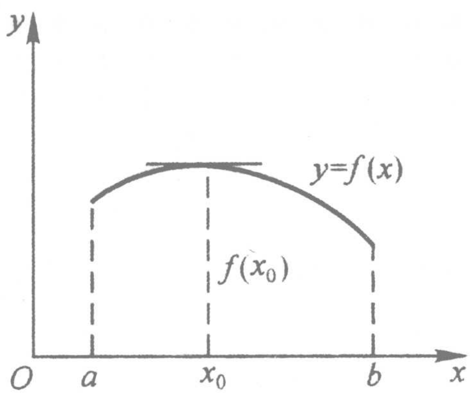
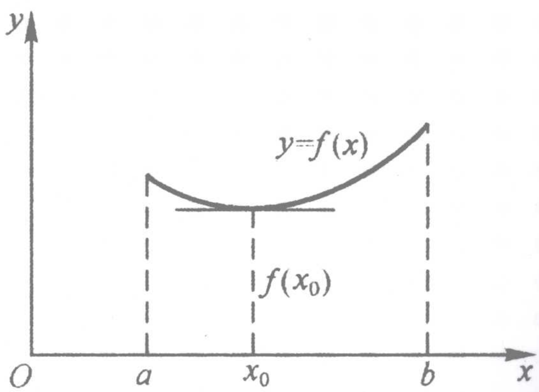
高职高专公共基础课“十一五”规划教材

高等应用数学

（机械类）

马来焕　主编





机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高职高专公共基础课“十一五”规划教材

高等应用数学

（机械类）

主　编　马来焕

副主编　赵金锁　石秀文　陈珠社　白甲志

参　编　袁卫东　王博荣　郭晓芬　干洪英

　　　　屈芝莲　贺建平　赵振杰　侯爱华

　　　　安雪梅　闫伟杰　胡跃强

机 械 工 业 出 版 社

本书是由全国机械职业教育公共基础课教学指导委员会数学学科组组织编写的高等职业教育教改项目规划教材.

主要内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微积分，常微分方程初步，向量代数与空间解析几何，概率论，数理统计初步及线性代数. 另外，每章均配有数学实验与应用，使学生能够通过数学实验更好地理解教学内容，也为学生解决实际问题提供了简便、快捷的工具.

本书可作为高职高专机械类各专业高等数学教材，也可作为成人大专以及工程技术人员的高等数学知识更新的自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学：机械类/马来焕主编. —北京：机械工业出版社，2008.8

高职高专公共基础课“十一五”规划教材

ISBN 978-7-111-24510-0

Ⅰ. 高… Ⅱ. 马… Ⅲ. 应用数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 096006 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码100037)

责任编辑：李大国　责任校对：李　婷

封面设计：王伟光　责任印制：洪汉军

北京铭成印刷有限公司印刷

2008年8月第1版第1次印刷

184mm×260mm · 21.25印张 · 524千字

0001—4000册

标准书号：ISBN 978-7-111-24510-0

定价：32.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

销售服务热线电话：(010)68326294

购书热线电话：(010)88379639　88379641　88379643

编辑热线电话：(010)88379541

前　言

本书是由全国机械职业教育公共基础课教学指导委员会数学学科组组织编写的高等职业教育教改项目规划教材. 本书编写的指导思想是：以“理论基础厚、专业口径宽、实践能力强、综合能力高”为目标；以职业岗位能力培养为主线，构建新的课程体系和教学内容. 在编写上，注重了内容的科学性和前瞻性，既遵循科学自身的发展规律，也反映了高等数学最新的思想和方法；注重了体系的完整性和逻辑的严密性，既保证内容详尽丰富和逻辑的内在一致，也突出了学科的核心重点内容；注重了专业性和通用性，既表现出了较高的专业水准和学术水平，又注意其广泛的适用性. 在编写过程中，尽量使用简洁易懂的语言，做到深入浅出，使读者易于理解，便于掌握.

本书是针对机械类及近机类各专业的教学要求而编写的，在编写过程中，特别重视结合专业的实际需要，对高等数学原有教学内容重新进行了整合，对部分知识进行了必要的更新，以充分体现“联系实际，深化概念，注重应用，重视创新”的教改思想. 主要内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、常微分方程初步、向量代数与空间解析几何、概率论、数理统计初步及线性代数. 另外，作为本书的特色之一，每章均配有数学实验与应用，使学生能够通过数学实验更好地理解教学内容，也为学生解决实际问题提供了简便、快捷的工具. 本书内容专业针对性强、时代特色鲜明，融基础理论、方法训练和数学应用为一体.

