

有向图的理论、算法及其应用

〔丹〕 J.邦詹森 〔英〕 G.古 廷 著

姚 兵 张忠辅 译



科学出版社
www.sciencep.com

现代数学译丛 7

有向图的理论、算法及其应用

〔丹〕J. 邦詹森 〔英〕G. 古廷 著

姚 兵 张忠辅 译



科学出版社

北 京

图字: 01-2007-3537 号

内 容 简 介

本书作者从近 30 年关于有向图理论研究的数千篇论文中精选了具有理论意义、重要算法及其实际应用的结果,涵盖了有向图理论中从最基本到较为高深的重要专题。主要内容有:有向图的基本知识和理论、连通性、图的定向、网络流、哈密尔顿性的深入研究、有向图的路和圈、子模流、竞赛图的推广以及有向图的推广、Menger 定理和 NP 完全问题等。书中介绍了有向图研究中数十个未解决的问题和猜想,尽可能为读者在主要方向上提供最新的研究成果。对于计算机科学领域的学者来说,书中的大量算法以及实际应用的例子提供了难得的帮助。此外,配备了练习题 700 多道、方便查询的参考文献 762 篇,以及记号和术语索引等。

本书适合数学及应用数学、离散数学、运筹学、计算机科学等专业的本科生、研究生、教师及研究人员阅读,也可供人工智能、社会科学以及工程技术人员参考。

Translation from the English Language edition:

Digraphs by Jorgen, Bang-Jensen; Gregory Gutin

Copyright © 2002 Springer-Verlag London, Limited.

Springer is a part of Springer Science+Business Media

All Rights Reserved

图书在版编目(CIP)数据

有向图的理论、算法及其应用/(丹)J. 邦詹森, (英)G. 古廷著; 姚兵, 张忠辅译. —北京: 科学出版社, 2009

(现代数学译丛; 7)

ISBN 978-7-03-022804-8

I. 有… II. ①邦… ②古… ③姚… ④张… III. 有向图 IV. O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 124261 号

责任编辑: 赵彦超 / 责任校对: 刘小梅

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 1 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2009 年 1 月第一次印刷 印张: 42 3/4

印数: 1—2 500 字数: 835 000

定价: 99.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

前 言

图论是离散数学中普及最广的学科之一,不仅是由于它自身理论的迅速发展,而且是因为它在实际中有着大量的重要应用.近几十年来的许多深刻的理论结果也导致了图论学科的快速成长.然而,作为一个研究领域,图论仍然还是一门相对年轻的学科.

图的理论可以分为无向图理论和有向图理论两大分支.虽然这两大理论分支有着大量且重要的应用,但由于诸多的原因,无向图比有向图得到更为广泛的研究.首先因为无向图在一定程度上是有向图的一个特殊类(对称有向图),所以,凡能够表述为无向图和有向图的问题通常用有向图的方法解决较为容易;另一个原因是,不像无向图的情形,除了几本重要的书包含两类图的传统和近期的结果,近 25 年来没有一本专门介绍关于有向图研究的完整结果的著作.在一般的教科书中,大多数作者用一章来讲述有向图,或者只有少量的有向图基本知识与结论.

尽管如此,在近 30 年中,有向图理论还是得到了长足的发展.超过 3000 篇的研究论文不仅涵盖了具有理论意义的结果,而且包括了重要的算法及其应用.为了实际的需要,本书概括了有向图的基本知识,并从深层次的角度介绍了理论和算法这两个方面的研究成果及应用.

本书竭力为专题研究填补文献与实用手册间的沟壑.书中的基本内容是针对具有大学数学基础知识的读者,然后在几个研究领域(包括连通性、图的定向、子模流、有向图的路和圈、竞赛图的推广以及有向图的推广等)的主要方向上逐步到达最新的研究成果.我们为本书配备了超过 700 道练习题、大量应用以及适宜讨论的专题.对于我们所期望的不同群体的读者(研究生、本科生、离散数学研究者、计算机科学中各个领域的研究者、运筹学研究、人工智能、社会科学以及工程技术人员等)来说,书中所有的专题不可能对全体读者均有同等的意义.然而,我们相信,每位读者都能从这本书里找到吸引自己的有趣专题.

