

数学思维方法

SHUXUE SIVWEI FANGFA

郑年春 史天勤 肖强烈 编著



大连海运学院出版社

数学思维方法

本书在编写过程中，参考了国内外许多数学思维方法方面的著作，特别是《数学思维方法》、《数学思维方法》、《数学思维方法》等书，本书在编写过程中，参考了国内外许多数学思维方法方面的著作，特别是《数学思维方法》、《数学思维方法》、《数学思维方法》等书，本书在编写过程中，参考了国内外许多数学思维方法方面的著作，特别是《数学思维方法》、《数学思维方法》、《数学思维方法》等书。

郑年春 史天勤 肖强烈 编著

江苏工业学院图书馆
藏书章

大连海运学院出版社

ISBN 7-313-02111-2

内 容 提 要

数学教育过程中的思维规律的研究和对学习者思维能力的训练是当今国内外教育界普遍重视的理论和实践问题。《数学思维方法》一书正是从提高学习者数学思维能力，提高数学教育质量的目的出发，系统阐述数学思维的特点、规律、方法和数学教学过程中思维方法的训练的一本专著。本书广泛吸取了现代思维科学、教育学、心理学的研究成果，并且十分注重理论的系统性和实用性，既有助于读者了解和把握数学思维的一般规律和方法，提高数学教学水平，又有助于读者通过数学思维方法的训练，完善思维品质，提高思维能力。

本书适合中学数学教师、大学数学系师生以及其他数学爱好者、工作者和教育理论研究人员阅读、参考。

数 学 思 维 方 法

郑年春等 编 著

责任编辑：晓 非 陈材华

封面设计：陈达强

大连海运学院出版社出版、发行

湖北浠水印刷厂印装

开本：787×1092 1/32 印张：6.875 字数：156千

1990年10月第一版 1990年10月第一次印刷

印数：1-4500 定价：2.85元

ISBN 7-5632-0251-X/G·55

登记号：(辽)11号

前 言

我们在长期的数学教学理论研究和实践中，深感只注重传授数学知识，忽视对学生数学思维方法的训练是一个十分普遍的问题，因而严重影响了学生数学思维能力的提高，不能充分发挥数学作为辩证思维的辅助工具的作用。这种状况的存在，既与传统教育思想的影响有关，也与数学理论研究领域中，尤其是数学教学理论研究中忽视对数学思维规律和方法的研究有关。由此萌发了编著一本专门介绍和研究数学思维的规律与方法的书，以期能为当前数学教学改革、提高数学教育质量贡献一点微薄力量的想法。在几次湖北省数学学会的有关会议上，我们将这一构想向一些专家、教授及同行们请教，大家都认为这是一件十分有意义的工作，这对我们是极大地鼓励，于是我们从1988年底开始了撰写《数学思维方法》一书的工作。

在编写过程中，我们吸取了现代教育科学、心理学、思维科学等研究成果，并注意将理论与实际相结合。本书适合中学数学教师、高等学校数学系师生以及其他数学爱好者、工作者和教育研究人员阅读和参考。

在编写过程中，我们共同研究确定提纲，分头执笔。各章具体执笔者是：郑年春编写第一、二、三章；肖强烈编写第四、八章；史天勤编写第五、六、九章；郑年春、肖强烈编写第七章。全书由郑年春修改统稿。

在出版过程中，得到大连 海运学院出版社和武汉水运 工程学院徐祖兴、陈材华、杨万柏等老师的支持和帮助，在此深表感谢。

由于作者水平有限，书中错误和疏漏之处在所难免，恳请读者们批评指正。

编著者

1990年5月

目 录

第一章 结 论	(1)
第一节 数学是科学思维的工具.....	(2)
第二节 数学思维的特点.....	(6)
第三节 数学教育.....	(8)
第二章 观察与试验	(13)
第一节 观察试验与思维.....	(13)
第二节 观察的方法.....	(16)
第三节 试验的方法.....	(20)
第四节 数学教学中的直观性原则.....	(23)
第三章 归纳与演绎	(28)
第一节 归纳方法及特点.....	(28)
第二节 归纳的作用.....	(32)
第三节 演绎.....	(36)
第四节 数学归纳法.....	(41)
第五节 猜想.....	(44)
第六节 课堂教学中的实际作用.....	(48)
第四章 类 比	(52)
第一节 类比与联想.....	(52)

