电子通信类专业
学习及考研辅导丛书

电磁场与电磁波

学习及考研辅导

海 欣 主编 张建荣 郑海龙 编著

国防工業出版社
National Defense Industry Press

电子通信类专业学习及考研辅导丛书

电磁场与电磁波
学习及考研辅导

海欣 主编
张建荣 郑海龙 编著

国防工业出版社
·北京·

内容简介

“电磁场与电磁波”是高等院校开设的专业基础课程，同时也是全国高等院校相关专业的硕士研究生入学考试必考课程。为了帮助广大学生进行系统复习，我们根据“电磁场与电磁波”课程教学基本要求编写了本书。

全书共分为8章，每一章均由知识要点、知识点解析、重点难点突破、典型例题解析、自我测试等5部分组成。每章通过知识点解析和重点难点突破对本章内容作了高度概括和叙述。典型例题解析与自我测试中例题大都选自国内重点高等院校和科研院所历年考研真题，并作了详细分析和解答。自我测试中均有参考答案，可通过练习以检测学习效果，进一步提高解题能力。本书最后还给出了重点高等院校的硕士研究生入学考试题，并给出了部分答案。

本书可作为相关专业学生报考硕士学位研究生的学习用参考书及复习指导书，也适合于高等院校相关专业的学生自学使用，同时可作为高等院校青年教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波学习及考研辅导 / 海欣主编. —北京：国防工业出版社，2008.7

(电子通信类专业学习及考研辅导丛书)

ISBN 978-7-118-05669-3

Ⅰ. 电... Ⅱ. 海... Ⅲ. ①电磁场－高等学校－教学参考资料②电磁波－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 052560 号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 17¼ **字数** 397 千字

2008年7月第1版第1次印刷 **印数** 1—3000册 **定价** 32.00元

国防书店：(010)68428422　发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535　发行业务：(010)68472764

前 言

“电磁场与电磁波”是高等院校相关专业开设的技术基础课程，它是所有相关后续专业课程的基础，同时也是高等院校相关专业硕士研究生入学考试课程。为了帮助广大的考研学生学习和提高，特别是进行系统复习，我们根据高等工科院校“电磁场与电磁波”课程教学基本要求编写了本书。

由于高等院校众多，水平不同，要在有限的篇幅内完成对各类专业课程有针对性的指导是相当困难的。为了解决这方面的问题，我们经过反复讨论，并征求了大量一线教师的意见，将一些通用原则和方法的指导放在首位，并结合大量相关实例进行了讲解。

本书共分 8 章，每章内容包括：

(1) 知识要点　对于每章的重要知识，尤其是在历年真题中经常出现的重要考点作了总结和提示，读者可以根据提示对本章内容在复习时有所侧重。

(2) 知识点详解　结合知识要点提示，再对每一章的知识要点进行详细的讲解，使读者可以快速地把握知识要点，从而提高复习效率。在总结部分还添加了一些解题技巧，更加有利于读者复习。

(3) 重点难点突破　着重讲解各章的考点、难点，为把握各章重点提供依据。

(4) 典型例题解析　该部分针对典型例题并结合高等院校“电磁场与电磁波”历年真题进行全面地讲解，并在最后给出规律性的总结，更加方便读者去把握考点，更好地应对考研。

(5) 自我测试　在每一章节的后面给出了部分自我测试题，并附有参考答案，读者可通过练习以检测学习效果，进一步提高解题能力。

本书的附录给出了部分高等院校最新“电磁场与电磁波”硕士研究生入学考试真题，对于报考硕士研究生的考生来说，这无疑是最宝贵的资源。

“电磁场与电磁波”考题的具体类型并不是很多，因此在选择例题和习题的过程中，我们主要针对典型题型和一些具有代表性的真题进行了总结，并选择了一些高等工科院校的最新试题。目的是使读者了解和掌握不同类型题目的解题方法和技巧，以便扩大解题思路，培养分析和解决实际问题的能力。

本书力求科学性、先进性、指导性，既能促进高等工科院校学生的电磁场与电磁波学习，又不脱离大多数一般院校的实际，提供切实可行的参考实例。本书可作为相关专业学生报考硕士研究生的学习用参考书及复习指导书，也适合于高等院校相关专业的学生自学使用，同时可作为高等院校教师的教学参考书。

