普通高等教育高级应用型人才培养规划教材

经济法

Jingjifa

主编 刘世红

暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

全国高职高专教育精品规划教材

高等数学基础学习辅导

（上册）

主　编　周雅丽

副主编　侯阔林　吴瑞溢

编　委　陈方芳　侯阔林

黄焕宗　田　敏

吴瑞溢　叶小华

曾文斗　周雅丽

北京交通大学出版社

·北京·

内 容 简 介

本书是与全国高职高专教育精品规划教材——《高等数学基础》的配套辅导用书。上册共分8个单元，内容包括：极限与连续、一元函数微积分学、常微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微积分学等。

每单元均包括内容提要、例题解析、同步训练、习题选解、参考答案和学习小结6个部分。本书还附有2005—2007年成人高等学校专升本招生全国统一考试高等数学（一）、高等数学（二）试题及参考答案，以及两套全国成人高等学校专升本考试的样题及参考答案。

本书适用于普通高等职业院校及成人高校大专班（专升本）学生学习使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学基础学习辅导．上册/周雅丽主编．—北京：北京交通大学出版社，2008.10
（全国高职高专教育精品规划教材）
ISBN 978-7-81123-427-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.周…　Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第163540号

责任编辑：史鸿飞
出版发行：北京交通大学出版社　　电话：010-51686414
北京市海淀区高梁桥斜街44号　　邮编：100044
印 刷 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×260　印张：11.25　字数：275千字
版　　次：2008年10月第1版　2008年10月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-81123-427-5/O·58
印　　数：1～3 000册　定价：19.00元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。
投诉电话：010-51686043，51686008；传真：010-62225406；E-mail：press@bjtu.edu.cn。

前　　言

《高等数学基础》一书是由北京交通大学出版社出版的精品规划教材，体现了数学应该“以应用为目的、以必须够用为度，少而精”的原则，加强数学知识的应用。出版两年来，得到了许多高职与成教院校和学生的青睐。为了帮助读者理解、消化和复习高等数学的知识与方法，我们编写了《高等数学基础学习辅导》。本书的编写还体现了“加强基础知识、巩固重点”的原则，更注重培养学生科学、良好的思维习惯及动手应用能力。本书是全国高职高专教育精品规划教材《高等数学基础》（以下简称“教材”）的配套学习用书，由于时间紧迫和高职院校数学课时减少等原因，我们先出版《高等数学基础学习辅导》的上册。

同时，本书是按照教育部制定的《高职高专基础课程教学要求》和最新修订的《全国各类成人高等学校专升本招生高等数学复习考试大纲》（以下简称“大纲”）的要求编写的，且其例题和同步训练题大多选自近年来全国成人高等学校专升本招生统考的试题。因此，它又是一本成人高考专升本招生复习辅导和实用教材。

本书的上册共分 8 个单元，其中第一单元与教材第 1、2 章相对应，第二单元至第七单元分别与教材第 3 章至第 8 章相对应，第八单元与教材第 9、10 章相对应。每单元均包含：内容提要、例题解析、同步训练、习题选解、参考答案和学习小结 6 个部分。本书附有 2005—2007 年成人高等学校专升本招生全国统一考试高等数学（一）、高等数学（二）试题的专升本考题及参考答案，以及两套全国成人高等学校专升本考试的样题及参考答案。

本书的第一单元及附录 A 由周雅丽编写，第二单元由陈方芳编写，第三、第四单元由叶小华编写，第五单元由黄焕宗编写，第六单元由侯阔林编写，第七单元由田敏编写，第八单元由吴瑞溢编写。全书由周雅丽统一策划、统稿和定稿，曾文斗做了大量的审核与校对工作。

本书的编写、出版得到了黎明职业大学的领导和老师的关心与支持，在此表示感谢。并对黎明职业大学公共教学部的陈水德教授和其他领导、老师的帮助致以衷心的感谢！

编　者

2008 年 10 月

目　　录

第一单元

函数、极限与连续

内容提要

本单元与“教材”的第1章与第2章相对应，主要介绍准备知识——函数、极限的概念与运算、函数的连续性.

