研究生(非数学类)数学系列规划教材

应用概率统计

PROBABILITY STATISTICS

夏乐天 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

研究生（非数学类）数学系列规划教材

应用概率统计

主　编　夏乐天
副主编　程国胜　印凡成
参　编　唐加山　蒋华松
主　审　韦博成

机 械 工 业 出 版 社

本书共分为十章，主要讨论应用概率统计的基本理论及其应用．读者只需具备高等数学、线性代数和初等概率论的知识，就可阅读全书．内容包括随机事件与概率、离散型随机变量及其分布、连续型随机变量及其分布、随机变量的数字特征、极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析．各章的习题均配有答案或提示，便于学生自学提高，另外部分章节还有若干补充内容供学生自学钻研．各章节在叙述上均按由浅入深、由简入繁渐进模式展开．本书作为非数学类专业研究生概率统计或应用统计课程的教材，凝聚了江苏省多所理工科大学多年来该课程的教学经验，理论严谨、文字通俗、内容方面颇具特色，很符合该课程教学的实际需要．本书的读者对象为非数学类专业研究生、大学理工科专业高年级学生和从事相关工作的科技工作者．

图书在版编目（CIP）数据

应用概率统计/夏乐天主编．—北京：机械工业出版社，2008.7
研究生（非数学类）数学系列规划教材
ISBN 978-7-111-24270-3

Ⅰ.应…　Ⅱ.夏…　Ⅲ.①概率论—研究生—教材②数理统计—研究生—教材　Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 091821 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：郑　丹　郑　玫　责任编辑：韩效杰　版式设计：霍永明
责任校对：申春香　封面设计：王伟光　责任印制：邓　博
北京诚信伟业印刷有限公司印刷
2008 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
169mm × 239mm ·23.75 印张·462 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-24270-3
定价：33.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：（010）68326294
购书热线电话：（010）88379639　88379641　88379643
编辑热线电话：（010）88379722
封面无防伪标均为盗版

前　言

本书是为工科专业研究生数学公共课所编写的教材，兼顾其他非数学专业研究生选用．它是各位作者多年从事本课程教学的积累，有些内容就是作者的研究成果．本书主要讨论应用概率统计的基本理论及其应用，每章都准备了较为充分的例题配合理论、方法及其应用的讲解，正文之后均配有适量的习题供读者练习，一些习题甚至还是正文内容的拓展．全书共分十章，采用分块阶梯式结构．第 1 章主要介绍古典概率和概率的公理化体系；第 2 章、第 3 章分别介绍离散型随机变量、连续型随机变量及其分布；第 4 章介绍随机变量的数字特征；第 5 章介绍极限定理；第 6 章介绍数理统计的基本概念；第 7 章、第 8 章分别介绍参数估计和假设检验，这两章是本书的核心部分；第 9 章方差分析与第 10 章回归分析相对独立着重应用．各章的习题均配有答案或提示，便于学生自学提高，另外部分章节还有若干补充内容供学生自学钻研．各章节在叙述上均按由浅入深、由简入繁渐进模式展开．

本书在通俗易懂，详略得当，注重实用以及更新内容方面独具特色．其主要特点可概括如下：

1. 作为一门重要的数学基础课教材，主张工科类专业通用，其他非数学专业研究生也可选用．本书较好地做到了在普通高等数学和线性代数的基础上，严格表述概率论与数理统计的基本概念、主要结果和典型方法技巧等基本内容．本书精心选材，注重概率统计与实践的结合．最基本概念的表述从背景引伸到严格定义以及示例解释，均注重对读者的逐步启发以帮助其加深理解；主要的基本定理从意义解释到严格证明以及方法应用，均做了细致的研究．这种详论有助于培养学生提出问题和解决问题的能力，同时也获得扎实的基础知识．本书不在理论的细致末节上过分追求，也不可能展示近代极其丰富多彩的研究成果和方法，而只注重统计思想、理论原理、使用条件、使用方法和结论分析方法的论述，因此部分理论并没有采纳定理和证明的形式，而是使用了演绎推理和文字说明相结合的形式．

2. 本书特别重视应用，大量的实例和习题都来自工科类专业及经济管理方面的实践．为了训练学生的统计推断能力，在每一重要部分都安排了一定数量的典型示例，其中有些是为了加深对基本概念的理解，有的是为了加强对典型方法和技巧的训练，而大量的有应用背景的例题可作为实用参考．重要的题目可用研究的形式进行，有的结果还是较为新颖的，其中的思想和处理方法颇具启发性．

3. 作为江苏省理工科大学二十一世纪的更新教材，首先本书在观点上渗透了近代统计学的一些思想；另外也介绍了工程实践中的一些行之有效的统计推断方法. 这些较新的内容和工程实践中的有关方法有的穿插在各有关章节，作为与经典理论方法的对比，开拓思路，启发兴趣；有的则独立门户，单作章节，以期引起讨论和研究；另外还有一些原为经典内容，现在从交叉学科的观点加以探讨，又能体现出一定的新意.