在收集和整理历年考研真题和笔记的过程中，得到了清华大学、上海交通大学、东南大学、同济大学、西安交通大学、西北工业大学、浙江大学、北京航空航天大学、哈尔滨工业大学、天津大学、中国科学技术大学、华中科技大学、华南理工大学、中国科学院等高等院

校和科研院所的教师及研究生的热情帮助，在此向他们表示衷心感谢。

本书由海欣主编，张建荣、郑海龙编著，另外丁金滨、王菁、夏金玉、何嘉扬、石良臣、刘志明、温正、张樱枝、周懿等也参与了部分章节的编写工作。同时由北京航空航天大学一线授课教师对该书进行了认真仔细的审阅，并提出了许多极为宝贵的修改意见，对提高本书质量起了很大的作用，在此致以衷心的感谢！

由于作者水平有限，编写时间较短，书中欠妥及错误之处在所难免，希望读者和同仁能够及时指出，共同促进本书质量的提高。

用户在使用本书时，若出现关于本书的相关疑问以及碰到难以解答的问题，可以到为本书专门提供的考研论坛提问或直接发邮件到编者邮箱，编者会尽快给予解答，另外该论坛还提供了其他高等院校部分真题的参考答案，读者可以到相关栏目下载。

编者邮箱：kaoyanshu@126.com

海欣考研论坛网址：www.haixin.org/kybbs

编 者

2008 年 5 月于北京

目　录

第 1 章　矢量分析及场论基础

知识要点

本章主要研究矢量运算的基本理论，矢量运算是用来研究电磁场的基本运算方法，涉及的数学知识主要是矢量梯度、旋度、导数等概念，掌握这些知识是学好电磁场的基本要求。

同时，本章引入了三种坐标系以及场的基本概念。最后，又引入了自由空间中的场的基本定理。本章主要内容包括：

1. 矢量运算的方法与意义。
2. 三种常见正交坐标系。
3. 梯度、散度、旋度的定义、计算公式和运算规则。
4. 自由空间中的电磁场定理。

1.1　知识点解析

1.1.1　矢量运算

矢量运算是用来研究电磁场的基本运算方法。在电磁学中普遍采用矢量来为复杂的电磁现象提供合理的数学描述，这样不但便于直观想象，更有利于运算变换，为电磁研究提供有力的理论支持。

一个量如果用大小就可以完整地描述，称这个量为标量，如质量、电荷等。矢量是相对于标量而言的。

在空间中，既有大小又有方向的量称为矢量。力、速度、电场强度都是矢量。矢量的大小用绝对值来表示，叫做矢量的模。模为 1 的矢量叫做单位矢量，用 $\boldsymbol{e}$ 表示。

1. 矢量的表示

直角坐标系中，用 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 分别表示与直角坐标系中 x,y,z 三个坐标轴同方向的单位矢量。对于任意一个矢量 $\boldsymbol{A}$，可以表示成分量的形式：

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$$

其中：A_x、A_y、A_z 称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 x,y,z 轴上的投影。

由各分量的含义，不难得出：$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$，即为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模。

2. 矢量的运算

设 $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{e}_x + B_y\boldsymbol{e}_y + B_z\boldsymbol{e}_z$。

(1) 矢量的加法:$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(A_x+B_x)\boldsymbol{e}_x+(A_y+B_y)\boldsymbol{e}_y+(A_z+B_z)\boldsymbol{e}_z$

(2) 矢量的减法:$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(A_x-B_x)\boldsymbol{e}_x+(A_y-B_y)\boldsymbol{e}_y+(A_z-B_z)\boldsymbol{e}_z$

(3) 矢量的数乘:$\lambda\boldsymbol{A}=\lambda A_x\boldsymbol{e}_x+\lambda A_y\boldsymbol{e}_y+\lambda A_z\boldsymbol{e}_z$(式中:$\lambda$ 为实数)

(4) 矢量的点积:$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$(式中:$\theta$ 是矢量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 之间的夹角,如图 1－1 所示)

点积的性质:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$(\lambda\boldsymbol{A})\cdot(\mu\boldsymbol{B})=\lambda\mu\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\text{(式中:}\lambda\text{、}\mu\text{ 为实数)}$$

$$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}$$

(5) 矢量的叉积:

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=AB\sin\theta e_n=(A_yB_z-A_zB_y)e_x+(A_zB_x-A_xB_z)e_y+(A_xB_y-A_yB_x)e_z$$

$$=\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

式中:$\boldsymbol{e}_n$ 是与矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都垂直的单位矢量。$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{e}_n$ 构成右手螺旋关系;θ 是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的夹角。如图 1－2 所示。注意:$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$。

