大專用書

基本劇變之分類

紀　　曼 著
蕭欣忠 呂素齡 譯

國立編譯館出版

大專用書

基本劇變之分類

紀　　曼　著
蕭欣忠　呂肅齡　譯

國立編譯館出版

中華民國七十二年九月一日台初版

基本劇變之分類

定價：精裝新台幣玖拾伍元
　　　平裝新台幣陸拾伍元

譯　者：蕭欣忠
　　　　呂素齡

出版者：國立編譯館

印行者：國立編譯館

館　址：台北市舟山路二四七號

電　話：三二一六一七一

作者序言

這本小册子的目的在於對劇變論的分類定理給出一個最簡單却又完備的證明。所使用到的所有微分拓樸中的定理，除了那些最標準又基本的定理之外，我們一概加以證明。在第一章中所寫出的分類定理的形式是一種最適合於加以應用的形式，請參考〔12〕。

所謂基本劇變其實只不過是平滑映射 $R^r \to R^r$ 的某些奇異性。這些奇異性一般而言可以從下列兩種問題之考慮來獲取：(1)考慮一個流型上的 r 維的函數族之臨界點；或者(2)考慮一個流型上的 r 維的位差動力系統族之定點。可見這些基本劇變跟通常所講的常微分方程組之分歧點理論具有非常密切的關連。特別當 $r = 4$ 的情形應用更廣，因爲這時表示所考慮的函數族或動力系統族可以用時空的四個變數來做參數看待，因此正是最常遭遇的情況。

基本劇變概念之建立以及他們重要性之確認都應歸功於董禮內敎授〔10〕。早在 1963 年他就已察覺當 r 小於或等於 4 的時候，只需把某些多項式胚像 x^3，x^4，x^5，x^6，$x^3 \pm xy^2$，$x^2y + y^4$ 等等加以展露，他便能夠把所有的基本劇變分類成有限的幾類。董敎授大略從四方面獲取進行這種分類理論的靈感：(1)斐特尼敎授那篇有關 $r = 2$ 之時平滑映射之穩定奇異性的文章〔11〕；(2)董敎授自己把這些結果推廣到 r 大於 2 時之研究結果；(3)光線的聚焦現象與研究；(4)生物學中的形態生成現象。

可是儘管董教授這麼早就已預期了他的分類定理，但是要眞正證明這定理却得等待好幾年，因爲人們必須先發展出一些新的數學理論以便建立充分的工具來證明這分類定理。事實上到目前爲止劇變論的最主要成就正在於它刺激並推動了數學中這些新理論的發展，特別關於分歧點理論，奇異性理論，展露理論以及層疊架構理論等部門之建立與發展。簡單說來分類定理之證明的核心建基於董教授所首創的展露概念，而有關這展露概念最具關鍵性的定理指出任何兩個横截展露必定同構。爲了證明這結果董教授必須先證明一個對於平滑函數也可適用的魏氏準備定理（Weierstrass preparation theorem）。他勸使馬格蘭治幫他處理這些問題，而後者於 1965 年正式證明這一準備定理〔3〕。後來有幾個數學家，特別像梅葸教授等人，分別提出有關這類準備定理的較簡易認明或處理方法，可參考〔4，5，7，8〕等篇文章。本書第五章裏所採用的證明則取材於〔1〕。

上段所提的準備定理其實可以看成一種把分析綜合成一個代數工具的方法。當我們擁有這個方便的代數工具，我們就能夠構造出合宜的幾何可微同胚轉換來證明兩個展露彼此之間的同構或等價。在1967年梅葸教授才首次把所有這些構造及處理細節全盤寫下來，因而完成了分類定理嚴密又完整的證明。這些證明的主體被包含於他所寫的〔4〕，〔5〕兩篇文章之中，只是在那兒他所考慮的是些更一般情況之下的奇異性，因此我們在本書中所需用的特別定理便被掩藏在更一般情況的處理當中而顯得隱晦不明。但是幸好在 1967 年梅教授另外在華立克大學給出一份未曾正式發表的手稿〔6〕，在其中他處理那些特別能給出基本劇變的函數胚之分類定理，而給出一套非常淸楚易讀的最簡化的證明。他證明的基本構想如下：首先把函數加以局部化而考慮其可微胚，接著藉助於可定數（Determinancy）把對於胚的