本书由马来焕主编，由赵金锁、石秀文、陈珠社、白甲志任副主编，参加编写的老师还有：袁卫东、王博荣、郭晓芬、干洪英、屈芝莲、贺建平、赵振杰、侯爱华、安雪梅、闫伟杰、胡跃强，刘生平及茹强老师参加了部分章节的制图工作.

由于作者水平有限，书中难免存在缺点和不妥之处，恳请广大读者批评指正.

编　者

目　录

第1章　函数、极限与连续

初等数学研究的主要是常量及其运算，而高等数学所研究的主要是变量及变量之间的依赖关系．函数正是这种依赖关系的体现，极限方法是研究变量之间依赖关系的基本方法．本章将在复习高中所学的函数与极限概念的基础上，进一步介绍两个重要极限，无穷大与无穷小的概念以及函数的连续性．

1.1　预备知识

1.1.1　常见的实数集与记号

1. 自然数集：$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$．

2. 整数集：$\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm n,\cdots\}$．其中，偶数集：$\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$，奇数集：$\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$．

3. 有理数集：$\mathbf{Q}=\{$有理数$\}$．其中，$\mathbf{Q}^{+}=\{$正有理数$\}$，$\mathbf{Q}^{-}=\{$负有理数$\}$．

4. 无理数集：$\mathbf{W}=\{$无理数$\}$．

5. 实数集：$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$其中，$\mathbf{R}^{+}=(0,+\infty)$，$\mathbf{R}^{-}=(-\infty,0)$．

6. 二维平面：
$$\begin{aligned}\mathbf{R}^2&=(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)\\&=\{(x,y)\mid x\in(-\infty,+\infty),y\in(-\infty,+\infty)\}.\end{aligned}$$

7. 三维空间：
$$\begin{aligned}\mathbf{R}^3&=(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)\\&=\{(x,y,z)\mid x\in(-\infty,+\infty),y\in(-\infty,+\infty),z\in(-\infty,+\infty)\}.\end{aligned}$$

推而广之，可以将 n 元有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体称为 n 维空间，记作 $\mathbf{R}^n$，即
$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_k\in\mathbf{R},k=1,2,\cdots,n\}$$
$\mathbf{R}^n$ 中的元素$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$记作 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$．

n 维空间中的每一个元素$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为空间中的一个点或一个 n 维向量，数 x_k 称为该点的第 k 个坐标．特别地，当所有 $x_k=0(k=1,2,\cdots,n)$时，称这样的元素为 $\mathbf{R}^n$ 中的零元，记作 $\mathbf{0}$ 或 0．

1.1.2　实数的绝对值

1. 绝对值的定义

$$|a|=\begin{cases}a & a>0\\0 & a=0\\-a & a<0\end{cases}$$

2. 绝对值的几何意义

$|a|$表示数轴上点 a 到原点之间的距离．

3. 绝对值的性质

(1) $|a| \geqslant 0$; (2) $|a| = \sqrt{a^2}$; (3) $|a| = |-a|$; (4) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

4. 绝对值的运算性质

(1) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$;　　(2) $|a| - |b| \leqslant |a-b|$;

(3) $|ab| = |a||b|$;　　(4) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $(|b| \neq 0)$;

(5) $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$, $|x-a| < \varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$;

(6) $|x| > \varepsilon \Leftrightarrow x < -\varepsilon$ 或 $x > \varepsilon$.

1.1.3　区间

区间是指介于某两个实数之间的全体实数，这两个实数叫做区间的端点.

1. 有限区间

设 a，b 为两个实数，且 $a<b$. 我们规定：

(1) 数集 $\{x \mid a<x<b\}$，记作 (a,b)，称为**开区间**;

(2) 数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，记作 $[a,b]$，称为**闭区间**;

(3) 数集 $\{x \mid a \leqslant x < b\}$，记作 $[a,b)$，称为**左闭右开区间**;

(4) 数集 $\{x \mid a < x \leqslant b\}$，记作 $(a,b]$，称为**左开右闭区间**.