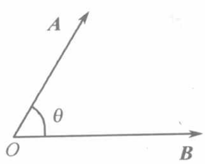

图 1－1　矢量夹角

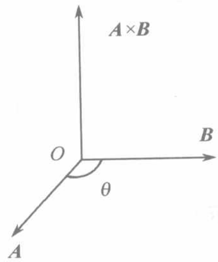

图 1－2　矢量叉积

叉积的性质:　$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A});\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0$

(6) 矢量的混合积:

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

3. 矢量函数的微分公式

(1) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_x+\dfrac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_y+\dfrac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_z$　　(2) $\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\mathrm{d}A_x\boldsymbol{e}_x+\mathrm{d}A_y\boldsymbol{e}_y+\mathrm{d}A_z\boldsymbol{e}_z$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}x}=0$(式中:$\boldsymbol{C}$ 是常矢量)　　(4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}$

(5) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k\boldsymbol{A})=k\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$(式中:$k$ 是常数)　　(6) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu\boldsymbol{A})=\mu\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}$(式中:$\mu$ 是 t 的函数)

(7) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{B}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$　　(8) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B}$

(9) 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\mu)$,$\mu = \mu(t)$,则$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}\mu}\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}$

4. 矢量函数的积分公式

(1) $\int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \left[\int A_x(t)\mathrm{d}t\right]\boldsymbol{e}_x + \left[\int A_y(t)\mathrm{d}t\right]\boldsymbol{e}_y + \left[\int A_z(t)\mathrm{d}t\right]\boldsymbol{e}_z$

$= B_x(t)\boldsymbol{e}_x + B_y(t)\boldsymbol{e}_y + B_z(t)\boldsymbol{e}_z + C_x\boldsymbol{e}_x + C_y\boldsymbol{e}_y + C_z\boldsymbol{e}_z$

式中:$B_x(t)$,$B_y(t)$,$B_z(t)$ 分别是 A_x ,A_y ,A_z 的原函数;C_x ,C_y ,C_z 是任意常数。

(2) $\int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{B}(t) + \boldsymbol{C}$(式中:$\boldsymbol{B}(t)$ 是 $\boldsymbol{A}(t)$ 的原函数;$\boldsymbol{C}$ 是任意常矢量)

(3) $\int [\boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{B}(t)]\mathrm{d}t = \int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t + \int \boldsymbol{B}(t)\mathrm{d}t$

(4) $\int k\boldsymbol{A}(t) + \mathrm{d}t = k\int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$(式中:$k$ 是任意常数)

(5) $\int \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{C}\cdot\int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$(式中:$\boldsymbol{C}$ 是任意常矢量)

(6) $\int \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{C}\times\int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$(式中:$\boldsymbol{C}$ 是常矢量)

1.1.2 三种常见的坐标系

在求解电磁场问题时,经常用到的坐标系有三种:直角坐标系(笛卡儿坐标系)、圆柱坐标系、球坐标系。每种坐标系在分析不同的问题时各有优劣。

如果能够选择合适的坐标系,就可以很方便地表示出空间中的某个坐标。下面来分开讨论各种坐标系以及它们的应用。

1. 直角坐标系(笛卡儿坐标系)

直角坐标系由三个相互正交的直线组成。这三个直线分别称为 x 轴,y 轴,z 轴。三个轴的交点是原点,常用字母 O 来表示。用单位矢量 $\boldsymbol{a}_x$,$\boldsymbol{a}_y$,$\boldsymbol{a}_z$ 分别表示沿 x 轴,y 轴,z 轴分量的方向,如图 1-3 所示。