显然,本书不可能是关于有向图的百科全书,但是,我们尽可能地提供了许多有意义的结论.书中数量众多的证明和技巧为读者详细地说明了有向图理论和算法中所使用的各种各样的方法和手段.

强调算法是本书最主要的特色之一,而这一点却在一些图论书中被遗憾地省略.首先,算法常常在不少领域的研究中扮演着重要的角色,尤其是在计算机科学和数值计算的研究中.其次,(有向)图的许多问题本身就是算法问题,因此我们尽可能给出许多结论的构造性证明.利用这些构造性证明,读者就可以从所研究的问

题中提取一些有效的算法。虽然本书描述了许多算法,但鉴于篇幅限制,我们没有提供全部必需的细节以使得读者能够正确地运用这些算法。这属于计算科学的范畴(常常是极为不平凡的工作),建议读者去阅读数据结构方面的书籍。

本书的另一个重要的特色是精选了数量可观的练习题,它们不仅可以帮助读者理解,而且可以使读者能够通过大量的材料吃透书中所介绍的内容。尝试解决这些习题(绝大部分是在本书中第一次出现)将有助于读者掌握所学的专题以及主要的研究技巧。

通过从易到难的广泛而不间断地学习和训练,对于一些专门的问题,如(有向)图论、组合优化和图算法,读者将会发现本书的作用。此外,本书也可以应用于某些热门课题,如流、圈和连通性等。书中含有大量的解说,以帮助读者读懂不易理解的概念和深奥的证明。

出于使这本书成为一个便捷的研究参考书或大学教科书的考虑,我们增添了综合性的记号和术语索引。可以确信,详细的术语索引能够帮助读者找到所需要的对象而不必通读整个章节。特别地,书后的索引列出了许多关于公开问题和猜想的条目。本书所讨论的每一类有向图均拥有自己的条目,即在讨论这类图的主要页上。作为次条目,例如证明技巧条目,我们编制了不同证明技巧的索引,并标注出这些技巧所在的页码。

本书涵盖了有向图的从相当基本到较高深范围的主要且重要的专题。根据我们的经验,这本书在今后的几十年内将有助于教学和参考文献搜索。我们在下面通过叙述一些重要的内容给出本书的轮廓,需要详细信息的读者可以参见目录或书后的术语索引。

第1章包括了本书所使用的大部分术语、记号以及一些基本结论,它们不仅在其他章节中被频繁地使用,而且被用作解释有向图的概念。进而,我们还将介绍几个基于这些结论的有向图的应用,并在本章的末尾处给出一个具体的应用。关于算法及其复杂性的基本概念也在这一章里一并介绍。依据综合性术语和记号索引,读者不必读完整个第1章后才进入其他章节的阅读与学习。

第2章和第3章讨论距离和网络中的流。尽管这两个专题的概念是最基本的,然而,有向图中距离以及网络流的理论和算法特征却是相当重要的,因为它们对有向图的其他理论问题和大量实际问题有着高度的可应用性,尤其是作为强有力的模型工具。

关于距离,我们首先介绍赋权和未赋权有向图中最短路问题以及几个传统算法。第2章的主要内容是有向图中距离参数的最小化和最大化。我们将用下列问题结束这一章:单行道问题、闲话问题、指数邻集局部搜索,并介绍一个关于组合优化问题寻找近似优化解的方法。

第3章给出有关网络流的基本内容以及高级专题,介绍几个可适用于最大流

问题、可行流和循环、网络中的最小费用流以及流应用的算法。同时,介绍关于线性规划初对偶算法,并将其应用到运输问题中。虽然也有关于流的综合性书籍,我们坚信短小而极为详细的专题将给读者传授大量的有效知识。掌握了这一章中所介绍的技巧,读者就具备了解决一些实际问题的能力。

