速度,变力所作的功,化学中的反应速率等都是极限的概念来定义的。因此,掌握好极限的概念和运算是十分重要的。

1.1 极限的概念

极限概念是学习微积分的基础,必须掌握好。我们首先讨论数列(整标函数) $x_n = f(n)$, $n \in \mathbb{Z}^+$ 的极限,然后讨论函数 $y = f(x)$ (当 $x \rightarrow \infty$ 或 $x \rightarrow x_0$ 时)的极限。

1.1.1 数列的极限

定义 1.1 如果当 n 无限增大时(记为 $n \rightarrow \infty$),数列 $\{x_n\}$ 的通项 x_n 无限接近于一个确定的常数 A ,则称 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限,或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A ,记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow A \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}).$$

若数列 $\{x_n\}$ 没有极限,则称数列 $\{x_n\}$ 是发散的(或极限不存在)。

例 1 考察数列的变化趋势,写出它们的极限:

$$(1) x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}; \quad (2) x_n = -\frac{1}{2^{n-1}}. \quad (3) x_n = n^2$$

解 (1) 由此数列的特点可知,当 n 无限增大时, $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ 无限接近于 2,所以得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 2.$$

(2) 由此数列的特点可知,当 n 无限增大时, $x_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$ 无限接近于 0,所以得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2^{n-1}} \right) = 0.$$

(3) 由此数列的特点可知,当 n 无限增大时, $x_n = n^2$ 无限增大,根据定义 1.1 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \text{ 发散}.$$

1.1.2 函数的极限

1. 当 $x \rightarrow \infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.2 设函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ 内有定义。如果当 x 的绝对值无限增大(即 $x \rightarrow \infty$)时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A ,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限,记为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (\text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时}).$$

由定义 2 可知,当 $x \rightarrow \infty$ 时,函数 $y = \frac{1}{x}$ 的极限为 0,可记为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时}).$$

例2 讨论极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2}$.

解 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的值无限接近于 0, 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$.

$x \rightarrow \infty$ 包含 $x \rightarrow +\infty$ 与 $x \rightarrow -\infty$ 两种情况, 有时只需要考察 $x \rightarrow +\infty$ (或 $x \rightarrow -\infty$) 时, 函数的变化趋势, 对此有定义:

定义 1.3 设函数 $y = f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内有定义, 如果当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时}).$$

设函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, b)$ 内有定义, 如果当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow -\infty$ 时的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (\text{当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时}).$$

例如函数 $y = \frac{1}{x}$, 我们有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ 及 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

一般地, 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$; 反之, 如果 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

例3 讨论当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 的极限.

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x$ 虽然都存在, 但它们不相等, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccot} x$ 不存在.

2. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

$x \rightarrow x_0$ 表示以任何方式从 x_0 的左、右两侧无限趋近于 x_0 .

下面考察当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的变化趋势, 当 x 无限趋近于 1 时, 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的值无限趋近于 2. 对于这种变化趋势我们有定义.

定义 1.4 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的左、右近旁有定义 (在点 x_0 处, 函数 $f(x)$ 可以没有定义), 如果当 x 无限趋近于 x_0 时, 对应的函数 $y = f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A , 则称 A 为函数 $y = f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (\text{当 } x \rightarrow x_0 \text{ 时}).$$

由定义 1.4, 我们有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \quad \text{或} \quad \frac{x^2 - 1}{x - 1} \rightarrow 2 \quad (\text{当 } x \rightarrow 1 \text{ 时}).$$

极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 刻画了函数 $f(x)$ 在 x 趋于点 x_0 时的变化趋势. 而不是在点 x_0 处的性态.

例4 讨论函数 $f(x) = x^2 (x \geq 0)$ 在 $x \rightarrow 2$ 时的极限.