2. 无限区间

设 a，b 为两个实数，则

(1) 实数集 $\{x \mid x \geqslant a\}$，记作 $[a,+\infty)$;

(2) 实数集 $\{x \mid x > a\}$，记作 $(a,+\infty)$;

(3) 实数集 $\{x \mid x \leqslant b\}$，记作 $(-\infty,b]$;

(4) 实数集 $\{x \mid x < b\}$，记作 $(-\infty,b)$;

(5) 实数集 $\mathbf{R}$，记作 $(-\infty,+\infty)$.

1.1.4　邻域

邻域是高等数学中一个常用的概念，下面分类进行讨论.

1. 直线上的点的邻域

设 $x_0 \in \mathbf{R}$，$\mathbf{R}$ 上所有与 x_0 的距离小于 $\delta>0$ 的点集，称为 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$.

由定义可见，x_0 的 δ 邻域就是以 x_0 为中心，以 δ 为半径的开区间，即

$$U(x_0,\delta) = \{x \mid |x-x_0| < \delta\} = (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

特别地，不包含中心点的邻域称为**去心邻域**，记作

$$\mathring{U}(x_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x-x_0| < \delta\}$$

邻域的左半部和右半部分别称为**左邻域**和**右邻域**，并分别记作

$$\text{左邻域 } U^-(x_0,\delta) = (x_0-\delta, x_0],\quad \text{右邻域 } U^+(x_0,\delta) = [x_0, x_0+\delta)$$

2. 平面上的点的邻域

设 $P(x_0,y_0) \in \mathbf{R}^2$，$\mathbf{R}^2$ 上所有与 $P(x_0,y_0)$ 的距离小于 $\delta>0$ 的点集，称为 $P(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域，记作 $U(P,\delta)$. $U(P,\delta)$ 的几何意义是：以 $P(x_0,y_0)$ 为中心，以 δ 为半径的开圆域.

3. 平面上的直线的邻域

设 $y=A\in\mathbf{R}^2$，$\mathbf{R}^2$ 上所有与 $y=A$ 的距离小于 $\varepsilon>0$ 的点集，称为 $y=A$ 的 ε 邻域，记作 $U(A,\varepsilon)$. $U(A,\varepsilon)$的几何意义是：以 $y=A$ 为中心，以 ε 为半径的带形区域.

4. 空间的邻域

三维空间的点邻域是以 $P(x_0,y_0,z_0)$为中心，以 δ 为半径的开球，即

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y,z)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$$

1.1.5 充分必要条件

一个数学命题由条件和结论两部分构成. 若用 A 表示条件，用 B 表示结论，则

（1）如果命题为“若 A 则 B”，那么称 A 为 B 的充分条件，B 为 A 的必要条件，记作 $A\Rightarrow B$；

（2）如果命题为“若 A 则 B”与命题“若 B 则 A”同时成立，那么称 A 与 B 互为充要条件，记作 $A\Leftrightarrow B$.

1.1.6 常用的三角公式

在高等数学的学习过程中，会用到一些初等三角函数公式，为使用方便，我们把常用的三角公式列举如下.

1. 两角和差公式

（1）$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$；

（2）$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$；

（3）$\tan(x\pm y)=\dfrac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}$.

2. 同角三角函数间的关系

（1）平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$；$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$.

（2）商数关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$；$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

（3）倒数关系：$\sin\alpha\csc\alpha=1$；$\cos\alpha\sec\alpha=1$；$\tan\alpha\cot\alpha=1$.

3. 倍角公式

（1）$\sin 2x=2\sin x\cos x$；　（2）$\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x$.

4. 降幂公式

（1）$\sin^2x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$；　（2）$\cos^2x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

5. 积化和差公式

（1）$\sin x\sin y=-\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$；

（2）$\cos x\cos y=\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$；

（3）$\sin x\cos y=\dfrac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$；

(4) $\cos x\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$.