第二节	欧拉类比的成功	(57)
第三节	性质类比	(62)
第四节	关系类比	(67)
第五节	类比在数学中	(73)
第五章	分析与综合	(84)
第一节	思维的基本过程	(84)
第二节	分析综合的辩证统一	(88)
第三节	分析与综合的方向	(91)
第四节	概念判断与推理	(97)
第五节	学会思考	(102)
第六章	一般化和具体化	(107)
第一节	抽象概括具体化的过程	(107)
第二节	抽象方法	(112)
第三节	高度的概括	(117)
第四节	具体化方法	(120)
第五节	漫谈空间	(123)
第六节	对学习的指导意义	(128)
第七章	创造性思维	(131)
第一节	创造性思维的特点	(131)
第二节	创造性思维的过程	(139)
第三节	创造性思维的方法	(141)
第四节	创造性思维能力的培养	(154)

第八章 数学语言..... (163)

第一节 数学语言和数学思维..... (163)

第二节 数学语言的分类..... (167)

第三节 数学语言的特点..... (177)

第四节 使用数学语言的要求..... (181)

第九章 数学美..... (187)

第一节 美在哪里..... (187)

第二节 黄金分割法..... (191)

第三节 数学美的特征..... (195)

第四节 数学美的本质..... (200)

第五节 数学美的力量..... (204)

第一章 绪 论

数学是研究客观世界的空间形式和数量关系的科学，是辩证思维的辅助工具和表现形式。在人类历史发展的过程中，数学始终是一种不可缺少的认识世界和改造世界的工具。数学在各门科学中被应用的水平标志着科学发展的水平。正如马克思所说：“一门科学只有成功地运用数学时，才算达到了完善的地步”。随着科学技术的进步和数学自身的发展，尤其是电子计算机的普遍应用，数学方法正日益渗透到各门科学和社会生活的各个方面，成为认识世界和改造世界过程中的一种具有普遍意义的方法。人们愈来愈清楚地认识到，数学不单只被看作一门自然科学了，它对各门科学（包括自然科学和社会科学）都能起到方法论的作用，也使得数学知识成为人的知识结构中的主要成分之一。数学教育贯穿于从小学到大学乃至终生教育之中。学习数学不仅在于了解和记忆一些具体的数学概念、公式及运算等基本知识，还必须善于发现各种概念之间，各种运算之间，以及各个数学分支之间的关系，并且善于建立和运用它们之间的各种转化，这样才能发挥出蕴藏在数学中的辩证思维的力量。但是，目前无论是从学生学的方面来看，还是从教师教的方面来看，只注重一般数学知识和运算技巧，忽视对数学概念深刻内涵的理解，忽视严格的逻辑推理及知识的归纳整理，忽视提高学生能力的训练等仍是十分突出的问题。至于把数学作为一种科学思维的训练，努力提高学生数学思维能力则更是十分欠缺。

如何通过数学教育，完善人的思维品质，发展人的思维能力，已经成了当今国内外教育界研究的热门课题。在美国，越来越多的大学设立专门课程，讲授思维技巧，并且规定入学新生必须选修此课一年。许多中学，甚至小学，也开始把思维技巧列入教学计划。在欧美，数学教育理论的研究成为“飞速发展中的行业”，有些学校也开设了“数学方法”、“数学技巧”以及以数学教育为基础的“创造发明”等课程。在苏联，1974年出版了第一本数学教育的专著——《数学教育学》，该书的基本指导思想在于使数学教育现代化，把传统的数学教育中注重结果——知识积累，转变到注重过程——数学思维的训练上来，在国际上产生了颇大的反响。在我国，1984年在郑州召开的全国数学教育研究会上把“提高数学教育的科学理论水平和建立数学教育学作为一项重要研究课题”。1988年在江西庐山召开了第二次思维与数学教育学术讨论会，大家一致认为，在我国形成一门为高等师范院校教师、研究生所用的数学思维教育学，十分必要。因此，切实提高从小学到大学的数学教育质量，使人们理解数学、重视数学和正确地运用数学，并且在数学的学习中，注重数学思维能力的训练，这对于开发智力，提高我们民族的素质和科学水平，促进社会主义现代化的建设，是一件重要的事情。基于此，我们对数学思维的过程、特点、方法以及如何提高数学思维能力等方面，从理论与实例相结合的角度进行尽可能系统地研究，以期为读者提供正确的思维方法，有效地进行数学活动。