一、函数的概念

（一）函数的概念与特性

1. 函数的定义

设某一变化过程中两个变量 x 和 y，D 是一个给定的数集，如果对于任意一个 $x\in D$，按照一定的对应法则 f，都有唯一的 y 与它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$.

注意：函数的定义域与对应法则是决定函数的两个重要因素，两个函数只有它们的定义域和对应法则都相同时，才认为是相同的，与自变量用什么字母无关.

2. 分段函数

用解析法表示函数时，有时用几个式子分段表示一个函数，即对于自变量的不同取值范围，函数采用不同的表达式，这种函数就是**分段函数**. 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

3. 函数的特性

(1) **有界性：** 对于定义在区间 (a,b) 内的函数 $y=f(x)$，如果存在一个 $M>0$，对于任一 $x\in(a,b)$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是**有界的**，否

则称函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内是**无界**的.

(2) **奇偶性**：设函数 $y=f(x)$ 定义在以原点为中心的对称区间 $(-a, a)$ $(a>0)$ 内，如果对于任一 $x\in(-a, a)$，都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内是**奇函数**；如果对于任一 $x\in(-a, a)$，都有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内是**偶函数**. 奇函数的图形是**关于原点对称的**，偶函数的图形是**关于 y 轴对称的.**

(3) **单调性.**

(4) **周期性.**

(二) 反函数与基本初等函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R，若对于 R 中的任意一个 y 的值，通过关系 $y=f(x)$，在 D 中都有唯一的 x 值与之对应，这样就建立了 x 与 y 的函数关系 $x=f^{-1}(y)$，这时，称 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的**反函数**，习惯上写成 $y=f^{-1}(x)$. 反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域是原来函数 $y=f(x)$（称为**直接函数**）的值域，而反函数的值域是直接函数的定义域. 互为反函数的两个函数（$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$）的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

2. 基本初等函数

以下 6 类函数统称为**基本初等函数**.

(1) **常函数**：$y=C$(C 是常数).

(2) **幂函数**：$y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$.

(3) **指数函数**：$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$，当 $a=\mathrm{e}\approx2.718\cdots\cdots$时，$y=\mathrm{e}^x$.

(4) **对数函数**：$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$，当 $a=\mathrm{e}\approx2.718\cdots\cdots$时，称为自然对数函数 $y=\ln x$.

(5) **三角函数**：$y=\sin x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

(6) **反三角函数**：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

(三) 复合函数与初等函数

1. 复合函数

设 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数，$u=\varphi(x)$，且与 x 对应的 u 值使得 y 有定义，则称 y 通过 u 是 x 的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$，u 称为**中间变量**.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次复合而成的，并能用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

二、极限的有关概念

(一) 数列的极限

对于无穷数列 $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$，如果存在一个常数 A，当 n 无限增大时，数列的通项 y_n 无限地趋近于 A，则称当 $n\to\infty$时，数列 $\{y_n\}$ 以 A 为极限，或称数列 $\{y_n\}$ 收敛于 A，记作

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \text{ 或 } y_n \to A(n\to\infty).$$

(二) 函数的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限

对于函数 $f(x)$，如果存在一个常数 A，当 x 的绝对值无限增大时，$f(x)$ 无限趋近于 A，则称当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x\to\infty).$$

2. 当 $x\to x_0$ 时的极限

设函数在点 x_0 的附近有定义（在点 x_0 处可以无定义），如果存在一个常数 A，当 x 无限趋近于 x_0 （$x\neq x_0$）时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于 A，则称函数 $f(x)$ 以 A 为**极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x\to x_0).$$

3. 左极限与右极限

在上面当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限的定义中，如果把"当 x 无限趋近于 x_0 （$x\neq x_0$）时"改为"当 x 从 x_0 （$x\neq x_0$）的左（右）侧趋近于 x_0 时"，那么，其结论即改为"就称 A 为当 $x\to x_0$ 时的**左（右）极限**"，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \quad (\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A).$$

(三) 极限存在的充要条件

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在的充要条件是它在该点的左右极限都存在且相等.