讲授完全书约需60学时，其中1~5章概率论部分约需30学时；如果学生已具备一定的概率论基础，则讲授概率论部分时可加快速度，20学时左右即可讲完1~5章，但要注意"随机向量的密度变换"、"条件数学期望"、"特征函数"、"矩母函数"等内容应该详细讲解，因为这些内容非数学专业学生本科阶段一般是没学过的.

本书第1、6章由南京邮电大学唐加山老师执笔；第2、3章由河海大学印凡成老师执笔；第4、5章由南京信息工程大学程国胜老师执笔；第7、8章由河海大学夏乐天老师执笔；第9、10章由南京林业大学蒋华松老师执笔，全书由夏乐天老师统稿. 东南大学韦博成教授审阅了本书的全部原稿，并提出了许多具体的宝贵意见，编者谨在此表示衷心的感谢. 值得说明的是，本书的出版得到了机械工业出版社江苏省非数学类专业研究生数学系列教材编审委员会、机械工业出版社高等教育分社的大力支持，编者也在此表示深切的感谢.

最后，希望广大读者和有关专家对本书提出宝贵的意见，指出其错误和缺点，以便我们进一步改进.

编　者

2007年10月于南京

目　录

第 1 章　随机事件与概率

概率论与数理统计是研究自然界中随机现象统计规律性的一门数学学科，在本书中，从第 1 章开始，我们将用五章的篇幅介绍概率论的基本内容.

1.1　样本空间与随机事件

1.1.1　随机试验与样本空间

自然界中的自然现象一般可以分为确定性现象和随机性现象两种类型. 确定性现象是指，在一定的前提条件下，做一件事情一定会得到某种确定的结果，例如，在海拔高度为 0 米的平面上，如果把水烧到 100 摄氏度，则水就会沸腾，再例如，从飞机上跳伞而下的空降兵一定能够下落到地面等等. 随机性现象是指做一件事情不一定能得到某种确定的结果，例如，在水平桌面上抛掷一枚正常的硬币，硬币落下时，硬币究竟是正面朝上，还是背面朝上是不确定的，再例如，明年的今天是个什么天气？现在也是不能确定的. 读者可以很容易举出这样的例子来，实际上，自然界中的随机性现象是非常多的.

概率统计就是研究自然界中随机现象统计规律性的一门数学学科. 与其他自然科学一样，为了对某种现象进行研究，就必须获取所研究对象的有关信息，在通常情况下，主要有两种获取信息的方法，一是对自然界中随机性现象进行被动的观察，另外一种是在一定条件下进行主动的科学试验，显而易见，由于科学试验受到自然条件的限制较少，它是获取大量研究信息的重要手段，为了对随机性现象进行研究，通常要求试验具备如下条件：

（1）试验可以在相同条件下重复进行；

（2）试验所有可能出现的结果，试验前是已知的；

（3）具体到某一次试验，会出现什么样的结果，试验前是未知的.

我们将具有上述三个条件的试验称为**随机试验**. 在概率论中，就是通过研究随机试验来研究随机现象的.

注　在上述随机试验的定义中，条件（1）实际上是科学试验的要求，条件（2）表明随机试验所有可能会出现的结果至少是两个，否则如果只有一个结果的话，那么任何一次随机试验必出现该结果，这与条件（3）是矛盾的.

例 1.1.1　掷一枚硬币，观察正面以及反面出现的情况.

分析 掷硬币当然可以在相同条件下重复进行，从而具备上述条件（1），试验之前所有可能出现的结果也是已知的，即不是出正面就是出反面，因而具备条件（2），另外，具体到某一次试验，试验之前并不能确定该试验会出现什么样的结果，是正面还是反面，因此具备条件（3），所以掷硬币试验是一个随机试验.