第4章的内容涉及几类重要的有向图。例如,线有向图、de Bruijn 有向图、Kautz 有向图、系列平行有向图、竞赛图的推广以及平面有向图等。我们将专注于这几类图的特征、识别以及分解,它们的许多性质将在本书的其余章节中加以详细地研究。

第5章介绍有向图的哈密尔顿路和哈密尔顿圈存在性的大量结果,给出了支撑路和圈组的存在性特征,尤其是 Gallai-Millgram 定理以及 Yeo 不可约圈因子定理。关于哈密尔顿问题,我们将给出一系列“收敛”于哈密尔顿性的必要条件。本章的许多结论是针对竞赛图的,读者将会看到几个相当大的图类与竞赛图共同拥有的优美性质。特别地,对于这些图中的绝大部分图来说,哈密尔顿路和哈密尔顿圈问题是多项式可解的。此外,本章还要介绍证明哈密尔顿性质的几个方法(如多重插入技巧等)。

第6章为读者介绍大量有关哈密尔顿性的有价值的专题,其中包括具有预先指定端点的哈密尔顿路、泛圈性、竞赛图中哈密尔顿路和哈密尔顿圈的定向以及寻找强有向图中最小规模的强支撑有向子图等。我们用 Havet 和 Thomassé 得到的一个有关哈密尔顿路定向的 Rosenfeld 猜想的证明作为本章的主要内容,并设计了一个在竞赛图中寻找具有预先指定端点哈密尔顿路的多项式算法。作为本章的结束,我们将简要地介绍一个近似算法的新方法——支配分析,并通过将有向图中哈密尔顿圈的结果应用于旅行售货员问题来说明这一方法。

(有向)图的连通性是一个非常重要的专题,这个研究领域包含了大量深刻而优美的结论,也包括了在一般的数学和图论以及其他研究领域中的应用。在第7~9章中,我们介绍连通性专题的综合性结论,这些结论几乎囊括了全连通性、图的定向以及局部连通性的研究。

第7章首先介绍耳朵分解和著名的 Menger 定理这些重要而基本的内容,然后逐步过渡到较高级的研究课题,例如论证连通性、最小 k (弧) 强有向图的性质、有向图的高连通定向、在有向图中拼装有向割等。本章将介绍 Mader 和 Lovász 的撕裂技巧,并运用 Frank 的一个算法解释撕裂技巧的重要作用,该算法是寻找给有向图 D 添加最小基数的新弧集,从而产生预先指定数目的弧强连通性。对于寻找 k (弧) 强连通性的一个小认证问题,我们将介绍最近由 Cheriyan 和 Thurimella 为 Mader 的结论给出的一个关于最小 k (弧) 强有向图的应用。这一章的不少证明中所使用的重要技巧向读者表明它们是基于定义在有向图上的度函数的子模性。

第8章概括了无向图和混合图定向的重要特征,其中也包括一些有向图类的底图。无处零整流是流的一个特殊情形,讨论无向图(边)着色将涉及到 Tutte 的

5 流猜想, 此猜想是图论中未解决的重要问题之一. 本章要介绍保持弧强高度连通定向中著名的 Nash-Williams 定理, 并且用撕裂技巧处理一致弧强连通的弱版本. 子模流形成网络中循环的一个强有力的推广. 这一章将详细介绍子模流, 并解释如何使用这个工具得到图论中许多结果的 (算法) 证明 (包括 Lucchesi-Younger 定理、Nash-Williams 定向定理的一致性版本). 最后, 我们要介绍一个由 Frank 给出的应用, 它是关于定向混合图问题的子模流应用, 从而达到保持预先指定的弧强连通性.