第一节 数学是科学思维的工具

自从人类的自我意识产生以来，认识的触角就不仅指向外

界，而且也指向自身，力图揭示思维的奥秘。在我国，自八十年代初，钱学森在探索现代科学技术体系结构的时候，首次提出思维科学这样一个现代科学大部门的概念后，思维科学的研究在我国如雨后春笋蓬勃兴起。在这所有的研究中，无一不把数学及其思维方式作为其研究的主要对象和内容。足见数学及其特殊的思维方式、规律在思维科学中有着重要的地位及作用。

思维是人脑对客观事物间接的和概括的反映。它是人类特有的活动。它是特殊的组织——人脑通过表象、概念、判断、推理以及其它过程来反映客观世界的一种能动过程。

思维与感觉、知觉一样，是人脑对客观现实的反映。不过，感觉和知觉是事物直接作用于感觉器官时，对事物的个别属性和个别事物及其外部联系的反映，它们属于认识的低级阶段。思维是对客观事物间接的、概括的反映，它反映的是客观事物共同的、本质的属性和内部规律，属于认识的高级阶段。

例如，在黑板上画一个平行四边形，我们感知到它是由四条直线段首尾连接起来的四边形，两组对边相互平行。当我们把平行四边形的某一条边延长，利用平行线的性质（内错角相等，同位角相同）以及等量代换的原理，就可以知道平行四边形的内对角是相等的，进而我们还知道，这一性质不仅是黑板上所画的平行四边形的个性，还是所有平行四边形都具有的特性。所有平行四边形的内对角相等的认识不是凭感知直接得出来的，而是以已有的知识经验或其它事物为媒介来间接和概括的反映出来，它是思维的产物。

历史表明，人们要认识世界、改造世界就不能停留在感性认识上，必须深刻地掌握客观事物的本质及其运动规律。科学

认识的任务就是要在大量感性材料的基础上，进行加工整理。通过人们的思维去把握世界的本质，也就是要经过一系列的科学抽象活动，如逻辑思维、形象思维、直觉、灵感等方式使感性的、经验的材料上升为理性的认识。科学思维是比一般人类思维更加高级、更加严格的思维活动，它要努力去说明世界事物的本质、运动规律以及它的普遍性。它是人类思维进化的必然结果，是科学和社会高度发展的必然结果。科学思维的能力和水平是一个国家和民族科学发达的标志，也是人才素质的重要组成部分。恩格斯说：“一个民族想要站在科学的最高峰，就一刻也不能没有理论思维”。

自然界事物的本质和规律性总是不仅有质的规定，而且还有量的规定。质总是具有一定量的质，量也是有一定质的量，而且量在一定条件下会转变成质。因此，要真正地认识事物，必须既把握质，也把握量。数学思维正是科学思维用以把握一定质的量以及量和质相互转化的思维方式。它是从形和量来认识事物和事物间逻辑联系的科学思维方式。正如恩格斯所说，数学是研究思想事物的抽象的科学。怎样理解数学是科学思维的工具？概括地说有以下三点：

1. 简明精确的形式化语言大大简化和加速思维的过程

数学是科学的语言。在数学中，各种量、量的关系、量的变化以及在量之间推导和演算，都是以符号形式表示的，即运用着一套简明精确的形式化的数学语言。例如，用一个向量表示力的大小和方向，用变量和函数表示不同因素之间的关系，用函数的微商表示各种量的变化率等等。许多自然科学定律都可表示为简明的数学公式。在电动力学中，用一组偏微分方程——麦克斯韦方程概括地描述了经典电磁理论的全部基本