随机试验的例子是很多的，例如：记录某电话交换台一分钟内接到的呼叫次数；某 ATM 交换机在单位时间内接到的信元的个数；在一批电子元件中任意抽取一只，测试它的寿命等都是随机试验. 本书中以后提到的试验均是指随机试验.

概率论是通过研究随机试验来研究随机现象统计规律性的一门学科，为此，我们必须对随机试验能出现什么样的结果有一个清楚的认识. 在概率论中，我们把在一次试验中所可能出现的最简单的结果称为**样本点**，记为 ω，所有样本点构成的集合称为**样本空间**，记为 Ω.

例 1.1.2 在水平桌面上抛一颗质量均匀的骰子，观察其出现的点数.

分析 我们知道，骰子是一个立方体，共有六个面，分别标有数字：1、2、3、4、5 和 6，很显然，1 是在一次抛骰子的试验中，所出现的最简单的结果之一，所以是样本点，记为 $\omega_1=1$，同样，$\omega_2=2$，…，$\omega_6=6$ 都是样本点，从而在抛骰子的试验中，样本空间为 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}=\{1, 2, \cdots, 6\}$.

注 值得注意的是样本空间是随着随机试验的不同而不同的，即使是同一个随机试验，随着考虑问题出发点的不同也可以构造出不同的样本空间. 一般地，样本空间可能只含有有限个样本点，也可能含有无穷多个样本点.

1.1.2 随机事件及其相互间的关系

我们已经知道，随机试验所有可能会出现的结果可以用样本空间 Ω 来表示，在通常情况下，人们往往更关心某类结果在一次试验中是否会出现，例如，在例 1.1.1 中，人们可能关心抛落的硬币出现正面这个结果在一次试验中是否发生. 由于在一次试验中，试验的结果只能是样本空间中的某个样本点，因此，人们所关心的某类结果在一次试验中有可能发生，也有可能不会发生. 在概率论中，人们把在一次试验中可能出现，也可能不出现的一类结果称为**随机事件**，简称为**事件**.

很明显，一个事件构成了样本空间的一个子集，人们通常用大写的英文字母来表示事件，例如事件 A，事件 B 以及事件 C 等. 在例 1.1.1 中，$A=\{$正面$\}$ 就是一个事件，在例 1.1.2 中，如果人们关心的是掷得点数是偶数，则 $A=\{2, 4, 6\}$ 就构成了一个事件，另外，$B=\{1, 2, \cdots, 6\}$ 是一个事件，若把空集记为$\varnothing$，则 $C=\varnothing$ 也是一个事件，等等. 容易发现，对于同一个样本空间，人们可以构造出很多个事件.

我们知道，在一次随机试验中，只能出现一个样本点，当该样本点属于某个事件时，就称这个事件在这次试验中**发生**了，例如，在例 1.1.2 中，如果某次试验中出现了点 $\omega=3$，则称 $A=\{3\}$ 这个事件发生了，同样的，事件 $B=\{1, 2, 3\}$ 在这次试验中也发生了，另外，由于事件$\varnothing$不包含任何样本点，因此在任一次试验中都不会发生，所以$\varnothing$称为**不可能事件**，Ω 作为它自身的子集，在每一次试验中都发生，从而称为**必然事件**.

同一个样本空间可以有不同的事件，不同样本空间的事件之间也会不同，但是，当我们谈到几个事件的关系时，都是指同一个样本空间上的事件. 下面我们考虑同一个样本空间的事件之间的关系，实际上，这些关系包括:

(1) **包含**　若事件 A 发生，则事件 B 也发生，则称“事件 B 包含事件 A”，或者“事件 A 包含于事件 B”，记作 $B\supseteq A$，或 $A\subseteq B$.

(2) **等价**　若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，即事件 A 与事件 B 同时发生，或者同时不发生，则称事件 A 与事件 B 等价，记作 $A=B$.

(3) **互斥**　若事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 互斥，记作 $AB=\varnothing$.

(4) **对立**　若事件 A 与事件 B 互斥，且在一次试验中，必有一个发生，则称事件 A 与事件 B 对立，记作 $A=\overline{B}$，或 $B=\overline{A}$，也称事件 A 为事件 B 的**余事件**，或称事件 B 为事件 A 的**余事件**.

注　任意两个事件不一定具有上述关系中的一种.

例 1.1.3　假设一个黑箱中有 1 只红球，9 只白球，现从黑箱中进行有放回的取球，并记录下第 1 次取到红球时取球的次数.