第 9 章处理有向图中 (弧) 不交的路和 (弧) 不交的树问题, 并给出 2 路问题对任意有向图是 $\mathcal{NP}$ 完全的证明, 但对无圈有向图 2 路问题却是多项式可解的. 本章还要讨论平面有向图、欧拉有向图、几类竞赛图推广中的路链接问题, 证明关于弧不交分枝的 Edmonds 定理以及该重要结果的几个应用. 在赋权有向图中寻找最小费用出分枝问题推广了最小支撑树问题, 我们介绍 Frank 为寻找如此出分枝所给出的 Fulkerson 2 阶段贪婪算法的扩张.

第 10 章的结论是关于有向图中 (一般的) 非哈密尔顿圈、圈空间、寻找 “算法” 长度的路和圈的多项式算法、不交圈和反馈集 (包括 Reed, Robertson, Seymour 和 Thomas 解决 Younger 猜想的一个方案)、Markov 链在有向图中圈的应用、偶圈问题 (包括 Thomassen 偶圈定理). 本章也介绍了多部分竞赛图中的最短圈、有向图的围长、圈的弦以及 Ádám 猜想. 在这一章中, 我们尽力为读者展示各种各样的证明技巧, 包括一些代数、算法、组合和概率方法等.

在第 11 章中, 考虑了两种不同的可以推广有向图的方法, 即边着色图和超有向图. 边着色图中的交错 2 边着色图推广了二部分有向图中圈的概念. 一些关于二部分有向图中圈的结果是边着色完全图的特殊情形, 如哈密尔顿二部分竞赛图的特征. 还有几个其他方面的应用, 尤其是使用关于二部分竞赛中哈密尔顿圈的结论证明了 2 边着色完全图的特征是具有一个交错哈密尔顿圈. 本章给出交错哈密尔顿圈在遗传学上的一个应用. Camion, Landall 和 Redéi 把传统的定理推广到超竞赛图中.

第 12 章的专题是没有出现在前面诸章节中的一些重要内容, 即 Seymour 第二邻集猜想在竞赛图情形下的一个初等证明、各种类型的配对比较有向图顶点的序、核、最近由 Galvin 使用有向图核证明的关于列表着色的 Dinitz 猜想, 以及同态 (着色的一个漂亮推广, 是研究介于 $\mathcal{P}$ 问题和 $\mathcal{NP}$ 完全问题边缘的一个有用的工具). 本章介绍拟阵的基本概念和涉及拟阵算法有效性的问题, 并简要地介绍模拟退火算法, 这是一个广泛应用的亚直观探索方法, 运用它能够得到优化问题的近似优化解, 尤其是对有向图. 同时, 我们也简要地讨论如何运行、调整模拟退火算法以产生较好的解.

说明

我们尝试把所有习题按它们的预设难度进行分类. 对于一部分习题, 我们按照难度的增加分别用 $(-)$, $(+)$ 和 $(++)$ 标注. 大部分习题并没有被标注, 这表明它们的难度适中. 标有 $(-)$ 的习题并不需要对主要定义和结论过多的理解, 标有 $(+)$ 的习题则需要不平凡思路, 或者要付出一定的努力. 只有少量的习题标注为 $(++)$, 需要深刻的思想和艰苦的工作. 实际上, 这种标注是出于我们个人的对于题目难度的评估, 供广大读者参考. 有些习题开始的句子用黑体字是为了引起读者的注意, 我们的用意是指明这些习题包括书中没有详细讨论的重要而有用的结论. 在证明的末尾我们加上记号 “□”, 说明再没有进一步的证明要给出或留作习题. 书中少量部分的内容需要线性规划的基础知识, 特别是对偶定理, 还需要少许的概率论知识.