考慮轉變成對於k-截（k-jet）的考慮，因此就把一個涉及無窮維的分析問題轉變成一個有限維數的代數幾何問題。這份講義流傳得相當廣，但是很可惜的是這份講義認眞說來始終讓人覺得是一份未完成的作品，必需補入另外幾方面的討論才更理想。我們書寫這本小册子的動機正爲完成這一補足的工作，因此在本書開頭的第2，3，4與6章我們處理的手法大抵都根據梅教授這份講義來寫。

梅教授的講義只限於處理函數胚之分類的局部問題。爲了把這些分類的理論寫成一個方便於應用的形式，我們覺得至少應該繼續進行下列三個步驟的討論。第一，我們必須把所得到的這些胚重新大域化（globalize）而成函數，以便得出一個函數空間中的稠密開集$\mathcal{F}_*$。這個稠密開集中的函數才是適合於拿來講基本劇變的函數。爲了進行這種大域化的工作，我們要用到董教授的横截性引理。因此在第八章裏面我們採用〔2〕中的講法來討論這個重要的引理。

第二個步驟是討論如何把梅教授所分類出來的那些函數胚跟實際應用中所處理的基本劇變連貫在一起。例如我們必須講明對於基本劇變中的橢圓臍點我們如何先從一個

$$R^2 \to R$$

的不穩定胚加以展露而成爲一個

$$R^2 \times R^3 \to R \times R^3$$

的穩定胚，而這個穩定胚又如何等價於另一個胚：

$$f : R^2 \times R^3 \to R$$

最後再如何從 f 導引出一個基本劇變胚：

$$\chi_f : R^3 \to R^3$$

第七章便是留出來處理這一方面的細節問題。

最後第三個步驟便是考慮基本劇變穩定性的問題。我們在第九章

裏面處理當 f 受擾動時，其相應的 χ_f 之穩定性問題。在這一章中我們特別強調一個差別，就是儘管基本劇變是些奇異性，而且具有穩定性，但是這兒所謂的穩定性事實上跟通常考慮穩定奇異性理論時所講的穩定性有些不同（參看〔1〕，〔2〕，〔4〕，〔5〕，〔11〕）。一個展露開來的胚確實代表一種穩定的奇異性，但是一個從某個胚所導引出來的劇變胚並不見得就是穩定的奇異性。更清楚來講，設M代表所有

$$R^r \to R^r$$

的平滑映射，而C代表M中可看成劇變映射的子空間。顯然 $C \neq M$，因爲不見得所有的映射都可看成由某一函數所引出的劇變映射。因此可能M中會包含某些穩定奇異性，例如 Σ_2，但是這種穩定奇異性不在C中。因此這類的穩定奇異性就不可能構成基本劇變。反過來可能C中會包含某個基本劇變，例如臍點，而且這個基本劇變在C中具有穩定性，因此是個穩定的基本劇變。但是如果我們容許擾動的範圍不僅在C中，而且可以在M中，那麼這個基本劇變就變成不穩定，而非通常的穩定奇異性。

當 $r = 2$ 時湊巧兩種穩定性的觀念彼此相一致。因爲斐特尼在〔11〕中證明了當 $r = 2$ 之時單單只存在兩類的穩定奇異性，即褶點與尖點，而我們熟知這兩種穩定奇異性都是基本劇變。可是從 r 大於或等於 3 起，這兩種穩定性的觀念就有了明顯的差異。例如當 $r = 4$ 時M中只有 6 種穩定的奇異性，但是却有 7 種基本劇變，情形如下：

穩定奇異性方面有兩個 Σ_2，以及 4 個尖族劇變，

基本劇變方面則有上面 4 個尖族劇變，再加上另外 3 個臍點劇變，合起來一共有 7 種基本劇變。

最後我們感謝Mario de Oliveira，Peter Stefan，Sandra Smith以及Sarah Rosenberg等人的幫忙，使本書能夠寫得更好，也能順利的出版。

作者：紀曼

譯者序言

我們計劃編譯一套有關劇變論的叢書，以便使用自己的語言把這一個被譽為當代數學中最重要，也最具發展潛力的傑出數學理論與應用介紹出來，並使之在中國科學界廣為流傳。

我們已經推出孫道詩（ P.T. Saunders ）的「劇變論入門」做為起步，現在最要緊必須緊接著推出的第二本書應該是要能設法把這本「劇變論入門」所缺少的有關董禮內（ R. Thom ）的分類定理之完整數學論證，以一個最簡單扼要的方法介紹出來。最能適合這目的的就是現在這本紀曼（ E.C. Zeeman）所給的精彩講義。大概只要學過微積分以及接受過最基本的大學數學訓練的人就能充分理解其大部分內容。由於這本書很短，因此讀者不妨從頭到尾反覆讀幾次，以確定能夠對這一套基本劇變論的最簡要論證方法融會貫通。