分析　在此例中，样本空间为 $\Omega=\{1, 2, 3, \cdots\}$，设

事件 A 表示至多 5 次就取到红球，则 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$；

事件 B 表示不超过 10 次就可以取到红球，则 $B=\{1, 2, 3, \cdots, 9, 10\}$；

事件 C 表示 10 次之前取不到红球，则 $C=\{11, 12, \cdots\}$；

事件 D 表示最多 10 次就可以取到红球，则 $D=\{1, 2, 3, \cdots, 9, 10\}$.

对于这些事件，下面的关系显然成立：A 与 B 是包含关系，即 $A\subseteq B$；B 与 D 是等价关系，即 $B=D$；A 与 C 是互斥关系；B 与 C 是对立关系.

由于每个事件都是由样本空间中的全部或部分样本点构成的一个子集，因此不同子集之间经过一定的运算可以产生新的子集，这就对应于下面所介绍的事件的运算. 设 A，B 是两个事件.

(1) 由事件 A 与 B 同时包含的样本点构成的事件称为事件 A 与事件 B 的**交**，记作 $A\cap B$ 或 AB；

(2) 由事件 A 与 B 至少有一个构成的事件称为事件 A 与事件 B 的**并**，记作 $A\cup B$；

(3) 由事件 A 发生，但事件 B 不发生构成的事件称为事件 A 与事件 B 的**差**，记作 $A\setminus B$.

在事件差的运算中，有一种特别情况，即差事件 $\Omega\setminus A$，这个事件实际上是事件 A 的对立事件，也称为事件 A 的**逆事件**，记为 $\overline{A}$，一般地，称由事件 A 得到事件 $\overline{A}$ 的运算为**取逆运算**.

注 事件的交运算和并运算可以推广到任意有限个或可列个事件的情形，在一个有交、并和差运算的表达式中，总是理解为先进行交运算，然后依次从左至右进行并和差的运算.

事件运算的重要性在于，我们可以由一些已知的事件经过事件的运算去构造另一些未知的事件. 请看下面的例子.

例 1.1.4 设有电路如图 1.1 所示，设 A_i 表示第 i 个继电器闭合的事件，$i=1, 2, 3, 4$，试用 $\{A_i,\ i=1, 2, 3, 4\}$ 表示 L 至 R 为通路的事件 A.

分析 要使从 L 至 R 为通路，则必须有 L 至 M 是通路且 M 至 R 是通路. 设 L 至 M 和 M 至 R 是通路的事件分别记为 LM 和 MR，从而 $A=LM\cap MR$，显然，$LM=A_1$，另外，若 M 至 R 是通路，则必须或者第 2 个继电器闭合，或者第 3 个和第 4 个继电器同时闭合，即 $MR=A_2\cup(A_3\cap A_4)$，从而 L 至 R 为通路的事件可表为 $A=LM\cap MR=A_1\cap(A_2\cup(A_3\cap A_4))$.

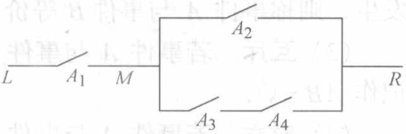

图 1.1

与集合的运算类似，事件的运算具有下面这些性质：设 A，B，C 是三个事件，则

交换律 $A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$；

分配律 $(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$；

德莫根律（De Morgan）**（对偶公式）** $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

注 事件的分配律和对偶公式都可以推广到任意有限个或可列个事件的情形.

例 1.1.5 试证明德莫根律的第 1 个公式 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$.

证明 一方面，对于任意 $\omega\in\overline{A\cup B}$，则有 $\omega\notin A\cup B$，从而 $\omega\notin A$ 且 $\omega\notin B$，因此 $\omega\in\overline{A}$ 且 $\omega\in\overline{B}$，所以 $\omega\in\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A}\,\overline{B}$. 由此可知 $\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\,\overline{B}$.

另一方面，设 $\omega\in\overline{A}\,\overline{B}$，因此 $\omega\in\overline{A}$ 且 $\omega\in\overline{B}$，从而 $\omega\notin A$ 且 $\omega\notin B$，所以 $\omega\notin A\cup B$，因而 $\omega\in\overline{A\cup B}$. 这表明 $\overline{A}\,\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$.

结合上面两个方面可知德莫根律的第 1 个公式成立.