对于空间的中的任一点 P,可以用它在三个轴线上的投影 X、Y、Z 来唯一地表示,即 $P(X,Y,Z)$;对于任意一个位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 表示为一个从原点指向点 P 的矢量,可以用它的分量表示为

$$\boldsymbol{r} = X\boldsymbol{a}_x + Y\boldsymbol{a}_y + Z\boldsymbol{a}_z$$

式中:X、Y、Z 是在 x 轴,y 轴,z 轴上的投影,如图 1-4 所示。

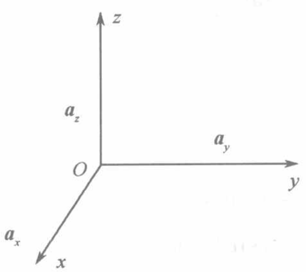

图 1-3 直角坐标系

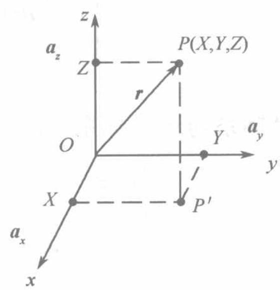

图 1-4 直角坐标系

对于任意矢量 $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_x + A_y\boldsymbol{a}_y + A_z\boldsymbol{a}_z$，也可以用同样的方法在直角坐标系中表示出来。

2. 圆柱坐标系

空间中的一点 $P(X,Y,Z)$ 也可以用 ρ,ϕ 和 z 来描述，如图1-5所示。其中，ρ 是位矢 $\boldsymbol{OP}$ 在 xy 平面上的投影，ϕ 是从正 x 轴逆时针旋转到 ρ 的角，z 是 P 点在 z 轴上的投影，称 ρ、ϕ、z 为点 $P(\rho,\phi,z)$ 的柱坐标。

通过观察可以发现：

ρ = 常数是一个半径为 ρ 的圆柱面。

ϕ = 常数是一个以 z 轴为边界的半平面。

z = 常数是一个平行于 xy 平面的平面。

3. 球坐标系

对于空间中的任意一点 P，也可以在球坐标系中用 r,θ,ϕ 表示，如图1-6所示。

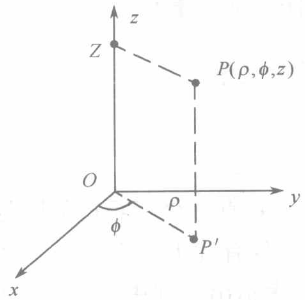

图1-5　圆柱坐标系

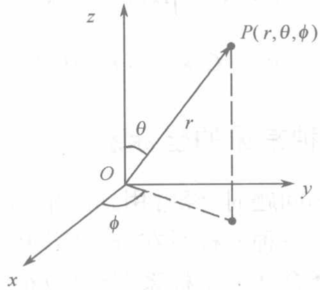

图1-6　球坐标系

其中：r 是矢径 $\boldsymbol{OP}$ 的大小，$0 \leqslant r < \infty$；θ 是 $\boldsymbol{OP}$ 与正 z 轴构成的角，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$；$\phi$ 是正 x 轴与 $\boldsymbol{OP}$ 在 xOy 平面投影的夹角，$0 \leqslant \phi < 2\pi$；同样可以发现：

r = 常数是一个以原点 O 为圆心，r 为半径的球面。

θ = 常数是一个以原点 O 为顶点的圆锥面。

ϕ = 常数是一个以 z 轴为边界的半平面。

4. 三种坐标系之间的转换

（1）直角坐标系系与圆坐标系之间的转换关系：

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctan\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

（2）直角坐标系与球坐标系之间的转换关系：

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos\dfrac{z}{r} \\ \phi = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

(3) 圆柱坐标系与球坐标系之间的转换关系:

$$\begin{cases}\rho = r\sin\theta \\ z = r\cos\theta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ z = \arctan\dfrac{\rho}{z}\end{cases}$$

1.1.3 场的基本概念

一个场是一个函数,它描述在空间一定区域所有点的一个物理量。物理量可能是一个标量或者是一个矢量。如果这个物理量是数量,称这个场是标量场;若这个量是矢量,称这个量是矢量场。如果场不随时间变化,称这个场是静态场,或者是时不变场;随时间变化的场称为时变场。

1. 标量场的梯度

若在标量场 $u(P)$ 中的一点 P 处,存在这样一个矢量 $\boldsymbol{M}$,其方向为函数 $u(P)$ 在 P 点处变化率最大的方向,其模也正好是这个最大变化率的数值,则称矢量 $\boldsymbol{M}$ 为函数 $u(P)$ 在点 P 处的梯度,记作 $\mathrm{grad}\ u$,即 $\mathrm{grad}\ u = \boldsymbol{M}$