解 当 $x \rightarrow 2$ 时, 函数 $f(x) = x^2$ 无限接近于 4, 所以 $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

由极限定义并借助于函数的图像, 我们能确定一些常见函数的极限:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} C = C (C \text{ 为常数}); \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$$

3. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的左极限与右极限

在 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) \rightarrow A$ 的极限定义中, x 既从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0 - 0$ 或 $x \rightarrow x_0^-$), 同时 x 也从 x_0 的右侧无限趋近于 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0 + 0$ 或 $x \rightarrow x_0^+$) 在实际问题中, 有时只能或只需讨论 x 从 x_0 的一侧向 x_0 无限趋近时, 函数 $f(x)$ 的变化趋势, 对此, 给出下面定义:

定义 1.5 如果 $f(x)$ 在 (a, x_0) 内有定义, 并且当 $x \rightarrow x_0 - 0$ 时, 函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0 - 0) = A.$$

如果 $f(x)$ 在 (x_0, b) 内有定义, 并且当 $x \rightarrow x_0 + 0$ 时, 函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 B , 则称 B 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B \quad \text{或} \quad f(x_0 + 0) = B.$$

左极限或右极限统称为单侧极限。

一般地, 如果当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限存在, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的左、右极限存在且相等; 反之, 结论也成立。

例 5 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限。

解 $f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$, 因为

$$f(0+0) \neq f(0-0),$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在。

1.1.3 无穷小与无穷大

1. 无穷小定义、性质

定义 1.6 如果当 $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限为零, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$), 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$ 时的无穷小。

例如, 由于 $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0$, 因此, 函数 $x-3$ 为当 $x \rightarrow 3$ 时的无穷小。

无穷小有下列性质 (证略):

性质 1 有限个无穷小的代数和为无穷小;

性质 2 有界函数与无穷小的积为无穷小;

性质 3 有限个无穷小的积为无穷小。

例 6 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}$ 。

解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, |\arctan x| < \frac{\pi}{2}$, 由性质 2 得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x} = 0$ 。

另外同学们应记忆的有界量如: $(-1)^n$ 、所有反三角函数、正弦、余弦函数等等。

2. 无穷大定义

定义 1.7 如果当 $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$ 时, 函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$), 则称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) 时的无穷大。

例如, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\left| \frac{1}{x} \right|$ 无限增大, 所以 $\frac{1}{x}$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是无穷大量, 记作 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ 。

应当指出, 说一个函数是无穷大时, 必须指明自变量变化的趋向; 不论多么大的常数, 都不是无穷大。

3. 无穷小与无穷大的关系

我们知道, 当 $x \rightarrow 3$ 时, $\frac{1}{x-3}$ 是无穷大, $x-3$ 是无穷小; 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x+1}$ 是无穷小, $x+1$ 是无穷大。一般地, 有定理如下:

定理 1.1 自变量在同一变化趋势下, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$), 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 0$); 反之, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ 且 $f(x) \neq 0$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 且 $f(x) \neq 0$), 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = \infty$)。

例 7 讨论极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3+x^2}$ 。

解 容易看出, 函数 $3+x^2$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大, 由定理得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3+x^2} = 0$ 。

习题 1-1

1. 利用函数图像, 考察函数变化趋势, 并写出其极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} (4x-5)$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+1)$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right)$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow 1} \lg x$;

(6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x$;

(7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{3}\right)^x$;

(8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x$;

(9) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x$;

(10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x$ 。

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 哪些是无穷小? 哪些是无穷大?

(1) $1000x^2$;

(2) $\frac{1}{2}x^2 - x$;

(3) $\frac{2}{x}$;

(4) $\frac{x}{0.01}$;

(5) $\frac{x}{x^2}$;

(6) $\frac{x^2}{x}$;

(7) $x^2 + 0.1x$;

(8) $\frac{1+2x}{x^2}$;

(9) $\ln x (x > 0)$ 。

3. 求函数的极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x^2}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \frac{1}{x}}{x}$ 。

1.2 极限的运算

1.2.1 函数极限的四则运算法则

设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$.

法则 1 两个具有极限的函数的代数 and 的极限, 等于这两个函数的极限的代数和, 即

$$\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B.$$

法则 2 两个具有极限的函数的积的极限等于这两个函数的极限的积, 即

$$\lim [f(x)g(x)] = \lim f(x) \lim g(x) = AB.$$

特别地, 若 $g(x) = f(x)$, 则

$$\lim [f(x)g(x)] = \lim [f(x)]^2 = [\lim f(x)]^2 = A^2.$$

若 $g(x) = c$ (常数), 则

$$\lim [f(x)g(x)] = \lim [cf(x)] = \lim c \lim f(x) = c \lim f(x).$$

即常数因子可以提到极限符号外面。

法则 3 两个具有极限的函数的商的极限, 当分母的极限不为零时, 等于这两个函数的极限的商, 即

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

法则 1 和法则 2 可以推广到具有极限的有限个函数的情形。当 n 为正整数时, 则有

$$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n = A^n, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

下面用法则来求函数的极限。

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - x + 7)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - x + 7) &= \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 7 \\ &= 2(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - \lim_{x \rightarrow 2} x + 7 = 13. \end{aligned}$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$.