1.1.7 本书常用数学符号约定

$\mathbf{N}$——自然数集合;

$\mathbf{N}_+$——正整数集合;

$\mathbf{Z}$——整数集合;

$\mathbf{Q}$——有理数集合;

$\in$——属于;

$\cup$——(集合或事件的)并;

$\cap$——(集合或事件的)交;

$\forall$——一切(任给);

$\exists$——存在(找到);

def——定义为;

$\wedge$——且;

D——定义域;

Det(A)——矩阵 A 对应的行列式;

$\mathbf{R}$——一切实数的集合;

$\mathbf{R}^2$——数平面上一切点的集合;

$\varnothing$——空集(或不可能事件);

Ω——全集(样本空间或必然事件);

$\supset$——包含;

$\Rightarrow$——推出(隐含);

$\Leftrightarrow$——当且仅当(等价);

$\leftrightarrow$——对应;

$\sum$——求和;

$\prod$——求积;

$\vee$——或;

M——值域.

习题 1-1

用区间表示下列范围:

(1) $x\leqslant 0$;　　(2) $-1\leqslant x<2$;

(3) $|x-2|<\varepsilon$;　　(4) $U(a,\delta)$.

1.2 函数

1.2.1 函数的概念

1. 常量与变量

在观察自然现象或技术过程时,常常会遇到各种不同的量,其中有些量在过程中不起变化,也就是保持一定的数值,这种量叫做**常量**;还有一些量在过程中是变化着的,也就是可以取不同的数值,这种量叫做**变量**.

例如,把一个密闭容器内的气体加热时,气体的体积和气体的分子个数保持一定,它们是常量;而气体的温度和压力在变化,则是变量,它们取得越来越大的数值.

一个量是常量还是变量,要根据具体情况做出具体分析. 例如,就小范围地区来说,重力加速度可以看做常量,但就广大地区来说,重力加速度则是变量.

理解常量与变量时,应注意下面几点:

(1) 常量和变量依赖于所研究的过程. 同一量在某一过程中可以认为是常量,而在另一过程中则可能是变量;反之亦然.

(2) 在几何意义上,常量对应着实数轴上的定点,变量则对应着实数轴上的动点.

（3）一个变量所能取的数值的集合叫做这个变量的变动区域.

通常用字母 a、b、c 等表示常量，用字母 x、y、t 等表示变量.

2. 函数的概念及表示法

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量在变化着. 这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 本章只讨论两个变量的情况. 先看下面的例子.

例 1　考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系. 我们知道，它们之间的关系由公式

$$A=\pi r^2$$

给定. 当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可以确定圆面积 A 的相应数值.

例 2　自由落体运动. 设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s. 假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么 s 与 t 之间的相依关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定. 其中，g 是重力加速度. 假定物体着地的时刻为 $t=T$，那么当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任意取定一个数值时，由上式就可以确定下落距离 s 的相应数值.

抽取上面两个例子中所考虑的量的实际意义，它们都表达了两个变量之间的相依关系，这种相依关系给出了一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

设 x 和 y 是两个变量，若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时，变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. x 称为**自变量**，y 称为**因变量**；f 是函数符号，它表示 y 与 x 的对应规则；集合 D 称为函数的**定义域**，相应的 y 值的集合则称为函数的**值域**.

当自变量 x 在其定义域内取定某确定值 x_0 时，因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$ 求出的对应 y_0 叫做当 $x=x_0$ 时的**函数值**，记作 $y\big|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

例 3　已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(-x)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f(x+1)$，$f(x^2)$.

解　$f(0)=\dfrac{1-0}{1+0}=1$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$，$f(-x)=\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=\dfrac{1+x}{1-x}$，

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1},\ f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{-x}{2+x},\ f(x^2)=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

例 4　求下列函数的定义域.

（1）$f(x)=\dfrac{3}{5x^2+2x}$；　（2）$f(x)=\sqrt{9-x^2}$；　（3）$f(x)=\lg(4x-3)$；

（4）$f(x)=\arcsin(2x-1)$；　（5）$f(x)=\lg(4x-3)-\arcsin(2x-1)$.

解 (1) 在分式$\frac{3}{5x^2+2x}$中，分母不能为零，所以$5x^2+2x\neq0$，解得$x\neq-\frac{2}{5}$，且$x\neq0$，即定义域为

$$\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right)\cup\left(-\frac{2}{5},0\right)\cup(0,+\infty).$$

(2) 由$9-x^2\geqslant0$，解得$-3\leqslant x\leqslant3$，即定义域为$[-3,3]$.

(3) 由$4x-3>0$，解得$x>\frac{3}{4}$，即定义域为$\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$.

(4) 由$-1\leqslant2x-1\leqslant1$，解得$0\leqslant x\leqslant1$，即定义域为$[0,1]$.