在不同的坐标系中梯度的表达式有所不同,如下:

$$\begin{cases}\mathrm{grad}u == \nabla u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{a}_x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{a}_y + \dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{a}_z\text{(直角坐标系)} \\ \mathrm{grad}u == \nabla u = \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_\rho + \dfrac{\partial u}{\rho\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi + \dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{a}_z\text{(圆柱坐标系)} \\ \mathrm{grad}u == \nabla u = \dfrac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{a}_r + \dfrac{\partial u}{r\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta + \dfrac{\partial u}{r\sin\theta\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi\text{(球坐标系)}\end{cases}$$

1) 梯度具有的性质

(1) 方向倒数等于梯度在该方向上的投影,即$\dfrac{\partial u}{\partial l} = \mathrm{grad}_l u$。

(2) 数量场 $u(P)$ 中每一点 P 处的梯度,垂直于过该点的等值面,且指向函数 $u(P)$ 增加率最大的方向。

(3) 一个标量场的梯度构成一个矢量场。

(4) 一个单值标量场的梯度是一个保守的矢量场,即一个单值标量场梯度的线积分 $\int_C \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 仅与曲线的起止点有关,而与曲线 C 的形状无关。

(5) 梯度矢量的旋度恒等于 0,即 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ u) = \nabla\times\nabla u = 0$。

2) 梯度运算的基本公式

(1) $\mathrm{grad}\ u = 0$(c 为常数)

(2) $\mathrm{grad}(cu) = c\mathrm{grad}\ u$($c$ 为常数)

(3) $\mathrm{grad}(u \pm v) = \mathrm{grad}u \pm \mathrm{grad}v$

(4) $\mathrm{grad}(uv) = u\mathrm{grad}v + v\mathrm{grad}u$

(5) $\mathrm{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{1}{v^2}(v\mathrm{grad}u - u\mathrm{grad}v)$

(6) $\mathrm{grad}f(u) = f'(u)\mathrm{grad}(u)$

3）标量场梯度的物理意义

在空间中任意一点，标量场梯度的方向是该点标量场场量增加最快的方向，它的模是由该点向各个不同方向移动时，场量可能有的最大增加率。标量场的梯度就是标量场的场量空间变化度（矢量）。

2. 矢量场的散度

1）散度

对于矢量场$\boldsymbol{A}$的定义域中的任何一点P，假设有一个包围它的闭合曲面S，S所包围的体积为ΔV，则矢量场$\boldsymbol{A}$在P点的散度即为ΔV向P点收缩而趋向于零时，矢量场$\boldsymbol{A}$穿出闭合曲面S的净通量与ΔV比值的极限。$\boldsymbol{A}$的散度记作$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$。$\boldsymbol{A}$在$P$点的散度定义可以用数学公式描述如下：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}(P) \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{A}(P) = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\Delta V}$$

因为P点是任意点，可以将P点略去，即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\Delta V}$$

散度在三种坐标系中的表达式：

（1）直角坐标系：$\mathrm{div}\boldsymbol{A} \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

（2）圆柱坐标系：$\mathrm{div}\boldsymbol{A} \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

（3）球坐标系：$\mathrm{div}\boldsymbol{A} \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$

2）矢量场散度的性质

（1）一个矢量场的散度在空间构成一个标量场。

（2）矢量场的散度反映了矢量场在空间各点的净通量的状态。

（3）矢量场的散度具有矢量场通量体密度的量纲。

3）矢量场散度运算的基本公式

（1）$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \nabla\cdot\boldsymbol{A} + \nabla\cdot\boldsymbol{B} = \nabla\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})$

（2）$\nabla\cdot(f\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\cdot\nabla f + f\nabla\cdot\boldsymbol{A}$（式中：$f$为线性函数）

（3）$\nabla\cdot(c\boldsymbol{A}) = c\nabla\cdot\boldsymbol{A}$（式中：$c$为常数）

矢量场散度的物理意义：矢量场在空间一点的散度是矢量场在该点的通量源密度。

高斯定理：设在空间中有一封闭曲面S，它所包围的空间体积为V。如果矢量场$\boldsymbol{A}$在S和V上都是连续可导的，则下面的等式成立：

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V$$

高斯定理建立了一个矢量场通过闭合曲面发出的净通量与矢量场在曲面内的通量源之间的关系。

3. 矢量场的旋度

1）旋度

在矢量场$\boldsymbol{A}$的定义区域中，设P点在一个小面元Δa上，Δa的边界是闭合曲线C，C的走向与Δa法线$\boldsymbol{e}_n$的方向成右手螺旋，则矢量$\boldsymbol{A}$在P点的旋度在$\boldsymbol{e}_n$方向上的分量就等于$\boldsymbol{A}$在C上环流量与Δa之比当Δa向P点收缩而趋向于0时的极限。

