

SHUILI GONGCHENGSHI SHIYONG JISUAN SHOUC

水利工程师 实用计算手册

王 森 徐庆河 主编



黄河水利出版社

主要内容

水利工程师实用计算手册

主 编 王 森 徐庆河

副主编 慕西安 孙宏鑫

黄河水利出版社

黄河水利出版社

内 容 提 要

水利水电工程的设计和施工计算是水利工程师工作的主要内容。本书包括各种基本计算,几何图形计算,土方工程计算,测量、爆破工程计算,各种梁内力、弯矩、荷载、剪力的计算,水文、大坝、水力及水力学计算,脚手架及模板工程计算,混凝土、钢筋混凝土计算,地基、基坑、桩基工程计算,钢木结构、挡土墙工程计算,桥梁工程计算,涵洞和隧洞工程计算等主要内容,以便广大水利水电技术人员在设计及施工的计算中方便简捷使用,也可供从事水利水电工作的有关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

水利工程师实用计算手册/王森,徐庆河主编. —郑州:
黄河水利出版社,2008.8

ISBN 978-7-80734-477-3

I. 水… II. ①王…②徐… III. 水利计算—手册
IV. TV214-62

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 122188 号

出 版 社:黄河水利出版社

地址:河南省郑州市金水路 11 号 邮政编码:450003

发行单位:黄河水利出版社

发行部电话:0371-66026940、66020550、66028024、66022620(传真)

E-mail:hhsclbs@126.com

承印单位:河南第二新华印刷厂

开本:787 mm×1 092 mm 1/16

印张:40.25

字数:980 千字

版次:2008 年 8 月第 1 版

印数:1—1 000 册

印次:2008 年 8 月第 1 次印刷

定价:88.00 元

编辑委员会

主 编:王 森 徐庆河

副主编:慕西安 孙宏鑫

编 委:(以姓氏笔画为序)

历从实 叶茂林 朱格河

华耀沛 李耀华 张 伟

胡建生 赵祥成 贾书杰

黄志伟 阎文涛

前 言

在水利水电工程中的施工与设计中,为确保工程质量和施工安全,合理选择设计和施工方案,常需要在工作中进行必要的计算,这种设计阶段和施工阶段的计算主要包括 18 个方面:各种基本计算,几何图形计算,土方工程计算,测量计算,爆破工程类的计算公式,各种梁内力、弯矩、荷载、剪力计算,水文系列计算,大坝系列计算,各种水力学计算,水力学的计算,脚手架及模板工程计算,钢筋及混凝土计算,地基、基坑、桩基工程计算,圬工砌体工程计算,钢木结构工程计算,挡土墙工程计算,桥梁计算,涵洞和隧道工程计算。

随着国家经济的发展,我国水利水电建设取得了前所未有的成绩,随着技术的进步,新技术、新工艺层出不穷,极大地提高了工程建设整体水平。对于从事水利水电工程设计及施工的技术人员,经常要遇到工程当中的各种计算问题,这些问题的计算公式一般分散在各种规范及技术书籍中,不便于查阅和使用,为了给广大工程技术人员提供一份简明、方便、实用、翔实的计算参考资料,以推动科技进步的功效和减少工作量,我们特编写了本手册。

本书由龙振球教授级高工审定。收录的内容多数都是各类规范和有关的技术书籍中的内容,因此有明显的时代痕迹。由于编者学识浅薄,水平有限,虽经两年多的努力,但手册中仍存在值得商讨和不足之处,故请读者给予批评指正。