我們另外也已經譯好布樂客（ Th.Bröcker ）的「可微胚及劇變」，布拉特（ C.P.Bruter)的「拓樸與知覺第一册，劇變論的哲學與數學基礎」，以及薄士邨與史都華（ T.Poston & I.Stewart ）的「劇變論及其應用」。還有正在進行翻譯或者正在籌劃翻譯的尚有：布拉特的「拓樸與知覺第二册，劇變論的神經生理學行為反應科學以及語言學基礎」，以及紀夢樓（ R.Gilmore）的「為一般科學家及工程學家所寫的劇變論」，薄士邨、史都華與伍考克合寫的「高維劇變之幾何結構」等書。

我們接下去還有一些計劃，將要按照以後實際的需要以及我們可以調配的人力來發展。

目前這本小書是純粹在建立數學理論的。爲了以後應用劇變論時能夠知其然也充分的知其所以然，本書是一本必讀的小册子，也是一條必經之路。如果能找到一位受過正規數學訓練的人同您一起讀這本書，那麼這本書就不可能打消您繼續探討劇變論的熱忱。相反的，您會因爲讀這本書而享受到一段充滿興奮與啓發的時光。

最後感謝國立編譯館對我們編譯計劃的充分贊助，也感謝各審查先生細心的審核與指正。

譯者：蕭 欣 忠　呂 素 齡等

淡江大學，數學研究所

目 錄

第一章　董禮內分類定理

考慮一個平滑函數：

$f: R^n \times R^r \to R$。

若 $x_1, \cdots, x_n$ 代表 R^n 中之坐標，而 $y_1, \cdots, y_r$ 爲 R^r 之坐標，對於 R^r 中之任意點 y，我們都可以考慮 R^n 上的位差動力系統：

$$\mathrm{grad}_x f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots\cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

令 R^{n+r} 中的子集 M_f 代表所有 R^{n+r} 中之點能滿足 $\mathrm{grad}_x f = 0$ 者。一般而言，既然 M_f 是由 n 條方程式所定義，則 M_f 應該構成一個 r 維的流型。這時 n 稱爲此流型 M_f 的餘維數。我們可以把從 R^{n+r} 到 R^r 的自然投射局限到 M_f 來，而考慮：

$\chi_f: M_f \to R^r$

這個 χ_f 就叫做原來函數 f 的劇變映射。若以 $\mathfrak{F}$ 來代表所有 R^{n+r} 上的平滑函數全體，而在 $\mathfrak{F}$ 中採用斐特尼平滑拓樸結構，則我們可以把董禮內教授的分類定理寫成如下的形式：

定理：令 r 不大於 5，則 $\mathfrak{F}$ 中可以找出一個稠密的開子集 $\mathfrak{F}_*$，使得對於任意 $\mathfrak{F}_*$ 中的函數 f 而言，下列三件事情同時能夠成立：

(1)　M_f 是個 r 維的流型。

(2)　χ_f 的任何一個奇異性必定與有限個稱爲基本劇變的奇異性當中的

某一個等價。

(3)　對於 f 微小的擾動，χ_f 在 M_f 上的每一點都具有局部的穩定性。

至於第(2)項中所提基本劇變的個數只跟 r 的大小有關。當 r 為 1 時，基本劇變只有一個，當 r 為 2 時，基本劇變有兩個，當 r 為 3 時，不同的基本劇變數目升為 5，當 r 為 4 時有 7 個，當 r 為 5 時變成為 11 個。如果 r 超過 5，則不同的基本劇變可以有無窮多個。

在上面定理中所謂等價的定義是這樣的：兩個可微映射

$\chi : M \to N$　與　$\chi' : M' \to N'$

等價當且唯當存在可微同胚映射 h 與 k，使得下圖可交換：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\chi} & N \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ M' & \xrightarrow{\chi'} & N' \end{array}$$

現在假設所考慮的 χ 與 χ' 分別在 x 與 x′點具有奇異性，而在上面定義中，$h(x)=x'$，而且 h 與 k 分別為局部可微同胚，又上圖可交換只作局部的意義來解釋，則稱這兩個奇異性彼此等價。