$\boldsymbol{A}$的旋度用curl$\boldsymbol{A}$（也有用rot$\boldsymbol{A}$）或者$\nabla\times\boldsymbol{A}$表示。用数学表示式可以写为

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{A}(P)\cdot\boldsymbol{i}_n = \nabla\times\boldsymbol{A}(P)\cdot\boldsymbol{i}_n = \lim_{\Delta a\to 0(P)}\frac{\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\Delta a}$$

旋度在三种坐标系中的表示式：

（1）直角坐标系：

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{A}(P) = \nabla\times\boldsymbol{A}(P) = \left(\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_z$$

（2）圆柱坐标系：

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{A}(P) = \nabla\times\boldsymbol{A}(P) = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial\rho}-\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right)\boldsymbol{a}_z$$

（3）球坐标系：

$$\begin{aligned}\mathrm{curl}\boldsymbol{A}(P) &= \nabla\times\boldsymbol{A}(P)\\ &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(A_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta +\\ &\quad \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi\end{aligned}$$

2）矢量旋度的性质

（1）一个矢量场的旋度构成一个新的矢量场。

（2）空间中，矢量场旋度不为零的点可以在过该点的平面上围绕该点的闭合曲线，产生不为零的矢量场环流量，即旋度不为零的点有产生矢量场环流的能力。

（3）旋度具有环流量密度的量纲

3）矢量场旋度运算的基本公式

（1）$\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{B} = \nabla\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})$

（2）$\nabla\times(f\boldsymbol{A}) = \nabla f\times\boldsymbol{A}+f\nabla\times\boldsymbol{A}$

（3）$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0$

（4）$\nabla\times(\nabla f) = 0$

（5）$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$

矢量场旋度的物理意义：一个矢量场的旋度就是该矢量场的环流原密度，或称为涡旋源密度。

斯托克斯定理：如果在矢量场$\boldsymbol{A}$的良态区域中有一条闭合曲线C和以C为边界的一个曲面S，则有下列等式成立：

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

这个定理建立了矢量环流量与环流源之间的关系。

1.1.4　自由空间中的电磁场定律

自由空间中的电磁场定律有以下五个。

法拉第电磁感应定律：$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \mu_0\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$

修正的安培环路定律：$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$

电场高斯定律：$\oint_S \varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int_V \rho\mathrm{d}V = Q_{\mathrm{net}}$

磁场高斯定律：$\oint_S \mu_0\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} = 0$

电荷守恒定律：$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\mathrm{d}V = -\dfrac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{net}}}{\mathrm{d}t}$

1.2　重点难点突破

1.2.1　矢量运算

矢量运算与标量运算存在很大的差异。整个思路应该发生一个变化，即矢量不仅有大小，还应该具有方向。即使两个矢量大小相同，如果方向不同，那么这两个矢量也是完全不同的。

叉积与点积的区别：关键一点是叉积的结果还是一个矢量，而点积的结果是标量。

矢量运算是整个电磁学的基础数学方法。如果不能很好地掌握矢量运算，那么在以后的学习过程中必然会举步维艰。学习矢量运算最好的办法是勤于练习。多做一些题目，掌握原理，不但要会解题，关键是掌握解题的思路，这才是最重要的。

1.2.2　自由空间电磁场定律的意义

(1) 法拉第电磁感应定律的意义。在自由空间中，沿一条闭合路径的电动势等于与该路径交链的磁通量（穿过以闭合路径为边界的任何一个曲面的磁通量）的减少率（对时间变化率的负导数）。也就是说，时变的磁场可以产生涡旋的电场。

(2) 修正的安培环路定律的意义。在自由空间中，由一个闭合曲面内穿出的电通量等于曲面所包围的全部体积内的净电荷量。

(3) 磁场高斯定律的意义。在自由空间中，由任何一个闭合曲面内穿出的净磁通量都为零，也就是说，不存在磁通密度矢量的源——磁荷。

(4) 电荷守恒定律的意义。对于一个体积为 V，外表面为 S 的系统，只有当有电荷进出时，系统内的净电荷量才会发生改变；若系统与外界没有电荷交换，则系统内的净电荷量是不会变化的。