(四) 无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

(1) **定义**：极限是零的变量称为**无穷小量**，简称**无穷小**.

(2) **性质**：① 有限个无穷小量的代数和仍然是无穷小量；

② 有限个无穷小量的乘积仍然是无穷小量；

③ 有界函数与无穷小量之积仍然是无穷小量.

2. 无穷大量

在某个变化过程中，绝对值无限增大的变量称为**无穷大量**，简称为**无穷大**.

3. 无穷小与无穷大的关系

无穷大量的倒数是无穷小量；非零无穷小量的倒数是无穷大量.

三、极限的运算

(一) 极限的四则运算法则

设当 $x\to x_0$ 或（$x\to\infty$）时，$\lim u(x) = A$，$\lim v(x) = B$，则有

法则 1 $\lim[u(x)\pm v(x)]=\lim u(x)\pm\lim v(x)=A\pm B$.

法则 2 $\lim[u(x)\cdot v(x)]=\lim u(x)\cdot\lim v(x)=A\cdot B$.

法则 3 $\lim\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{\lim u(x)}{\lim v(x)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq0)$.

从法则 2 可得到以下推论：

推论 1 $\lim Cu(x)=C\lim u(x)=CA$（C 是常数）.

推论 2 $\lim[u(x)]^n=[\lim u(x)]^n=A^n(n\in\mathbf{N})$.

（二）两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

（三）无穷小的比较

1. 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$\alpha\to0$，$\beta\to0$，那么

(1) 如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是比 β 高阶的无穷小，记作 $\alpha=o(\beta)$；

(2) 如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是比 β 低阶的无穷小；

(3) 如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=C$，$(C\neq0$，$C\neq1)$，则称 α 与 β 是同阶无穷小；

(4) 如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 与 β 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

常见的等价无穷小有：当 $x\to0$ 时，

$$\sin x\sim x,\ \tan x\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ \ln(1+x)\sim x.$$

2. 等价无穷小的代换性质

如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$\alpha\sim\alpha_1$，$\beta\sim\beta_1$，且 $\lim\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

四、函数的连续性

（一）连续函数的概念

1. 在一点连续的定义

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义，当在 x_0 点处取增量 Δx 时，如果

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处连续，这时，称 x_0 为 $y=f(x)$ 的连续点.

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义，如果

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

2. 左连续与右连续

如果把定义 2 中的"$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$"改为"$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$"("$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$"),其结论则改为"则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**左连续(右连续)**.

3. 函数在一点连续的充要条件

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是函数在点 x_0 处左连续且右连续,即

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

4. 间断点及其分类

函数的不连续点称为函数的**间断点**.

由函数在一点处连续的充要条件可知,函数在点 x_0 处连续,必须满足以下 3 个条件:

(1) $f(x_0)$有定义;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

如果上述 3 个条件中有一个不成立,则 x_0 就是间断点. 左、右极限都存在的间断点称为**第一类间断点**,其余的间断点称为**第二类间断点**.

(二) 连续函数的运算性质

(1) 有限个连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍然是连续函数.

(2) 有限个连续函数的复合函数仍然是连续函数.

(三) 初等函数的连续性

一切初等函数在其定义区间内都连续.

(四) 闭区间上连续函数的性质

(1) **最大最小值定理**:设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,则在 $[a, b]$ 上必有最大值和最小值.

(2) **介值定理**:设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,且 $f(a) \neq f(b)$,则对介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任意一个实数 c,至少存在一点 $\xi \in (a, b)$,使得 $f(\xi) = c$.

(3) **推论(零点定理)**:设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,且 $f(a) \cdot f(b) < 0$,则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$,使得 $f(\xi) = 0$.