我们将非常感谢对本书的评价和建议, 请用 email 发送到 jbjimada.sdn.dk. 我们为本书的印刷错误和其他信息设立了一个网页:

<http://www.imada.sdu.dk/Research/Digraphs>

致谢

我们对下列给予本书不同版本手稿提出建议和帮助的同行致以诚挚的感谢:

Adrian Bondy, Thomas Böhme, Samvel Darbinyan, Reinhard Diestel, Odile Favaron, Herbert Fleischner, András Frank, Vladimir Gurvich, Frédéric Havet, Bill Jackson, Hao Li, Martin Loeb, Wolfgang Mader, Crispin Nash-Williams, Jarik Nešetřil, Gert Sabidussi, Paul Seymour, Alexander Schrijver, Stéphan Thomassé, Carsten Thomassen, Bjarne Toft and Ke-Min Zhang.

我们对下列阅读本书并提供有价值的增添内容的同行致以特别的致谢: Noga Alon, Alex Berg, Jens Clausen, Charles Delorme, Yubao Guo, Jing Huang, Alice Hubenko, Tommy Jensen, Tibor Jordán, Thor Johnson, Ilia Krasikov, Gary MacGillivray, Steven Noble, Erich Prisner, Eng Guan Tay, Meike Tewes, Lutz Volkmann and Anders Yeo.

当然, 我们对于书中难免存在的错误负有责任.

十分感谢英国伦敦 Springer-Verlag 出版社, 尤其是 David Anderson, Karen Barker, Beverly Ford, Stephanie Harding, Sally Tickner 以及 Nicolas Wilson 给予我们的帮助和支持. 同时, 也要感谢 Springer 出版社的匿名审稿人对于我们的方案和建议给予的极富帮助的鼓励和反馈意见.

非常感谢南丹麦大学数学与计算机科学系的同事和技术人员给予的鼓励和帮助以及系里给予的财政支持. 特别感谢 Andrew Swann 对于我们的手稿编排格式的帮助. 感谢丹麦国家研究院给予我们的财政支持 (第 9701393 号). 最重要的是感

谢我们的家庭, 尤其是我们的妻子 Lene 和 Irina, 没有她们始终如一的支持, 我们是不可能完成这个项目的.

J. 邦詹森 丹麦欧登塞

G. 古廷 英国伦敦

2000 年 8 月

目 录

第 1 章 基本术语及结论	1
1.1 集合、子集、矩阵和向量	1
1.2 有向图、有向子图、邻集和度数	2
1.3 有向图的同构及其基本运算	6
1.4 途径、迹、路、圈和路圈有向子图	10
1.5 强连通性和单侧连通性	15
1.6 无向图、双定向和定向性	17
1.7 混合图和超图	21
1.8 有向图和无向图的分类	23
1.9 算法简介	26
1.9.1 算法及其复杂性	26
1.9.2 $\mathcal{NP}$ 完全问题和 $\mathcal{NP}$ 困难问题	30
1.10 应用: 求解 2 可满足性问题	32
1.11 习题	35
第 2 章 距离	40
2.1 关于距离的术语和记号	40
2.2 最短路结构	42
2.3 寻找有向图距离的算法	44
2.3.1 宽度优先搜索 (BFS)	44
2.3.2 无圈有向图	46
2.3.3 Dijkstra 算法	47
2.3.4 Bellman-Ford-Moore 算法	48
2.3.5 Floyd-Warshall 算法	51
2.4 半径、出半径和直径之间的不等式	52
2.4.1 强有向图的半径和直径	52
2.4.2 出半径和直径的极值	53
2.5 定向图的最大有限直径	54
2.6 多重图定向的最小直径	55
2.7 完全多重图的最小直径定向	59
2.8 图扩张的最小直径定向	61