本手册可以作为水利水电设计和施工单位技术人员的一部参考书。

编 者

2008 年 5 月

目 录

前 言

第 1 章 各种基本计算	(1)
1.1 数学公式	(1)
1.2 三角公式	(3)
1.3 求积法	(7)
1.4 解析几何	(10)
1.5 微分	(10)
1.6 积分	(12)
第 2 章 几何图形计算	(19)
2.1 平面图形计算	(19)
2.2 立体图形计算	(22)
2.3 截面力学特性计算	(25)
第 3 章 土方工程计算	(46)
3.1 土的基本物理性质指标计算与换算	(46)
3.2 场地平整高度计算	(48)
3.3 土的变形模量计算	(49)
3.4 排水坡度对设计标高的影响	(50)
3.5 场地平整土方量计算	(50)
3.6 无黏性土坡稳定性分析计算	(53)
3.7 黏性土坡稳定分析计算	(54)
3.8 挖方允许边坡的计算	(54)
3.9 土方直立壁开挖高度计算	(54)
3.10 填土最大干密度计算	(55)
第 4 章 测量计算	(56)
4.1 水准测量	(56)
4.2 路线施工测量平面计算	(61)
第 5 章 爆破工程计算	(90)
5.1 药包用量计算	(90)
5.2 抛掷率与爆破作用指数	(90)
5.3 药包间距计算	(91)
5.4 深孔爆破计算	(91)
5.5 药壶爆破计算	(91)
5.6 猫洞爆破计算	(92)

5.7	光面爆破和预裂爆破计算	(92)
5.8	定向爆破计算	(92)
5.9	爆破地震效应及强度计算	(93)
5.10	微差爆破计算	(93)
5.11	控制爆破计算	(93)
5.12	炮眼计算	(94)
5.13	常用电爆网络联结计算	(95)
5.14	冻土爆破计算	(96)
5.15	爆破振速与爆破坍塌振速对建筑物的计算	(96)
5.16	爆破安全距离计算	(97)
第6章	各种梁内力、弯矩、荷载、剪力计算	(98)
6.1	单跨梁内力计算	(98)
6.2	连续梁内力计算	(109)
6.3	单跨一阶变截面构架内力计算	(111)
6.4	等截面刚架内力计算	(124)
第7章	水文系列计算	(149)
7.1	大坝建设的水文水利计算	(149)
7.2	水文测验学计算	(155)
7.3	泥沙测验计算	(184)
7.4	水位、流量资料整编类计算	(197)
7.5	堰闸、电站流量的推算方法	(204)
7.6	水文地质类计算	(219)
7.7	水利工程实用水文水利计算	(236)
7.8	施工管理运用阶段的水文水利计算	(269)
第8章	大坝系列计算	(271)
8.1	坝基岩体稳定的相关计算	(271)
8.2	砂土地基的液化计算	(276)
8.3	边坡稳定的相关计算	(277)
8.4	大坝坝体类施工设计的计算	(279)
8.5	大坝抗震类的计算	(292)
8.6	高坝通航建筑物的各类计算	(293)
8.7	土坝的设计	(299)
8.8	溢洪道设计	(316)
8.9	非溢流的堆石坝、干砌石坝及土石混合坝类的计算	(324)
8.10	溢流堆石坝的结构计算	(324)
第9章	各种水力学计算	(328)
9.1	渠道水力计算	(328)
9.2	沟渠水力计算	(331)

9.3	渠道允许流速的确定	(333)
9.4	一般梯形渠道横断面的水力计算	(334)
9.5	沟道水力计算	(336)
9.6	水流作用于水工建筑物上的力和动量定律	(337)
9.7	水闸水力计算	(348)
9.8	启闭计算	(358)
9.9	涵洞水力计算	(359)
9.10	桥孔水力计算	(371)
9.11	倒虹吸水力计算	(374)
9.12	渡槽水力计算	(379)
第 10 章	水力学的计算	(393)
10.1	跌水和陡坡的水力计算	(393)
10.2	泵站水力计算	(398)
10.3	水工涵洞的水力计算	(408)
10.4	有压输水管道中的水击	(415)
10.5	水工建筑物中的气蚀问题	(421)
10.6	高速水流的掺气计算	(421)
10.7	明渠急流冲击波的计算	(422)
10.8	紊流和边界层的基本知识及水流运动的三度分析法	(425)
第 11 章	脚手架及模板工程计算	(427)
11.1	脚手架工程计算	(427)
11.2	模板工程计算	(433)
第 12 章	钢筋及混凝土计算	(448)
12.1	钢筋工程计算	(448)
12.2	混凝土工程计算	(462)
第 13 章	地基、基坑、桩基工程计算	(474)
13.1	地基工程计算	(474)
13.2	桩基工程计算	(477)
13.3	基坑工程计算	(491)
第 14 章	圬工砌体工程计算	(497)
14.1	水泥砂浆、水泥混合砂浆配合比的确定	(497)
14.2	圬工砌体工程量计算	(498)
第 15 章	钢木结构工程计算	(509)
15.1	钢结构工程计算	(509)
15.2	木结构工程计算	(522)
第 16 章	挡土墙工程计算	(527)
16.1	简易挡土墙分析与计算	(527)
16.2	郎金理论主动土压力计算	(529)