例题解析

【例 1.1】 填空题

(1) 设 $f(x)=\ln x$，$g(x)=e^{2x+1}$，则 $f[g(x)]=$________.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\leqslant 0 \\ \cos x & x>0 \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

(3) 极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=$________.

(4) 极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2+5x-6}=$________.

(1) 解 $f[g(x)]=\ln e^{2x+1}=2x+1$.

(2) 解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1$，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

(3) 解法 1（分母因式分解）

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}.$$

解法 2（分子有理化）

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}.$$

(4) 解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2+5x-6}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+6}=\dfrac{1}{7}$.

注意：在例 1.1 (2) 中，如果将函数改为 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ \cos x & x>0 \end{cases}$，那么，仍然有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ 成立，这是因为，虽然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义，但其极限仍存在（函数在一点的极限是否存在与在这点是否有定义无关）.

【例 1.2】 选择题

(1) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$，则 $f(2x-1)$ 的定义域是（　　）.

A. $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$　　B. $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$

C. $[0, 1]$　　D. $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$

(2) 当 $x\to 0$ 时，$x^2+\sin x$ 是 x 的（　　）.

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小

C. 同阶无穷小　　D. 等价无穷小

（3）设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=3$，则 a 等于（　　）.

A. $\dfrac{1}{3}$　　　B. 1　　　C. 2　　　D. 3

（4）设 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x<0 \\ x & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 2-x & 1<x<2 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在（　　）.

A. $x=0$ 及 $x=1$ 处均间断　　B. $x=0$ 及 $x=1$ 处都连续

C. $x=0$ 处间断，$x=1$ 处连续　D. $x=0$ 处连续，$x=1$ 处间断

（1）解　由 $0\leqslant 2x-1\leqslant 1$ 得$\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，故应选 B.

（2）解　因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$，所以，当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $x^2+\sin x$与 x 等价，故应选 D.

（3）解　因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}\cdot a=a$，由已知，得 $a=3$，故应选 D.

（4）解　由函数在一点连续的三个条件知：

① 在 $x=0$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-1)=-1$，而 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处间断；

② 在 $x=1$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=f(1)=1$，所以$f(x)$在 $x=1$ 处连续，故应选 C.

【例 1.3】 计算$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{3x^2-4\sin x}$.

解　当$x\to\infty$时，这类题目常常采用分子分母同除以 x 的最高次幂（本题是x^2）的方法求解，即

$$\frac{x^2+1}{3x^2-4\sin x}=\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{3-\dfrac{4\sin x}{x^2}},$$

由于$\dfrac{4\sin x}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}\cdot 4\sin x$，当 $x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x^2}$是无穷小量，而 $4\sin x$ 是有界的，故$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4\sin x}{x^2}=0$，因而可求得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{3x^2-4\sin x}=\frac{1}{3}.$$

【例 1.4】 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin 2x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{\sin 2x\cdot(\sqrt{x+1}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1-1}{\sin 2x\cdot(\sqrt{x+1}+1)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin 2x}{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{4}.$$

【例 1.5】 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{3x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{-6}=\mathrm{e}^{-6}$.

【例 1.6】 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-3x)}{\sin 2x}$.

解 因为 $x\to0$ 时，$\ln(1-3x)\sim(-3x)$，$\sin 2x\sim2x$，所以利用等价无穷小代换，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-3x)}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{-3x}{2x}=-\frac{3}{2}.$$

注：本例还可利用洛必达法则（见第 4 章）求解.

想一想：从上面的例 1.1(3)、例 1.2(2) 及例 1.3 至例 1.6 的 6 个例题的分析或解答中，能不能归纳出求极限有哪几种常用的方法?

【例 1.7】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+b, & x\neq1;\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 试确定 b 的值，使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

解 因为 $f(1)=2$，且$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}(x^2+b)=1+b$，所以，根据函数在一点连续的充要条件，必有

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)\text{，即 }1+b=2\text{，得 }b=1.$$

【例 1.8】 设$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-x+a}{x-2}=3$，求常数的 a 值.