1.2　频率与概率

1.2.1　频率

一个随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，具有不确定性．这种不确定性似乎表明随机现象是无法进行研究的，但实际情况并非如此．人们在实际生活中发现，一个随机事件在大量重复的随机试验中却呈现出明显的规律性，这就是所谓的**频率稳定性**．

设 A 是一个随机事件，若将随机试验重复进行 n 次，其中 A 发生了 n_A 次，则称

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

为在 n 次试验中事件 A 发生的**频率**．

人们对频率稳定性的认识来源于对生活中随机现象的观察，在抛硬币这样的简单随机试验中，硬币出现正面就是一个随机事件，这个事件在多次重复的试验中呈现出一定的规律性，为了验证抛硬币试验中出正面这个事件发生频率的稳定性，历史上有不少科学家做过抛硬币试验，如表 1.1 所示：

表　1.1

试　验　者	抛硬币次数 n	出现正面次数 n_A	出现正面的频率 $f_n(A)$
浦丰	4040	2048	0.5069
德·莫根	4092	2048	0.5005
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
罗曼诺夫斯基	80640	39699	0.4923

表 1.1 中的数据表明，对于抛硬币试验来说，不管是何人何时何地来做这样的试验，当试验的次数较大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 总在 0.5 附近来回摆动，并且随着试验次数的增加，这个值逐渐稳定于 0.5，这表明了频率具有稳定性，这个稳定的值是事件 A 本身所具有的属性，在这个试验中，它会依赖于硬币的结构、形状以及质量等因素，但这个值却是客观存在的．这个客观存在的事实反映了在一次抛硬币的试验中出现正面可能性的大小，一般的，在概率论中，度量事件出现可能性大小的数量指标称为事件的概率．

1.2.2 概率的统计意义

概率是概率论中最重要的基本概念之一．一个事件的概率反映的是这个事件在一次试验中出现的可能性大小，前一小节关于频率稳定性的讨论表明事件的概率是客观存在的，就像质量是一个物体本身所具有的属性一样，概率是随机事件本身所固有的属性．在上面抛硬币试验的例子中，如果硬币的结构对称、质量均匀，则频率的稳定值 0.5 就应该是在抛硬币的试验中，出正面这个事件的概率，它表明在一次抛硬币的试验中，出现正面的可能性是 0.5，说这个概率 0.5 是客观存在的，其意思是指：如果一枚质量均匀的硬币已经加工完毕，那么在抛这枚硬币的试验中，出现正面这个事件的概率也随之而定，我们不能人为的指定一个数作为在抛这枚硬币的试验中出现正面这个事件的概率．

一张课桌有它自己固有的长度，细细想来，要想获得课桌长度的真实值是非常困难的，实际上是不可能的．当然我们可以用一把尺子去量，但量出来的长度也只是一个近似值，因为量出的长度依赖于测量工具的精度，测量者的视觉误差等，即使我们使用高精度的测量工具进行多次测量，再把测量的结果求平均值，也还是一种近似，只不过近似的程度高一些罢了．尽管如此，测量的值应该是在真实值附近是一个不争的事实．概率和频率之间也具有类似的性质，概率是频率的稳定值，是事件出现可能性大小的真实值，而频率是概率的测量值，是事件出现可能性大小的近似值．概率论中的一些结论可以由频率得到很好的解释，而频率的性质也往往蕴含概率的性质．

1.2.3 概率的性质

在没有给出概率的严格定义前，我们可以由频率的性质来看概率的性质．

由频率的定义可知，在 n 试验中，任何事件 A 发生的次数 n_A 都应该是非负整数，从而事件 A 发生的频率应该满足：$f_n(A)\geqslant 0$；

必然事件在每次试验中都会发生，从而 $n_\Omega = n$，因此，必然事件发生的频率为：$f_n(\Omega)=1$；

若事件 A 和事件 B 互不相容，则显然有 $n_{A\cup B}=n_A+n_B$，所以事件 $A\cup B$ 发生的频率满足：$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$．

在概率论中，事件 A 的概率通常记作 $P(A)$．由于概率是频率的稳定值，由上面的叙述可知事件的概率也应具有下面的三条性质：

1. **非负性**：$P(A)\geqslant 0$；
2. **规范性**：$P(\Omega)=1$；
3. **可加性**：若事件 A 与 B 互不相容，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$．

1.3 古典概型与几何概型

在正式给出概率的公理化定义前，我们先来介绍两个具体的概率模型．在概率论的发展史上，它们是研究得比较早，而且内容也比较丰富的概率模型之一

1.3.1 古典概型的特征及其概率计算公式

古典概型是概率论学者们研究得最早的一种概率模型．它是在概率论的发展初期，在某些特殊情况下利用研究对象（如抛硬币，掷骰子等）在物理或几何性质方面所具有的均匀性、对称性去计算所观察的随机事件出现可能性大小的一种概率模型．具体地说：如果一个随机试验具有如下特征：

（1）样本空间 Ω 是有限的，如 $\Omega=\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$.