定律。如果没有数学语言，单凭日常语言无法表述许多复杂现象和自然规律，更无法对这些复杂现象进行深入的理论研究。人类的思维是一种信息加工的过程。被加工的信息存放在短时记忆之中，短时记忆的容量是有限的。采用简明的形式化的数学符号系统后，我们只要对简单的符号进行加工，把大量丰富深刻的含义隐藏在符号背后，贮存在长时记忆之中，这就可大大简化和加速思维的过程，使人们有可能掌握深奥复杂的事物的本质和规律。

2. 精确可靠的计算为科学思维提供可靠的依据

数学是定量刻画自然的规律性的工具。如果说科学的任务是发现这种定量规律性，那么，发现的原理存在于数学思维之中。数学在科学研究中应用的程度，标志着一门科学发展成熟的程度。只有运用数学方法，人们才能从定性的经验的描述提高到定量的分析计算。力学、物理学是在伽利略把数学方法引入物理实验分析之后，才迅速发展成精密科学的。化学、生物学以及其它科学的发展，也是随着定量计算的发展而不断精密化的。爱因斯坦指出：“在物理学中，通向更深入的基本知识的道路是同最精密的数学方法联系着的”。

现代科学技术的发展，对计算的精确性要求愈来愈高。比如在建造原子反应堆、高能加速器、宇宙飞船等精密复杂的综合性技术工程中，如果不进行周密的理论分析和精确的定量计算，不但达不到预期的目的，还会造成不可想象的严重后果。

3. 严密的逻辑体系是形成和发展科学理论的有力工具

数学是一种有效地进行推理和逻辑证明的工具。数学中的每个命题、公式之所以能够确立，是因为它被严格的逻辑推理

所证明。现代逻辑也正是运用数学方法而进一步提高了逻辑刻划思维的能力，提高了逻辑思维的缜密和严格的程度，因而使得人们可以根据自然科学提供的已知原理以及数学的运算和变换法则推导证明，从而得到重要的结论。通过数据处理从大量复杂的感性数据中找到本质性的规律性的东西。

第二节 数学思维的特点

同任何事物一样，数学思维也有自身的许多特点，并且这些特点是与数学本身的特点相联系的。概括起来，主要有以下几个方面：

1. 数学思维的探索性

数学来源于实际问题，同时又是用来解决实际问题的。数学的问题性决定了数学思维总是指向于解决某一个（或数个）问题，完成某一项任务。如果没有问题（或问题情景），就不会导致思维。数学学习的过程，也是思维的过程，这种思维总是从理解一种新的概念，推导一个新的公式、定理，寻求一种新的运算方法、解题技巧等开始的。因此，数学思维就被赋予探索的性质。开掘难点、寻找问题、探索解决问题的办法，这是数学思维的一大特性。

2. 数学思维的抽象性

任何一门科学以及人类思维都具有抽象性。但是，数学要比其它任何科学理论更抽象。这首先是，在数学的抽象中，已抛弃其它一切特性，只保留事物的空间形式和量的关系，正如恩格斯所说：“为了能够从纯粹的状态中研究这些形式的关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边；这样，我们就得到没有长、宽、高的点，没有

厚度和宽度的线”，数学的这种点、线、面，不同于客观实在的点、线、面，已是一种“思想事物”了。其次，数学运用特制的抽象符号语言，在数学推理中，从前提到结论，每一推理步骤都是用高度形式化的符号来描述的。这些抽象概念及符号化的推理，只有靠思维才能把握。也就是说，在数学思维过程中，舍弃了思维对象中的非本质属性、特征和方面，抽取出本质的属性、特征和方面来进行研究。在抽象的基础上加以概括，进而形成关于对象的一般规定性的综合统一的认识，并把这种认识推广到同类事物之中，以把握同类事物的共同性和一般性。

一部数学史就是这种抽象思维过程中所完成的历史，所有数学上的成就也正是抽象思维的产物。著名数学家欧拉把“七桥问题”简化归纳为“一笔画问题”，然后用已知的点、线、奇数、偶数等有关知识去理解它，进而开拓“线路拓扑学”研究的新领域，正是通过抽象思维，把握事物的内在联系，形成对事物的本质和规律性的认识，使认识深化。

