

大學用書

線性代數初步

李嘉淦譯

國立編譯館主編
黎明文化事業公司出版

譯者的話

近年來，線性數學設計，除了作高深數學之準備外，差不多在所有的自然科學與社會科學，如工程、經濟、商業、作業研究等，都佔着重要的一環，且期待着線性代數的發展；這種發展，刺激着興趣的生長，增進了思考之培養；其所以驚奇在線性代數的種種變化，似乎並無保持原有之章法，而以其變化之需要為境界。

本書不僅為學者不可多得的好書，可為一學期之教本，更可為從事研究者為工程數學、數學物理、經濟數學、量子機械等之先修資料；除了增進數學背景外，更具有企圖介紹新思潮之緩慢而細緻，給讀者一種美好的，直觀的「感覺」。對於抽象理論，若需一一介紹，並非十分恰當，而以數值例證來配合。

著作難，翻譯也不簡單，因著作採主動，可振筆直書，暢所欲言；而翻譯係被動，處處受制，更要配當信、達、雅；尤以著者筆誤，印刷誤植等，譯者予以校正外，仍嫌學養有限，欠週之處，在所難免，尚求海內外專家，不吝賜教是幸。

李嘉淦謹識

中華民國六十八年八月

著 者 序

如同書名所云，本書為初學線性代數的基本課程而設計的，所有沒有標出星號(*)或劍號(†)的章節，自行構成一完整的線性代數的基礎介紹，並可在一學期內授完，其他教材具有選擇性，可用來補充基本線性代數，或進一步進修之許多種方法，將在下面說明；至於有些短的章節，大部份都能在一次講解中涵蓋住，由是指出使用本書，是具有很大的彈性的。

本書依主題自然區分為五大部分：

- 一、向量幾何的課題（第一至六章）
- 二、矩陣與線性方程式（第七至十章）
- 三、抽象代數的精選論題（第十一至二十一章）
- 四、基礎線性代數（第二十二至三十九章）
- 五、線性代數的附加論題（第四十至四十六章）

第一部分討論 $\mathcal{R}^2$ 與 $\mathcal{R}^3$ 的向量幾何，並推廣至 $\mathcal{R}^n$ ，在微積分中已學習過向量的讀者，至少可以刪去此部分；而多花些時間在其他章節上，第二部分討論矩陣的運算，及線性方程組，對本書以後的部分是很重要的。第三部分是精選教材，去論述「羣」、「環」與「體」；而設計介紹代數結構，且亦給讀者配合了向量空間之概念。第四部分包含了向量空間及線性寫像的基本概念；而最後（第五）部分講述一些應用，及線性代數的附加的論題。

讀者應具備高中平面解析幾何的基礎，而不必具備微積分之智識，大多數使用本書的讀者，可能已經有單變數函數的微分與積分的

概念，所以有些例題與習題，會牽涉一些單變數微積分的線性觀念；若讀者沒學習過微積分，就不必去理會它。

標有劍號的章節，係附加的線性代數的論題，及應用教材，特別是第十、三十二、四十六章等三章，專為已學習過多變數函數的微積分的讀者設計的；並且介紹了線性觀念，在解析上的用途！

每章後都附有許多習題，標有星號或劍號的，並不是特別難，而是與前述標有星號或劍號的教材有關。

本書可用做下列課程的教本：

1. 基本向量幾何與線性代數。（在第一、二、四、五部分中，未標有星號或劍號的二十八章）。
2. 從事研究更深的線性代數及應用的先修課程。（第二、四、五部分）。
3. 基本線性代數，代數結構，做為更深的線性代數，及抽象代數的先修課程。（第二、三、四部分）。

例如，羅德島大學就是為了(3)的目的，為二年級學生設計一學期的課程；為了對科學之興趣主修此課程，則僅花了三星期，授完了「羣」，環與體，包括第二部分，第三部分一些，及第四、五部分中未標星號與劍號的章節。

對於 *Addison Wesley* (愛迪生威斯萊) 出版公司准予轉錄 *Fr-aleigh* 所著之微積分，線性方法，第一冊，1971 年；第二冊，1972 年中的一部分；特致由衷的謝意。