（2）每个由单个样本点构成的基本事件的发生（或出现）是等可能的，即具有相同的概率．

则称此随机试验为古典概型随机试验，简称为**古典概型**．

下面我们来讨论古典概型中事件概率的计算公式．

因为样本空间是有限的，即 $\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$．以及试验中每个基本事件的发生是等可能的，从而有：

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\}).$$

又由于基本事件是两两互斥的，于是：

$$\begin{aligned}1=P(\Omega)&=P(\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\cdots\cup\{\omega_n\})\\&=P(\{\omega_1\})+\cdots+P(\{\omega_n\})\\&=nP(\{\omega_k\})\end{aligned}$$

从而，每个基本事件的概率可以表示为

$$P(\{\omega_k\})=\frac{1}{n},\quad k=1,2,\cdots,n. \tag{1.3.1}$$

上述公式给出的是古典概型基本事件的概率公式，若事件 A 包含 k 个基本事件，即 $A=\{\omega_{i_1},\cdots,\omega_{i_k}\},(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$，则有

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P(\{\omega_{i_j}\})=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}}=\frac{|A|}{|\Omega|}. \tag{1.3.2}$$

例 1.3.1 将一颗质量均匀的骰子接连掷两次，求两次掷得的点数之和是 6 的概率．

解 将骰子接连掷两次视为一次试验，第一次掷得 i 点，第二次掷得 j 点的试验结果用 (i, j) 来表示，则该试验的样本空间可以表示为

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),\cdots,(2,6),\cdots,(6,1),\cdots,(6,6)\}.$$

显然 Ω 共有 36 个样本点．因为骰子是质量均匀的正方体，所以每个面朝上的可能性相同，从而每个基本事件的发生是等可能的，因此此例可归结为古典概型，设 A 表示“两次掷得的点数之和是6”的事件，则

$$A = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}.$$

根据式（1.3.2）我们有：　$P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{5}{36}$．

1.3.2　古典概型中的几类基本问题

由前一小节的内容知道在古典概型的有关事件的概率计算中，主要的任务是要构造合适的模型，并计算出该模型的样本空间以及所求事件所包含的基本事件的个数，而在此计算中将会涉及排列与组合的计数问题．

下面介绍几类具有一定代表意义的基本问题．

1. 取球问题

设一个盒子中有标号分别为 1，2，…，n 的 n 个球，从中按照下面的方式取出 r 个球（$r < n$）：

（1）取球是有放回的（即每次取球后记下球的标号后放回，再重新取球），并计取球的次序；

（2）取球是无放回的，但计取球的次序；

（3）取球无放回，不计取球的次序；

（4）取球是有放回的，不计取球的次序．

试计算在每种方式下，样本点的总数．

分析　（1）把从盒子中有放回的取出 r 个球作为一次试验，假设第 1 次取出的球的标号是 i_1，第 2 次取出的球的标号是 i_2，…，第 r 次取出的球的标号是 i_r，则试验的结果可以记为（i_1，i_2，…，i_r）．显然 i_1 可以取 {1，2，…，n} 中的任意一个，由于取球是有放回的，因此 i_2 也可以取 {1，2，…，n} 中的任意一个，同理，每个 i_k（$k=1$，2，…，r）都可以取 {1，2，…，n} 中的任意一个，从而样本空间可以表示为

$$\Omega = \{(i_1,i_2,\cdots,i_r):1 \leqslant i_k \leqslant n,1 \leqslant k \leqslant r\}$$

这就相当于从 {1，2，…，n} 中可重复的取出 r 个元素进行排列的全体，从而

$$|\Omega| = n^r$$

（2）把从盒子中无放回的取出 r 个球作为一次试验，则一次试验的结果可以表示为 $(i_1,i_2,\cdots,i_r)$，与（1）不同的是，虽然 i_1 可以取 {1，2，…，n} 中的任意一个，但是因为取球是无放回的，第 1 次取出的球就不会被再取到了，因此 i_2 只能在剩下的 $n-1$ 个球中取，从而保证 i_2 一定与 i_1 是不同的，不难想象，在试