解 由 $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = 0$, 因此不能直接用法则 3, 又 $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0$, 在 $x \rightarrow 3$ 的过程中, $x \neq 3$. 因此, 求此分式的极限时, 应首先约去非零公因子 $x-3$. 于是

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}.$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+5}{x^2-4}$.

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0, \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 5) = 17$. 因此, 它既不能用法则 3, 分子分母又无非零公因子可约。此时, 先考察函数倒数的极限。由于 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{3x+5} = \frac{0}{17} = 0$, 据无穷小与无穷大的关系, 可得 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+5}{x^2-4} = \infty$.

例 4 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+5x+3}{x^3+4x-8}$.

解 由于当 $x \rightarrow \infty$ 时, 分子和分母都是无穷大而极限不存在, 不能直接用法则 3. 此时, 我们用分子、分母中自变量的最高次幂同除原式中的分子和分母, 再用法则 3 求极限得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+5x+3}{x^3+4x-8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x^3}}.$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right) = 3+5\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}\right)^2 + 3\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}\right)^3 = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1+\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right) = 1+4\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}\right)^2 - 8\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}\right)^3 = 1.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+5x+3}{x^3+4x-8} = \frac{3}{1} = 3.$

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+2x+1}{2x^2+5}$.

解 将分子、分母同除以 x^3 , 得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+5}{3x^3+2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}}{3+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{0}{3} = 0.$$

显然 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+2x+1}{2x^2+5} = \infty.$

从例 4、例 5 可以看出, 求有理函数在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 当 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ 时, 有如下结果:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \begin{cases} 0, & \text{若 } m > n, \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{若 } m = n, \\ \infty, & \text{若 } m < n. \end{cases}$$

1.2.2 两个重要极限

极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 和极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 是微积分中常用的极限, 下面, 我们来学习它们的应用。

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (证明略)

例 6 求极限 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{t}$.

解 令 $x = 3t$, $\frac{\sin 3t}{t} = \frac{\sin x}{\frac{x}{3}} = 3 \frac{\sin x}{x}$

当 $t \rightarrow 0$ 时, $x \rightarrow 0$, 由上面的重要极限, 可得

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{t} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\sin x}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 3 \times 1 = 3.$$

例 7 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times 1 = 1$.

例 8 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right]^2 = \frac{1}{2} \left[\lim_{\frac{x}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right]^2 = \frac{1}{2}$.

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ (证明略)

若令 $\frac{1}{x} = y$, 则 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0$. 于是有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e,$$

得极限的另一常用形式 $\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$.

无理数 e 和无理数 π 一样, 是数学中最重要的常数, 18 世纪最伟大的数学家之一瑞士人欧拉 (Euler, 1707—1783 年) 首先用字母表示了 this 无理数, 它的精确到 20 位小数的值是

$$e \approx 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 36$$

例 9 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x$.

解 先将 $1 + \frac{3}{x}$ 改写成 $1 + \frac{3}{x} = 1 + \frac{1}{\frac{x}{3}}$, 再令 $t = \frac{x}{3}$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow \infty$, 得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right]^3 = \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right]^3 = e^3.$$

例 10 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (-x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (-x)]^{\frac{1}{-x}}^{-1}$

$$= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} [1 + (-x)]^{\frac{1}{-x}}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} [1 + (-x)]^{\frac{1}{-x}}} = \frac{1}{e}.$$

习题 1-2

1. 求函数的极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 - 5x + 2)$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x - 3}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{2}{x - 3} \right)$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 3}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}$;

(6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 5}{(x - 1)^2}$;

(7) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - x - 2}$;

(8) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$;

(9) $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \right)$;