2.9 笛卡儿积图的最小直径定向	63
2.10 有向图中的王	66
2.10.1 竞赛图的 2 王	66
2.10.2 半完全多部分有向图中的王	66
2.10.3 广义竞赛图中的王	68
2.11 应用: 单行道问题和闲话问题	69
2.11.1 单行道问题和有向图的定向	69
2.11.2 闲话问题	71
2.12 应用: 旅行售货员问题的指数邻集局部搜索	72
2.12.1 TSP 局部搜索	72
2.12.2 TSP 的线性时间可搜索指数邻集	74
2.12.3 分配邻集	75
2.12.4 关于 TSP 的邻集结构有向图的直径	76
2.13 习题	78
第 3 章 网络流	82
3.1 定义及基本性质	82
3.1.1 流及流平衡向量	83
3.1.2 剩余网络	85
3.2 网络模型的简约	86
3.2.1 消除下界	86
3.2.2 单源单收点网络	86
3.2.3 循环	87
3.2.4 顶点上有费用及下界的网络	88
3.3 流分解	90
3.4 讨论剩余网络	91
3.5 最大流问题	93
3.5.1 Ford-Fulkerson 算法	96
3.5.2 最大流与线性规划	98
3.6 寻找最大 (s, t) 流的多项式算法	99
3.6.1 沿最短增广路的流增广	99
3.6.2 在分层网络和 Dinic 算法中的块化流	100
3.6.3 前置流推进算法	101
3.7 单位容量网络和简单网络	105
3.7.1 单位容量网络	106
3.7.2 简单网络	107

3.8 循环与可行流	108
3.9 最小值可行 (s, t) 流	110
3.10 最小费用流	111
3.10.1 刻画最小费用流	113
3.10.2 创建最优化解	116
3.11 流的应用	118
3.11.1 二部分图的最大匹配	118
3.11.2 有向中国邮递员问题	121
3.11.3 寻找具有预先指定度的有向子图	123
3.11.4 有向多重图的路圈因子	124
3.11.5 覆盖指定顶点的圈有向子图	126
3.12 分配问题和运输问题	127
3.13 习题	136
第 4 章 有向图类	148
4.1 深度优先搜索	148
4.2 无圈有向图中的顶点无圈序	151
4.3 可传递有向图、可传递闭包和简约	153
4.4 强有向图	155
4.5 线有向图	158
4.6 de Bruijn 有向图和 Kautz 有向图及其特征	162
4.7 系列平行有向图	165
4.8 拟可传递有向图	169
4.9 路重合性质和路可重合有向图	171
4.10 局部入半完全有向图和局部出半完全有向图	173
4.11 局部半完全有向图	175
4.11.1 圆有向图	175
4.11.2 非强局部半完全有向图	179
4.11.3 强圆可分解局部半完全有向图	181
4.11.4 局部半完全有向图类	183
4.12 全 Φ_i 可分解有向图	185
4.13 相交有向图	187
4.14 平面有向图	189
4.15 应用: 高斯消去法	191
4.16 习题	193

第 5 章 哈密尔顿性及其相关问题	196
5.1 有向图哈密尔顿性的必要条件	197
5.1.1 路收缩	197
5.1.2 拟哈密尔顿性	198
5.1.3 伪哈密尔顿性和 1 拟哈密尔顿性	200
5.1.4 关于伪哈密尔顿性和拟哈密尔顿性的算法	201
5.2 路覆盖数	201
5.3 无圈有向图的路因子及其应用	203
5.4 路可重合有向图的哈密尔顿路与圈	204
5.5 局部入半完全有向图的哈密尔顿路和圈	205
5.6 具有度约束条件的有向图的哈密尔顿圈和路	207
5.6.1 充分性条件	207
5.6.2 多重插入技巧	211
5.6.3 定理 5.6.1 和定理 5.6.5 的证明	213
5.7 半完全多部分有向图中的最长路和最长路圈	215
5.7.1 基本结论	215
5.7.2 良圈因子定理	217
5.7.3 引理 5.7.12 的推论	220
5.7.4 Yeo 不可约圈有向子图定理及其应用	222
5.8 扩张局部半完全有向图的最长路和最长圈	226
5.9 拟可传递有向图中的哈密尔顿路和圈	227
5.10 拟可传递有向图中顶点最重路和最重圈	230
5.11 有向图类的哈密尔顿路和圈	234
5.12 习题	236
第 6 章 深入研究哈密尔顿性	241
6.1 具有预先指定起 (终) 点的哈密尔顿路	242
6.2 弱哈密尔顿连通有向图	243
6.2.1 关于扩张竞赛图的结论	244
6.2.2 关于局部半完全有向图的结论	248
6.3 哈密尔顿连通有向图	251
6.4 在半完全有向图中寻找 (x, y) 哈密尔顿路	253
6.5 有向图的泛圈性	256
6.5.1 度约束有向图的 (顶点) 泛圈性	256
6.5.2 扩张半完全有向图和拟可传递有向图的泛圈性	257
6.5.3 泛局部半完全有向图和顶点泛局部半完全有向图	260