(5) 定义域应为(3)、(4)两例中定义域的交集，即

$$\left(\frac{3}{4},+\infty\right)\cap[0,1]=\left(\frac{3}{4},1\right]$$

常用的函数表示法有解析法(又称公式法)、表格法和图像法.

3. 分段函数

定义域分成若干部分，函数关系由不同的式子分段表达的函数称为**分段函数**.

例如：

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant0\\ -x & x<0\end{cases}$$

例5 设函数$y=f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x>0\\ 2 & x=0\\ 3x & x<0\end{cases}$，求$f(3)$、$f(-5)$的值.

解 当x取$(0,+\infty)$内的值时，y的值由关系式$y=x^2+1$来计算；当$x=0$时，$y=2$；当x取$(-\infty,0)$内的值时，y的值由关系式$y=3x$来计算. 因此，

$$f(3)=3^2+1=10,\ f(-5)=3\times(-5)=-15.$$

它的图像如图1-1所示.

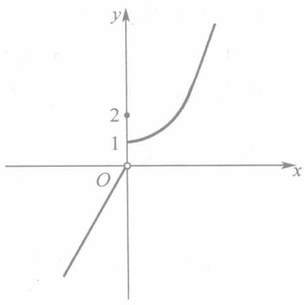


图1-1

注意：分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数，而不是几个函数. 对于自变量x在定义域内的某个值，分段函数y只能确定唯一的值. 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

例6 设函数$f(x)=\begin{cases}\sin x & -4\leqslant x<1\\ 1 & 1\leqslant x<3\\ 5x-1 & x\geqslant3\end{cases}$，求$f(-\pi)$、$f(1)$、$f(3.5)$及函数的定义域.

解 因为$-\pi\in[-4,1)$，所以$f(-\pi)=\sin(-\pi)=0$；因为$1\in[1,3)$，所以$f(1)=1$；因为$3.5\in[3,+\infty)$，所以$f(3.5)=5\times(3.5)-1=16.5$. 函数$f(x)$的定义域为$[-4,+\infty)$.

例7 用分段函数表示函数$y=3-|2-x|$，并画出其图像.

解 根据绝对值定义可知，当$x\leqslant2$时，$|2-x|=2-x$；当$x>2$时，$|2-x|=x-2$，于

是有 $y=\begin{cases}3-(2-x) & x\leqslant 2\\ 3-(x-2) & x>2\end{cases}$

即
$$y=\begin{cases}1+x & x\leqslant 2\\ 5-x & x>2\end{cases}$$

其图像如图 1-2 所示.

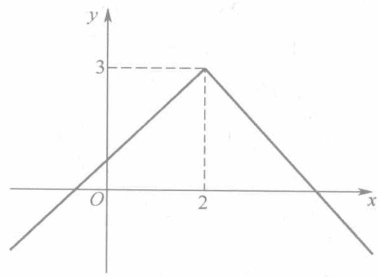


图 1-2

1.2.2　函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in D$ 恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**有界的**. 如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 D 上是**无界的**.

注意：(1) 当一个函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界时，正数 M 的取法不是唯一的.

(2) 有界性是依赖于区间的，$y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，而在区间 $(0,1)$ 内则是无界的.

2. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

由定义可知，对任意的 $x\in D$，必有 $-x\in D$，否则 $f(-x)$ 没有意义，因此函数具有奇偶性时，其定义域必定是关于原点对称的.

偶函数的图像是对称于 y 轴的，如图 1-3 所示．因为 $f(-x)=f(x)$，所以如果点 $P(x,f(x))$ 是曲线上的点，则它关于 y 轴的对称点 $Q(-x,f(x))$，也是曲线上的点.

奇函数的图像是对称于原点的，如图 1-4 所示．因为 $f(-x)=-f(x)$，所以如果点 $P(x,f(x))$ 是曲线上的点，则它关于原点的对称点 $Q(-x,-f(x))$，也是曲线上的点.