注意在本書中我們都會要求 r 不大於 5，這主要的原因在於當 r 大於 5 之時，會使得分類定理中所考慮的等價類中某一個等價類具有一個連續的參數 t，換言之，對於每一個 t 值我們就有一個等價類，但是 t 值有無窮多個，因此可以有無窮多個不同的等價類。這使得應用起來在感覺上不能像只有單單有限個等價類時那麼方便。事實上如果我們在定等價關係時不要求使用可微同胚 h 與 k，而容許只需存在同胚映射（ homeomorphism ）h 跟 k 便可以，那麼我們就稱呼這樣

的等價關係爲拓樸等價。在這種較寬的拓樸等價之下，當 r 大於 5 之時，我們仍還能得出不同的拓樸等價類只有有限個。但是在眞正實際的應用上，仍以低餘維數，特別像 r 等於 4 之時我們在定理中所敍述的分類最爲重要。另外也注意如果我們把定理中的 R^{n+r} 改換成爲一個任意 r 維流型 N 上而以任意 n 維流型 P 爲纖維的纖維簇（ fibre bundle ），則我們的分類定理仍然繼續能夠成立。

這兒一直在提到分類定理，意思是說：我們把通常一般的 χ_f 所能夠具有的奇異性的各種形態加以分類。我們將證明倘若 χ_f 在 $R^{n+r}\cap M_f$ 中的某一點（ x ， y ）具有奇異性，而且假設 η 代表 f 限制於 $R^n\times\{y\}$ 之時在（ x ， y ）那點的胚，則 χ_f 在（ x ， y ）的奇異性所屬的等價類只跟 η 這個胚的右等價類有關（參考定理 7.8）。這個定理證明起來相當困難，必須使用到馬格蘭治的準備定理。而爲了證明馬格蘭治準備定理我們還得先行證明一些除法定理，請參看第五章。當然了，除了馬格蘭治準備定理之外，定理 7.8 還需使用到有關 η 之展露的一些性質與結果。關於這方面所需要的資料我們就寫在第六章之中。

定理 7.8 告訴我們要想對 χ_f 之奇異性加以分類就得先對可微胚：

$$\eta:(R^n,0)\to(R,0)$$

加以分類。爲了進行這一分類工作，我們引用了可定數與餘維數這兩個相關的整數不變量，我們也使用了 η 所決定的賈氏理（ Jacobian ideal ）$\Delta(\eta)$。這些重要而相關的觀念分別介紹於第二與第三章之中。而其中的定理 2.9 更表達了 η 的可定數 k 與 η 的賈氏理 $\Delta(\eta)$ 之間的關係。假設 η 爲 k 可定，那麼 $\Delta(\eta)$ 必定滿足某一個像 $m^{k+1}\subset m\Delta$ 的條件。反之假若 η 滿足 $m^{k+1}\subset m^2\Delta$ 的條件，則必定 η 爲 k 可定。其中 m 代表由多項式胚 $x_1,\cdots,x_n$ 所生成的極大理，其仔細定

義請直接參考第二章。運用此定理我們容易證明引理 3.1，指出一個胚 η 的可定數 det η 與他的餘維數 cod η 之間的關係非常簡單，我們恆有 det $\eta \leqslant$ cod $\eta + 2$ 的關係。另一方面如果假設 $r \leqslant 5$，則對於任意 $f \in \mathfrak{F}_*$ 以及 R^r 中之任意點 y，令 η 代表 $f|_{R^n xy}$ 之胚，則自然有 cod $\eta \leqslant r \leqslant 5$。因此我們變成只需考慮那種 η，他的 det $\eta \leqslant 5 + 2 = 7$ 的就可以了。而按照第二章的講法，一個 7 一可定的胚其實就是一個 7 一截，就是在泰勒展式中把所有高於 7 的項都加以省略。因此我們變成在一個有限維的 7 一截空間 J^7 之中考慮分類的問題。前面曾已稍微提及爲什麼我們要把 r 限制爲不大於 5，主要的原因是如果容許 $r > 5$，則存在一些具有某個連續變數 t 的等價類。對於每個 t 值就有一個等價類，其中包含某個 $f \in \mathfrak{F}_*$ 在某點 $y \in R^r$ 之限制 $f|R^n xy$ 之胚。由於 t 有無窮多個，表示這時有無窮多個不同的等價類，因此沒辦法把這些胚分類成有限個等價類。