16.3	库仑理论主动土压力计算	(530)
16.4	特殊条件下的土压力计算	(531)
16.5	黏性土的土压力计算	(532)
16.6	有压范围内的土压力计算	(533)
16.7	浸水挡土墙的土压力计算	(533)
16.8	地震作用下的土压力计算	(534)
16.9	重力式挡土墙的计算	(535)
16.10	各级荷载换算土柱高的计算	(537)
第17章 桥梁计算		(538)
17.1	钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计	(538)
17.2	拱桥施工计算	(576)
17.3	钢桥的施工安装计算	(587)
17.4	悬索桥施工计算	(604)
第18章 涵洞工程和隧道工程计算		(610)
18.1	涵洞工程的各类计算	(610)
18.2	隧道工程的各类计算	(618)

第 1 章 各种基本计算

1.1 数学公式

1.1.1 乘幂及根

$$(1) a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(2) a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$(3) (a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$$

$$(4) \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$$

$$(5) \sqrt[m]{1/a} = a^{-1/m}$$

$$(6) \sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

$$(7) a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$(8) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

1.1.2 恒等式因式分解

$$(1) a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$(2) a^2 + b^2 = (a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1})$$

$$(3) a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(4) a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(5) a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}) \quad (n = \text{偶数})$$

$$(6) a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}) \quad (n = \text{奇数})$$

$$(7) (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(8) (x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (bc + ca + ab)x + abc$$

$$(9) (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(10) (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(11) (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(12) (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$(13) a^4 + b^4 = (a^2 + ab\sqrt{2} + b^2)(a^2 - ab\sqrt{2} + b^2)$$

$$(14) a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(15) (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab$$

$$(16) (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2) + 6abc$$

$$(17) a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)$$

1.1.3 对数

(1) 设 a 为异于 1 之间有限正数, 且 $a^x = N$, 则 x 是以 a 为底的 N 之对数, 或 $\log_a N = x$, 设 $\log_a N = x$, 则 $a^x = N$

$$(2) \log_a a = 1$$

$$(3) \log_a 1 = 0$$

$$(4) \log_a 0 = -\infty$$

$$(5) \log_a (A \times B) = \log_a A + \log_a B$$

$$(6) \log_a (A \div B) = \log_a A - \log_a B$$

$$(7) \log_a A^n = n \log_a A$$

$$(8) \log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_a A$$

$$(9) \log_a b \times \log_b a = 1$$

(10) 普通对数以 10 为底, 自然对数以 $e(2.7183)$ 为底.