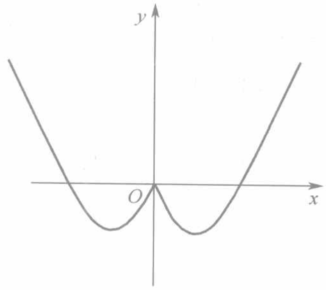


图 1-3

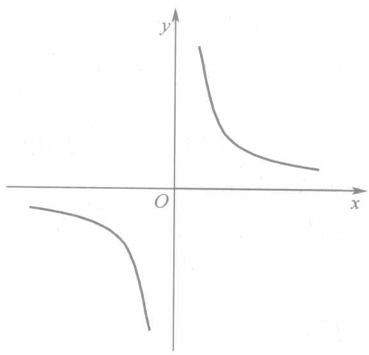


图 1-4

例 8　判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=3x^4-5x^2+7$；　(2) $f(x)=2x^2+\sin x$；　(3) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^x)$.

解　(1) 因为 $f(-x)=3(-x)^4-5(-x)^2+7=3x^4-5x^2+7=f(x)$，所以由定义可知

$f(x)=3x^4-5x^2+7$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(-x)=2(-x)^2+\sin(-x)=2x^2-\sin(x)\neq f(x)$，同样可以得到 $f(-x)\neq -f(x)$，所以由定义可知 $f(x)=2x^2+\sin x$ 既非奇函数，也非偶函数.

(3) 因为 $f(-x)=\frac{1}{2}(a^{-(-x)}-a^{-x})=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})=-\frac{1}{2}(a^{-x}-a^x)=-f(x)$，所以由定义可知 $f(x)=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^x)$ 是奇函数.

3. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调增加**的；如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调减少**的.

单调增加函数与单调减少函数统称为**单调函数**.

单调增加函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的，如图 1-5 所示；单调减少的函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的，如图 1-6 所示.

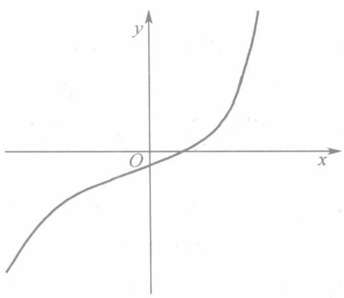


图 1-5

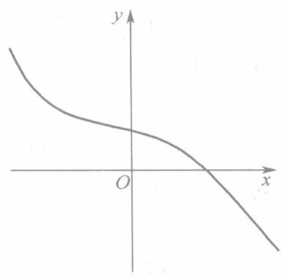


图 1-6

例 9 验证函数 $y=3x-2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

证 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内任取两点 x_1、x_2，并使 $x_1<x_2$，于是

$$f(x_1)-f(x_2)=(3x_1-2)-(3x_2-2)=3(x_1-x_2)<0$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $y=3x-2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

4. 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在正数 a，使得 $f(x)=f(x+a)$ 恒成立，则称此函数为**周期函数**，满足这个等式的最小正数 a，称为**函数周期**.

1.2.3 反函数

设 $y=f(x)$ 是 x 的函数，其值域为 M，如果对于 M 中的每一个 y 值，都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应，则得到一个定义在 M 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，称为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$. 并称 $y=f(x)$ 为**直接函数**. 为了表述方便，通常将 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$.

求反函数的过程如下：

第一步：从 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$；

第二步：交换字母 x 和 y.

单调函数一定有反函数.

例 10　求 $y=4x-1$ 的反函数.

解　由 $y=4x-1$ 得到 $x=\dfrac{y+1}{4}$. 然后交换 x 和 y，得 $y=\dfrac{x+1}{4}$，即 $y=4x-1$ 的反函数为 $y=\dfrac{x+1}{4}$.

可以证明，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称. 例 10 中的直接函数及其反函数的图像如图 1-7 所示.

1.2.4　基本初等函数

基本初等函数包括常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数六大类，它们是微积分中研究对象的基础. 虽然大部分函数在中学已经学过，但在这里对它们重新分类，并系统地讨论它们的定义域、值域、图像和性质，读者应该很好地掌握这些内容.

1. 常数函数 $y=C(x\in\mathbf{R})$

$y=C$ 是过点 $(0,C)$，且平行于 x 轴的一条直线，如图 1-8 所示，该函数是偶函数.