在第三章與第八章中我們證明所有餘維數大於或等於 6 的 7 一截在 J^7 中構成一個封閉的代數多樣體（algebraic variety）Σ。我們可以把（$J^7 - \Sigma$）按著餘維數的大小而加以分隔成一個正則層疊架構（regular stratification）。事實上我們採用了一個通常所謂 a 一正則性（a-regularity）（參考定義 8.2）所能引出的條件來證明 $\mathfrak{F}_*$ 爲 $\mathfrak{F}$ 中的開子集。至於 $\mathfrak{F}_*$ 在 $\mathfrak{F}$ 中的稠密性則必需藉助於董教授的橫截性引理才能加以證明。此外在第八章中我們也說明了如何從橫截性來得出對於 $\mathfrak{F}_*$ 中的任意元素 f，都會使得 M_f 是個 r 維的流型。

在第四章我們完成了對於所有餘維數小於或等於 5 之胚的分類工作。在第七章我們特別指明這些分類結果如何跟劇變胚之分類牽扯上關係。最後在第九章，我們證明了劇變映射 χ_f 滿足局部的穩定性。

第二章　可定數

<u>定義</u>：設M與Q為可微流型，我們以$C^{\infty}(M, Q)$表示所有從M到Q的平滑映射全體。設$x \in M$，而$f, g \in C^{\infty}(M, Q)$，如果存在x點的鄰域N使得$f|_N = g|_N$，則稱$f \sim g$。顯然這是個等價關係，我們把一個等價類〔f〕稱為映射f在點x之胚。

設$\mathcal{E}_n$代表所有$C^{\infty}(R^n, R)$中的函數在原點$0 \in R^n$之胚所構成的集合，則$\mathcal{E}_n$是一個具有無窮維數的實向量空間。另方面$\mathcal{E}_n$也具有環的結構，其中還有單位元素1，就是常數函數1在原點0之胚。當然這兒所使用的加法，乘法或係數乘法等結構都是通常可以藉著R中的運算逐點所引出者。

<u>定義</u>：一個可交換環若具有單位元素而且只有唯一的一個極大瑄(maximal ideal)，則稱為一個局部環(local ring)。

設m_n為$\mathcal{E}_n$之子集，由所有滿足$f(0)=0$之平滑函數f在原點之胚所構成。我們將證明m_n是$\mathcal{E}_n$中的極大瑄，而且是唯一的極大瑄，因此$\mathcal{E}_n$是個局部環。以後為方便計我們把m_n中之元素寫成$\eta : (R^n, 0) \to (R, 0)$。若$\eta = [f]$，則$f : (R^n, 0) \to (R, 0)$，或即$f(0) = 0$。

<u>引理2.1</u>：M_n是$\mathcal{E}_n$中的極大瑄。

<u>證明</u>：任取$\eta \in \mathcal{E}_n - m_n$，我們將證明由$m_n$跟$\eta$所生成的理$(m_n, \eta)_{\mathcal{E}_n}$會等於整個$\mathcal{E}_n$全體。

任取$e \in \eta$，此即η為函數e在原點0的胚，則由於$e(0) \neq 0$，我們可以選取一個足夠小的0的鄰域U，使得在整個U上e的值總不為零。可見$\frac{1}{e}$是個U上的平滑函數。令$\xi = [\frac{1}{e}]$，則立即有$\xi\eta = [\frac{1}{e}] \cdot [e] = [\frac{1}{e} \cdot e] = [1] = 1$。但是另方面$\xi\eta$應該落在理$(m_n, \eta)_{\mathcal{E}_n}$之中，可見這個理包含了單位元素，因此當然要等於$\mathcal{E}_n$整體。

<u>引理2.2</u>：m_n為$\mathcal{E}_n$中唯一的極大理。

<u>證明</u>：任給$\mathcal{E}_n$中的一個不等於$\mathcal{E}_n$本身的理I，我們要證明這個I必定落在m_n之中。假設不然，則存在元素$\eta \in I - m_n$，仿照上引理的證法，$\mathcal{E}_n$中有η的逆元素$\frac{1}{\eta}$存在。因此$1 = \frac{1}{\eta} \cdot \eta \in I$，而使得$I = \mathcal{E}_n$。這結論與原先假設矛盾。

按照上面兩個引理可見$\mathcal{E}_n$是個局部環。

考慮R^n上使原點0保持不動的所有可微同胚映射在原點之胚所組成的集合，而以G_n記之。則G_n中之胚可以寫成：

$$\eta : (R^n, 0) \to (R^n, 0)$$

我們可以很自然地藉著可微同胚映射之組合運算來定義G_n中的乘法。設$\eta = [f]$, $\xi = [g]$，則定義：

$$\xi \cdot \eta = [g] \cdot [f] = [g \circ f]$$