R. A. Beauregard

J. B. Fraleigh

於羅德島，京士頓市

目 錄

第一部分 向量幾何的課題	1
第一章 歐幾里得平面的向量代數	3
1-1 $\mathcal{R}^2$ 中的點與距離	3
1-2 向量、純量、與長度	5
1-3 $\mathcal{R}^2$ 中向量和與純量倍	6
1-4 平行與垂直向量	9
1-5 兩點間的幾何向量	10
第二章 歐幾里得空間的向量代數	14
2-1 $\mathcal{R}^3$ 中的點與距離	14
2-2 向量、純量、與長度	16
2-3 空間的向量代數	17
2-4 $\mathcal{R}^3$ 中二向量的夾角	18
2-5 向量的點積	20
第三章 $\mathcal{R}^2$ 與 $\mathcal{R}^3$ 中的直線的參數方程式	25
3-1 過原點的直線的參數方程式	25
3-2 過一所予點且有一已知方向向量的直線	26
3-3 二直線的夾角	28

2 線性代數初步

3-4 線段、中點、與凸集合	30
----------------	----

第四章 $\mathcal{R}^2$ 與 $\mathcal{R}^3$ 中線性方程式的軌跡

4-1 $\mathcal{R}^3$ 中的一平面為一個線性方程式的軌跡	35
--------------------------------------	----

4-2 $\mathcal{R}^3$ 中二平面的夾角	38
-----------------------------	----

第五章 平行四邊形的面積與平行六面體的體積

5-1 $\mathcal{R}^2$ 中二向量作成的平行四邊形	43
----------------------------------	----

5-2 $\mathcal{R}^2$ 中平行四邊形的面積以行列式表示	45
-------------------------------------	----

5-3 $\mathcal{R}^3$ 中三向量作成的平行六面體	47
----------------------------------	----

5-4 平行六面體的體積以行列式表示	48
--------------------	----

第六章 推廣至 $\mathcal{R}^n$

6-1 $\mathcal{R}^n$ 的向量與其代數	56
-----------------------------	----

6-2 $\mathcal{R}^n$ 中向量的夾角，以幾何開始	58
----------------------------------	----

6-3 點積與席瓦茲不等式	59
---------------	----

6-4 $\mathcal{R}^n$ 中的直線與超平面	61
------------------------------	----

6-5 三角形不等式	63
------------	----

6-6 體積與行列式	64
------------	----

第二部分 矩陣的線性方程式

第七章 矩陣與其代數

7-1 矩陣的概念	71
-----------	----

7-2 矩陣加法	73
----------	----

7-3	乘以純量	73
7-4	矩陣乘法	74
7-5	矩陣運算的代數性	77
7-6	一矩陣之轉置矩陣	79
第 八 章 線性方程組		83
8-1	問題	83
8-2	幾何問題	84
8-3	解線性方程組	86
8-4	例題	87
8-5	簡化式的一分析	92
第 九 章 可逆矩陣		99
9-1	矩陣方程式與反矩陣	97
9-2	可逆矩陣之反矩陣的計算	99
† 第 十 章 可微分寫像的亞可比矩陣		108
10-1	多變數函數的導數	108
† 10-2	可微分函數的微分	109
† 10-3	方向導數	110
† 10-4	坐標函數與亞可比矩陣	112
† 10-5	微分公式以矩陣表出	114
* 第三部 抽象代數之精選論題		121
* 第十一章 半羣		123

4 線性代數初步

* 11-1 定義與例題	123
* 11-2 次羣	126
* 11-3 反元素	127
* 第十二章 羣	132
* 12-1 定義與例題	132
* 12-2 羣 $(Z_k, +_k)$	133
* 12-3 消去律與方程式之解	135
* 第十三章 乘法記號與加法記號	138
* 第十四章 由所予羣作新羣	142
* 14-1 羣的子羣	142
* 14-2 羣的交集與聯合	146
* 14-3 羣的直積	148
* 第十五章 羣的同態	152
* 15-1 結構關係寫像	152
* 15-2 同構	154
* 15-3 同態存在的代數性質	156
* 15-4 同態的核	157
* 第十六章 羣 S_n	162
* 16-1 羣 S_A	162
* 16-2 排列的乘法	163
* 16-3 幾何的應用	165

* 16-4 循環.....	167
* 16-5 排列的符號.....	169
* 第十七章 環	176
* 17-1 定義與例題.....	176
* 17-2 三個「算術」性質.....	179
* 17-3 環的形式.....	180
* 17-4 子環.....	183
* 第十八章 體	188
* 18-1 體的基本性質.....	188
* 18-2 子體.....	190
* 18-3 佈於體的矩陣線性方程組.....	191
* 第十九章 環的同態	197
* 19-1 定義與例題.....	197
* 19-2 同態存在的代數性質.....	199
* 19-3 同態的核.....	200
* 第二十章 佈於體的多項環.....	204
* 20-1 多項式與其代數.....	204
* 20-2 多項式的根.....	208
* 第二十一章 佈於任意體的向量空間	213
* 21-1 外乘.....	213