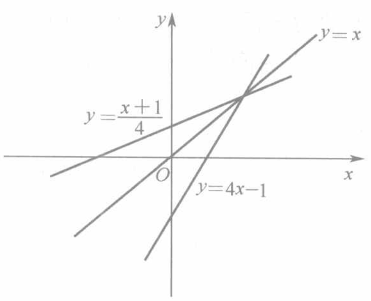


图 1-7

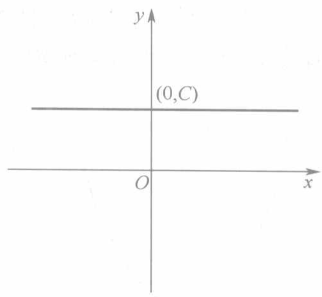


图 1-8

2. 幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$

幂函数的情况比较复杂，可以分为 $\alpha>0$ 和 $\alpha<0$ 两种情况来讨论.

当 α 取不同值时，幂函数的定义域不同. 为了便于比较，我们只讨论 $x\geqslant 0$ 的情形，而 $x<0$ 时的图像可根据函数的奇偶性确定.

当 $\alpha>0$ 时，函数的图像通过原点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加且无界，如图 1-9 所示.

当 $\alpha<0$ 时，函数的图像通过点 $(1,1)$，在 $(0,+\infty)$ 内单调减少且无界，以 x 轴和 y 轴为渐近线，如图 1-10 所示.

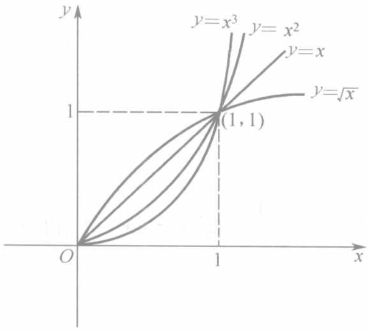


图 1-9

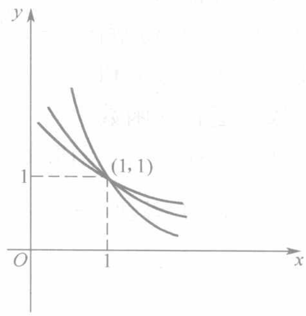


图 1-10

3. 指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$

它的定义域 D：$(-\infty,+\infty)$，$x\in D$. 由于无论 x 取何值，总有 $a^x>0$，且 $a^0=1$，所以它的图像在 x 轴上方，且过点$(0,1)$. 它的值域 M：$(0,+\infty)$.

当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界，曲线以 x 轴负半轴为渐近线.

当 $0<a<1$ 时，函数单调减少且无界，曲线以 x 轴正半轴为渐近线，如图 1-11 所示.

4. 对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$

它的定义域 D：$(0,+\infty)$，$x\in D$. 图像全部在 y 轴右方，且过点$(1,0)$. 值域 M：$(-\infty,+\infty)$.

当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界，曲线以 y 轴负半轴为渐近线；

当 $0<a<1$ 时，函数单调减少且无界，曲线以 y 轴正半轴为渐近线，如图 1-12 所示.

对数函数 $y=\log_a x$ 和指数函数 $y=a^x$ 互为反函数，它们的图像关于 $y=x$ 对称.

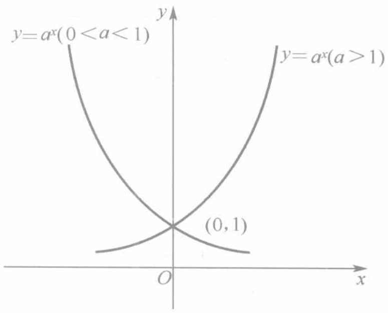


图 1-11

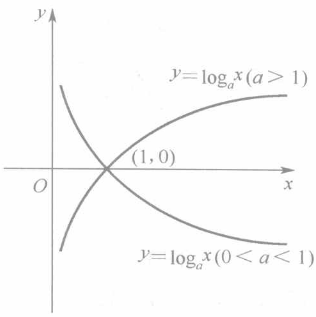


图 1-12

5. 三角函数

三角函数包括下面 6 个函数.

（1）正弦函数：$y=\sin x$，D：$\mathbf{R}$，M：$[-1,1]$，奇函数，$T=2\pi$，有界，如图 1-13 所示.

（2）余弦函数：$y=\cos x$，D：$\mathbf{R}$，M：$[-1,1]$，偶函数，$T=2\pi$，有界，如图 1-14 所示.

（3）正切函数：$y=\tan x$，D：$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，$M$：$(-\infty,+\infty)$，奇函数，$T=\pi$，