分析 由于当 $x\to2$ 时，分母极限为零，而已知该函数的极限存在（其值为 3），故其分子的极限也必为零，即

$$\lim_{x\to2}(x^2-x+a)=4-2+a=0,$$

因而得 $a=-2$.

【例 1.9】 计算$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x+4}$.

解 解法 1 因为$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x+4}=\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+4}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+4}}=\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)^{4}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4}}$，且

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1},$$

又当 $x\to\infty$时，$\frac{1}{x}\to0$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{4}=1$；同理$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4}=1$，故$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x+4}=\frac{\mathrm{e}^{-1}\cdot1}{\mathrm{e}\cdot1}=\mathrm{e}^{-2}$.

解法 2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x+1}\cdot\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{3}$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{2}}\right]^{-2}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{3}$$
$$=\mathrm{e}^{-2}\cdot 1=\mathrm{e}^{-2}.$$

同 步 训 练

(一) 填空题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x & x\leqslant 0\\ \sqrt{x} & x>0\end{cases}$，则 $f(0)=$________.

2. 设 $f(x)=3x+5$，则 $f[f(x)-2]=$________.

3. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f[f(x)]=$________.

4. 设 $y=3^u$，$u=v^2$，$v=\tan x$，则复合函数 $y=f(x)=$________.

5. 设 $f(x+1)=x^2+3x+5$，则 $f(x)=$________.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x<0\\ \ln(1+x) & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=$________.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x^2)=$________.

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}=$________.

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{x-1}}{x^2-1}=$________.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{3x^2+x}=$________.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=$________.

12. 当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)$ 与 $\sin x$ 是等价无穷小，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin x}=$________.

13. 当 $x\to 0$ 时，ax^2 与 $\tan\dfrac{x^2}{4}$是等价无穷小，则 $a=$________.

14. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{3-x}}$的间断点是 $x=$________.

15. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$，则 $f(x)$ 的间断点 $x=$________.

16. 函数 $f(x)=\begin{cases}3x & -1<x<1\\ a & x=1\\ 3x^2 & 1<x<2\end{cases}$，在 $x=1$ 处连续，则 $a=$________.

17. 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ a+2 & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{2x}=\mathrm{e}$，则 $k=$________.

（二）选择题

1. 下列各组函数为同一函数的是（　　）.

A. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x)=x+1$

B. $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$

C. $f(x)=x$ 与 $g(x)=x(\cos^2 x+\sin^2 x)$

D. $f(x)=|x|$ 与 $g(x)=(\sqrt{x})^2$

2. 函数 $y=\sqrt{5-x}+\lg(x-1)$ 的定义域是（　　）.

A. $(0, 5]$　　B. $(1, 5]$　　C. $(1, 5)$　　D. $(1, +\infty)$

3. 函数 $f(x)=x^3\sin x$ 是（　　）.

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 有界函数　　D. 周期函数

4. 函数 $y=f(x)=2^{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 是（　　）.

A. $\log_2(x+1)$　　B. $\log_2 x+1$　　C. $\dfrac{1}{2}\log_2 x$　　D. $2\log_2 x$

5. 设 $f(x)=\tan x$，$g(x)=\dfrac{1}{x^2}$，则 $f[g(x)]$ 等于（　　）.

A. $\tan\dfrac{1}{x^2}$　　B. $\tan x^2$　　C. $\tan^2 x$　　D. $\tan^2\dfrac{1}{x}$

6. 设 $f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是（　　）.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 不存在

7. 当 $x\to 0$ 时，下列函数是无穷小的是（　　）.

A. $\dfrac{\sin x}{x}$　　B. $x^2+\sin x$　　C. $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$　　D. $2x-1$

8. 下列极限中，正确的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

9. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}$ 等于（　　）.

A. 0　　B. $\dfrac{2}{5}$　　C. 1　　D. $\dfrac{5}{2}$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$ 等于（　　）.

A. 0　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1