$$(11) \log_a N = \log_a N \times \ln e \quad (12) \lg e = 0.43429448$$

$$(13) \log_a N = \log_a N \times \lg 10 \quad (14) \ln 10 = 2.30258509$$

$$(15) \lg e \times \ln 10 = 1 \quad (16) \lg 10 = 1$$

$$(17) \lg 10^n = n$$

1.1.4 方程式

$$(1) \text{二次方程式 } ax^2 + bx + c = 0 \quad x = \frac{1}{2a}(1 - b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$$

$$(2) \text{三次方程式 } x^3 + 3px + 2g = 0 \text{ 之根 } x_1 = w + v, x_2 = w_1 v + w_2 v_1, \\ x_3 = w_2 v + w_1 v. \text{ 设 } w_1 = w_2^2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}), w_2 = w_1^2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$$

$$w = \sqrt[3]{-g + \sqrt{g^2 + p^3}}, v = \sqrt[3]{-g - \sqrt{g^2 + p^3}}$$

$$(3) \text{四次方程式 } az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$$

$$z = x - \frac{b}{4a} \text{ 可化为 } x^4 + px^2 + qx + r = \Delta$$

$$\text{其四次方程式之根分别为: } x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}), x_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}), \\ x_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}), x_4 = \frac{1}{2}(-\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3})$$

设 y 为三次方程式 $y^3 - 2py^2 - (p^2 - 4r)y - q^2 = 0$ 之方根, 以 $\sqrt{y}$ 表示:

$$\text{则 } \sqrt{y_1} \times \sqrt{y_2} \times \sqrt{y_3} = -q$$

1.1.5 级数之和

$$(1) \text{等差级数: } a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + a + (n - 1)d = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$(2) \text{等比级数: } a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a \frac{1 - r^n}{1 - r} = a \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$(3) 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

$$(4) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$$

$$(5) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$$

$$(6) 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{30}n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)$$

$$(7) 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n$$

$$(8) 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3}n(2n - 1)(2n + 1)$$

$$(9) 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$$

$$(10) 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$(11) 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) \\ = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$(12) 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

1.1.6 无限级数及函数之展式

$$(1) (1 \pm x) = (1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \times 2}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}x^3 + \cdots \text{ 设 } n \text{ 为任意值, } |x| < 1.$$

$$(2) \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + \cdots$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{7}{256}x^5 + \frac{231}{1024}x^6 + \cdots$$

$$(4) \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{245}x^4 + \frac{22}{729}x^5 - \frac{154}{6561}x^6 + \cdots$$

$$(5) \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 + \frac{35}{245}x^4 - \frac{91}{729}x^5 + \frac{728}{6561}x^6 + \cdots$$

$$(6) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots (\text{设 } n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n)$$

$$(7) a^x = 1 + \frac{x \log a}{1!} + \frac{(x \log a)^2}{2!} + \frac{(x \log a)^3}{3!} + \cdots$$

$$(8) \log a = 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{-1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \cdots \right] \quad (x > 0)$$

$$(9) \log(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \cdots (|x| < 1)$$

$$(10) \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \cdots\right) (|x| < 1)$$

1.2 三角公式

1.2.1 同一角之三角函数之间关系

同一角三角函数关系见表 1-1

表 1-1

	$\sin \alpha = x$	$\cos \alpha = x$	$\tan \alpha = x$	$\cot \alpha = x$	$\sec \alpha = x$	$\csc \alpha = x$
$\sin \alpha =$	x	$\pm \sqrt{1-x^2}$	$\pm \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\pm \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{x}$
$\cos \alpha =$	$\pm \sqrt{1-x^2}$	x	$\pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\pm \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\pm \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$
$\tan \alpha =$	$\pm \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\pm \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\pm \sqrt{x^2-1}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\cot \alpha =$	$\pm \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\pm \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\pm \sqrt{x^2-1}$

续表 1-1

	$\sin \alpha = x$	$\cos \alpha = x$	$\tan \alpha = x$	$\cot \alpha = x$	$\sec \alpha = x$	$\csc \alpha = x$
$\sec \alpha =$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\pm \sqrt{1+x^2}$	$\pm \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	x	$\pm \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
$\csc \alpha =$	$\frac{1}{x}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\pm \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	$\pm \sqrt{1+x^2}$	$\pm \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	x

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha \quad 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