3. 数学思维的严谨性

严谨性是数学思维的又一大特点。严谨性表现在数学思维过程中的逻辑性和精确性。一方面，数学思维必须按照一定的形式和方法，遵循一定的思维规律进行。它的概念是明确规定的，它的理论是按照严格的逻辑法则推得的，这种推理对于每一个懂得它的人来说，都是无可争辩和确定无疑的。欧几里得几何学，要求每一个命题都有逻辑上的论证，就给人以深刻的印象。另一方面，数学思维中，不仅要求从形式上把握事物间最一般的关系，而且还要定量地去把握这种关系。所以，数学结论具有逻辑的严密性和量的确定性。爱因斯坦曾这样描述数学：“为什么数学比其它一切科学受到特殊的尊重，一个理由是，它的命题是绝对可靠的和无可争辩的，而其它一切科学的

命题在某种程度上都是可争辩的，并且经常处于会被新发现的事实推翻的危险中。数学给予精密的自然科学以某种程度的可靠性，没有数学，这些科学是达不到这种可靠性的。”这就明确地道出了数学思维的严谨性——逻辑性和精确性——而产生的科学思维的力量。

4. 数学思维的创造性

创造是人类特有的能力。人的创造活动总是同创造性思维有机地联系在一起。数学思维中的创造过程有两种基本情况：一是继承和利用已有的数学知识中的各种概念、定理，通过逻辑推理而获得新的知识。二是在思维过程中必然有新的事实、新的联系、新的规律等内容加入其中，在逻辑思维中断过程中，通过思维的非逻辑跃迁而获得新的知识。数学知识的学习和掌握过程，也是数学理论的创造活动和过程的再现。因此，创造性思维是数学思维的重要特点之一。

第三节 数学教育

数学教育是学校教育中最重要的内容之一。数学教育的重要任务，第一是按照学生的心理特点和学科知识结构体系的要求，使学生掌握数学的概念、法则、定理和基本的运算方法。第二是通过数学教学活动培养学生的数学思维能力。前者即是教育理论研究中通常所谓的传授知识，后者即是培养能力。如同目前在学校教育中所普遍存在的只注重知识的传授，忽视能力培养的倾向一样，在数学教育中，忽视教学过程中的思维规律的研究和学生数学思维能力的训练是十分突出的问题，以至学生把死记硬背数学定义、定理、公式作为学习的最佳方法，只会按照教师讲授的和书本上的例题去求证和演算，不善于独

立地、灵活地去思考数学问题，更谈不上运用数学思维方法去探索其它学科和更广泛的问题，这不能不说是数学教育的缺陷。苏联数学教育家斯托利亚尔（A·A·Storiar）在《数学教育学》一书中说：“数学教育学的任务是形成和发展那些具有数学思维特点的智力活动结构，并且促进数学中的发现。”因此，对思维能力的训练成了当前数学教育的重要而艰巨的任务。

所谓数学思维能力是指人脑接受、加工、储存和输出客观世界数量关系和空间形式信息的能力。在数学思维能力中，最核心的能力是抽象思维能力（亦即逻辑思维能力）和创造性思维能力。学生要掌握数学的概念、法则和定理，虽然也需要通过记忆，但更多的是理解和思索，必须通过自己一系列复杂的思维过程，应用所得概念进行符合逻辑的判断、推理。学生在解决数学问题中感到困难的常常不是知识的不足，而往往是能力不及，不善于应用知识去处理问题。因此，发展学生的抽象思维能力就成了数学教育中重要的环节。

抽象思维是在感性认识的基础上，运用概念、判断、推理等思维形式对客观世界的间接、概括的反映过程。在数学中，数学概念是在人类历史发展过程中，逐步形成和发展起来的对客观事物的数量关系和空间形式的本质特征的一种思维形式。作为一般的思维形式的判断和推理，在数学中是以定理、法则、公式的方式表现出来，数学概念是构成它们的基础。因此，帮助学生正确理解并灵活运用数学概念，是掌握数学基础知识和运算能力，发展逻辑论证和空间想象力的前提。

对数学概念的掌握，需要经过由具体到抽象的过程。这就是通过对对象的充分感知，掌握数学概念的本质特征，通过比较，认识有关数学概念的联系和区别，形成概念系统。

掌握数学的概念、公式、定理、法则，不是一个被动的接