6.5.4 关于图泛圈性的其他结果	263
6.5.5 有向图的圈可扩张性	264
6.6 弧泛圈性	265
6.7 包含或避开预先指定弧的哈密尔顿圈	267
6.7.1 包含预先指定弧的哈密尔顿圈	268
6.7.2 避开预先指定弧的哈密尔顿圈	270
6.7.3 避开 2 圈中弧的哈密尔顿圈	272
6.8 弧不交的哈密尔顿路和圈	273
6.9 定向的哈密尔顿路和圈	275
6.10 用少量圈覆盖一个有向图的全部顶点	280
6.10.1 具有固定圈数目的圈因子	280
6.10.2 关于路和圈的支撑结构中 $\alpha(D)$ 的作用	282
6.11 最小强支撑有向子图	283
6.11.1 关于一般有向图的一个下界	284
6.11.2 关于扩张半完全有向图的 MSSS 问题	285
6.11.3 关于拟可传递有向图的 MSSS 问题	286
6.11.4 可分解有向图的 MSSS 问题	287
6.12 应用: TSP 直观探索法的控制数	288
6.13 习题	290
第 7 章 全连通性	294
7.1 附加的概念和预备知识	295
7.2 耳朵分解	297
7.3 Menger 定理	300
7.4 应用: 确定弧强连通度和顶点强连通度	303
7.5 撕裂运算	305
7.6 最优化增长弧强连通性	309
7.7 最优化增长顶点强连通性	312
7.7.1 单行对	313
7.7.2 最优化的 k 强增广	315
7.7.3 特殊类有向图	316
7.7.4 保持 k 强连通性的撕裂	318
7.8 弧强连通性的一个推广	320
7.9 弧反转和顶点强连通性	322
7.10 最小 k (弧) 强有向多重图	325
7.10.1 最小 k 弧强有向多重图	326

7.10.2 最小 k 强有向图	329
7.11 临界 k 强有向图	333
7.12 弧强连通性与最小度	334
7.13 特殊类有向图的连通性性质	335
7.14 有向图的高连通定向	337
7.15 拼装割集	341
7.16 应用: 关于 k (弧) 强连通性的小认证	344
7.16.1 寻找强连通性的小认证	345
7.16.2 寻找 k 强认证 ($k > 1$)	346
7.16.3 关于弧强连通性认证	348
7.17 习题	349
第 8 章 图的定向	353
8.1 几类有向图的底图	353
8.1.1 可传递有向图和拟可传递有向图的底图	353
8.1.2 局部半完全有向图的底图	356
8.1.3 正常循环弧图的局部竞赛图定向	358
8.1.4 局部入半完全有向图的底图	360
8.2 快速识别局部半完全有向图	364
8.3 无偶圈定向	367
8.4 图的着色与定向	369
8.5 定向与无处零整流	371
8.6 达到高弧强连通性的定向	375
8.7 具有度约束的定向	378
8.7.1 具有预先指定度序列的定向	378
8.7.2 对顶点子集的限制	382
8.8 子模流	383
8.8.1 子模流模型	383
8.8.2 可行子模流的存在性	385
8.8.3 最小费用子模流	388
8.8.4 子模流的应用	388
8.9 混合图的定向	392
8.10 习题	396
第 9 章 不交路和不交树	402
9.1 补充定义	403
9.2 不交路问题	403