1.2.2 三角函数及三角函数之幂

$$(1) \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$(2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$(3) \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

$$(4) \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

$$(5) \sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha$$

$$(6) \cos 4\alpha = 1 - 8\cos^3 \alpha + 3\cos^4 \alpha$$

$$(7) \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$(8) \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$(9) \sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3\sin \alpha - \sin 3\alpha)$$

$$(10) \cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(3\cos \alpha + \cos 3\alpha)$$

$$(11) \sin^4 \alpha = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$$

$$(12) \cos^4 \alpha = \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$$

$$(13) \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$(14) \tan 3\alpha = \frac{3\tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3\tan^2 \alpha}$$

1.2.3 两角之和或差的函数

$$(1) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$(2) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$(3) \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$(4) \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$$

1.2.4 两角函数之和差及积

$$(1) \sin \alpha + \sin \beta = 2\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$(2) \sin \alpha - \sin \beta = 2\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$(3) \cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$(4) \cos \alpha - \cos \beta = -2\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$(5) \tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$(6) \cot \alpha \pm \cot \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$(7) \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$(8) \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$(9) \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

1.2.5 三角形的性质

a, b, c 为边; A, B, C 为角; R 为外接圆半径, 见图 1-1; $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, 则

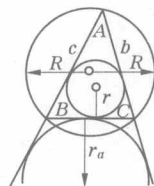


图 1-1

(1) 正弦法则 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

(2) 余弦法则 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

(3) 由两边及夹角求他边 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

(4) $\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

(5) 面积 $S = \frac{bc}{2} \sin A = \frac{abc}{4R} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(6) 外接圆半径 $R = \frac{abc}{4 \times \text{面积}} = \frac{a}{2 \sin A}$

(7) 内切圆半径 $r = \frac{\text{面积}}{s} = (s-a) \tan \frac{A}{2}$

(8) 傍切圆半径 $r_a = \frac{\text{面积}}{s-a} = s \tan \frac{A}{2}$

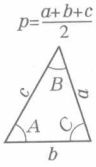
1.2.6 三角形公式

三角形公式详见表 1-2.

表 1-2

图形	已知	求	公 式	
	a, c	A, B	$\sin A = \frac{a}{c}$	$\cos B = \frac{a}{c}$
		b, S	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$	$S = \frac{a}{2} \sqrt{c^2 - a^2}$
	a, b	A, B	$\tan A = \frac{a}{b}$	$\tan B = \frac{b}{a}$
		c, S	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$S = \frac{ab}{2}$
	A, a	B, b	$B = 90^\circ - A$	$b = a \cot A$
		c, S	$c = \frac{a}{\sin A}$	$S = \frac{a^2 \cot A}{2}$
	A, b	B, a	$B = 90^\circ - A$	$a = b \tan A = c \cos B$
		c, S	$c = \frac{b}{\cos A}$	$S = \frac{b^2 \tan A}{2}$
	A, c	B, a	$B = 90^\circ - A$	$a = c \sin A$
		b, S	$b = c \cos A$	$S = \frac{c^2 \sin A \cos A}{2} = \frac{c^2 \sin 2A}{4}$
	c, b	A, B	$\cos A = \frac{b}{c}$	$B = 90^\circ - A$
		a, S	$a = \sqrt{c^2 - b^2}$	$S = \frac{ab}{2}$

续表 1-2

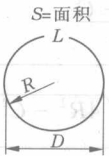
图形	已知	求	公 式
 	a, b, c	A	$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad \cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{p(p-c)}{bc}}$ $\tan \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-c)}}$
		B	$\sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \quad \cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$ $\tan \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$
		C	$\sin \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \quad \cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$ $\tan \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$
		S	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
	a, A, B	b, c	$b = \frac{a \sin B}{\sin A} \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{a \sin(A+B)}{\sin A}$
		S	$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{a^2 \sin B \sin(A+B)}{2 \sin A}$
	a, b, A	B	$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$
		c	$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{b \sin C}{\sin B} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$
		S	$S = \frac{1}{2} ab \sin C$
		A	$\tan A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C}$
			$\tan \frac{1}{2} (A+B) = \frac{ab}{a+b} \cot \frac{1}{2} C$
		S	$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A$
		c	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$
			$A+B+C = 180^\circ \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
			$\sin A + \sin B + \sin C = A \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$
			$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + A \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
			$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$
			$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
			$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
			$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2} (A+B)}{\tan \frac{1}{2} (A-B)}$

1.3 求积法

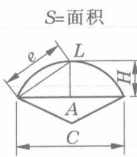
1.3.1 圆形公式

圆形公式详见表 1-3.

表 1-3

图 形	已知	计算公式
	D	$L = \pi D$
	R, S	$L = \frac{2S}{R}$
	R	$L = 2\pi R = 6.283\ 2R$
	S, D	$L = \frac{4S}{D}$
	S	$L = 2\sqrt{\pi S}$
	L	$D = \frac{L}{\pi}$
	S	$D = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}}$
	L	$R = \frac{L}{2\pi}$
	S	$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$
	R	$S = \pi R^2$
	R, L	$S = \frac{LR}{2}$
	D	$S = \frac{\pi D^2}{4}$
	L, D	$S = \frac{LD}{4}$
	L	$S = \frac{L^2}{4\pi}$
	R, A	$L = \frac{\pi RA}{180}$
	S, A	$L = \sqrt{\frac{\pi AS}{90}}$
	L, A	$R = \frac{180L}{\pi A}$
	S, A	$R = \sqrt{\frac{360S}{\pi A}}$
	R, L	$R = \frac{180L}{\pi A}$
	R, S	$A = \frac{360S}{\pi R^2}$
	R, L	$S = \frac{RL}{2}$
	R, A	$S = \frac{\pi R^2 A}{360}$

续表 1-3

图 形	已知	计算公式
 S=面积	R, A	$H = 2R \sin^2 \frac{A}{4}$
	C, A	$H = \frac{C}{2} \tan \frac{A}{4}$
	L, R, C, N	$S = \frac{R^2}{2} \frac{\pi A}{180} \sin A$
	H, R	$C = 2 \sqrt{2HR - H^2} = 2R \sin \frac{A}{2}$
	C, H	$S = \frac{\pi R^2 A}{360} - \frac{C}{2} (R + H)$
	C, H	$S = \frac{4H}{3} \sqrt{(0.626H)^2 + (\frac{C}{2})^2}$
	C, H	$L = 2\sqrt{(\frac{C}{2})^2 + H^2} = \frac{8B^2 - C}{3}$
	R, C	$H = R - \sqrt{R^2 - (\frac{C}{2})^2} = R - \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - C^2}$
	H, C	$R = \frac{e^2}{2H}$

1.3.2 双曲线函数

- $$\begin{aligned}
 (1) \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & (2) \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & (3) \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \\
 (4) \coth x &= \frac{1}{\tanh x} & (5) \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} & (6) \cosh x &= \frac{1}{\sinh x} \\
 (7) \cosh x + \sinh x &= e^x & (8) \cosh x - \sinh x &= e^{-x} & (9) \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\
 (10) \tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x &= 1 & (11) \coth^2 x - \cosh^2 x &= 1 \\
 (12) \sinh(\alpha \pm \beta) &= \sinh \alpha \cosh \beta \pm \sinh \alpha \sinh \beta \\
 (13) \cosh(\alpha \pm \beta) &= \cosh \alpha \cosh \beta \mp \sinh \alpha \sinh \beta \\
 (14) \tanh(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tanh \alpha \pm \coth \beta}{1 \mp \tanh \alpha \tanh \beta} \\
 (15) \coth(\alpha \pm \beta) &= \frac{1 \mp \coth \alpha \coth \beta}{\coth \alpha \pm \coth \beta} \\
 (16) \sinh ix &= -i \sin x & (17) \cosh ix &= i \cos x & (18) \tanh ix &= -i \tan x
 \end{aligned}$$

1.3.3 各种图形公式

各种图形的计算公式见表 1-4.