9.2.1 k 路问题的复杂性	404
9.2.2 有向图是 k 链接的充分性条件	408
9.2.3 无圈有向图的 k 路问题	410
9.3 竞赛图和广义竞赛图的链接问题	413
9.3.1 具有 (局部) 连通性的充分性条件	413
9.3.2 半完全有向图的 2 路问题	417
9.3.3 广义竞赛图的 2 路问题	418
9.4 平面有向图的链接问题	421
9.5 弧不交分枝	424
9.5.1 Edmonds 分枝定理的重要性	426
9.6 边不交的混合分枝	429
9.7 弧不交的路问题	430
9.7.1 无圈有向多重图中弧不交的路	432
9.7.2 欧拉有向多重图中弧不交的路	433
9.7.3 竞赛图和广义竞赛图中弧不交的路	438
9.8 整多物品流	441
9.9 弧不交的分枝和入分枝	442
9.10 最小费用分枝	447
9.10.1 拟阵相交的表述	447
9.10.2 有关最小费用分枝问题推广的一个算法	448
9.10.3 最小覆盖树形图问题	453
9.11 添加新弧以增加有根弧强连通性	455
9.12 习题	456
第 10 章 有向图的圈结构	462
10.1 有向图的向量空间	462
10.2 关于路和圈的多项式算法	466
10.3 不交圈和反馈弧集	469
10.3.1 不交圈和反馈集问题的复杂性	469
10.3.2 最大出度至少为 k 的有向图中不交圈	470
10.3.3 有向图的反馈集和线性序	472
10.4 不交圈对反馈集的比较	476
10.4.1 参数 ν_i 和 τ_i 的关系	476
10.4.2 Younger 猜想的解决	477
10.5 应用: Markov 链的周期	480
10.6 模 p 下的 k 长圈	482

10.6.1	模 p 下 k 长圈存在性问题的复杂度	482
10.6.2	模 p 下 k 长圈存在的充分性条件	483
10.7	半完全多部分有向图中的“短”圈	486
10.8	半完全多部分有向图中圈对路的比较	489
10.9	围长	493
10.10	有关圈的补充专题	495
10.10.1	圈的弦	495
10.10.2	Ádám 猜想	496
10.11	习题	498
第 11 章	有向图的推广	501
11.1	边着色多重图中的正常着色迹	501
11.1.1	正常着色欧拉迹	503
11.1.2	正常着色圈	506
11.1.3	边着色多重图的连通性	509
11.1.4	边着色二部分多重图的交错圈	512
11.1.5	2 边着色完全多重图的最长交错路和圈	514
11.1.6	c 边着色完全图中正常着色哈密尔顿路 ($c \geq 3$)	520
11.1.7	c 边着色完全图中正常着色哈密尔顿圈 ($c \geq 3$)	521
11.2	弧着色有向多重图	525
11.2.1	交错有向圈问题的复杂性	526
11.2.2	函数 $f(n)$ 和函数 $g(n)$	529
11.2.3	弱欧拉弧着色有向多重图	531
11.3	超竞赛图	532
11.3.1	超竞赛图的出度序列	533
11.3.2	哈密尔顿路	534
11.3.3	哈密尔顿圈	535
11.4	应用: 遗传学中的交错哈密尔顿圈	536
11.4.1	定理 11.4.1 的证明	538
11.4.2	定理 11.4.2 的证明	539
11.5	习题	540
第 12 章	一些重要的专题	542
12.1	Seymour 第二邻集猜想	542
12.2	配对比较有向图的顶点排序	545
12.2.1	配对比较有向图	545
12.2.2	Kano-Sakamoto 排序法	547