6 線性代數初步

* 21-2	向量空間的概念	214
* 21-3	向量空間的一些基本性質	216
* 21-4	向量空間的直積	214
* 21-5	空間 F^n 的幾何	218

第四部分 基礎線性代數 225

第二十二章 實向量空間 225

22-1	向量空間的運算	225
22-2	向量空間	226
22-3	向量空間的一些基本性質	228

第二十三章 子空間與線性組合 235

23-1	子空間的定義與特性	233
23-2	線性組合與子空間	236
23-3	生成集合	237
23-4	$\mathcal{R}^n$ 的子空間	238

第二十四章 獨立集合 242

24-1	獨立關係	242
24-2	獨立生成集合的存在	248

第二十五章 基底與維 255

25-1	基底	255
25-2	維	256
25-3	拓大一個獨立集合為一組基底	258

第二十六章 子空間的和；面	264
†26-1 子空間的和	264
†26-2 子空間的直和	265
†26-3 二子空間和的維	266
26-4 面	269
第二十七章 向量坐標化	276
27-1 有序基底	276
27-2 向量坐標化	277
第二十八章 線性寫像	282
* 28-1 向量空間的同態	282
28-2 線性寫像	284
28-3 線性寫像的例題	285
28-4 線性寫像存在的一些代數性質	287
28-5 向量空間的坐標化	289
第二十九章 線性寫像的坐標化	295
29-1 線性寫像關聯於有序基底的矩陣	295
29-2 由矩陣關聯於有序基底獲得線性寫像	299
29-3 線性寫像應用坐標的計算	302
第三十章 線性寫像的代數	309
30-1 $\mathcal{L}(V, V')$ 的代數結構	309
30-2 合成線性寫像與矩陣乘法	313

第三十一章 基底的變換	319
31-1 線性寫像矩陣之變換對應於基底的變更	319
31-2 相似矩陣	320
第三十二章 可微分寫像的局部近似	325
†32-1 局部坐標軸	325
†32-2 局部線性近似: 單變數場合	327
†32-3 局部線性近似: 多變數場合	329
第三十三章 秩	333
33-1 線性寫像的秩	333
33-2 矩陣的秩	335
33-3 矩陣的列秩與行秩	337
第三十四章 一般線性問題	343
34-1 問題	343
34-2 例題	344
34-3 一般齊次線性問題之解空間的維	346
34-4 應用于微分方程式	348
第三十五章 特徵值與對角線化	352
35-1 特徵值與特徵向量	352
35-2 特徵值與特徵向量的計算	355
35-3 矩陣的對角線化	357
35-4 應用于微分方程式	362

第三十六章 行列式	368
36-1 2 階與 3 階的行列式的複習	368
36-2 n 階行列式之定義	370
36-3 行列式之性質	374
36-4 高階行列式之計算	376
* 第三十七章 行列式理論	381
* 37-1 行列式之交錯定義	381
* 37-2 行列式三基本性質的證明	383
* 37-3 以子式展開	387
第三十八章 行列式之兩古典應用	391
38-1 可逆矩陣的反矩陣	391
38-2 克里默規則	393
第三十九章 特徵值與行列式	397
39-1 特徵多項式	397
39-2 最低多項式	398
39-3 凱雷漢米爾頓定理	400
第五部分 線性代數的附加課題	407
第四十章 約旦標準型與不變子空間	409
40-1 動機	409
40-2 約旦型	410

40-3	應用至微分方程式	417
†40-4	不變子空間	420
第四十一章 實向量空間之內積		430
41-1	引言	430
41-2	實向量空間之內積	430
41-3	正交性與子空間	432
41-4	正定值內積與模方	433
41-5	席瓦茲與三角形不等式	434
41-6	向量與純量射影	436
第四十二章 範數向量空間		441
†42-1	範數的定義	441
†42-2	由範數企圖重述內積	442
第四十三章 正交基底		448
43-1	正交與正規直交基底	448
43-2	關於有序正規直交基底的向量坐標	449
43-3	萬蘭席密特程序	450
†43-4	正交子空間的餘	453
第四十四章 單式寫像與矩陣		456
44-1	單式寫像	456
44-2	單式矩陣	457
†第四十五章	$\mathcal{R}^m$ 中 n -匣子之 n -體積	464

† 45-1	$\mathcal{R}^m$ 中 n -匣子的概念	463
† 45-2	$\mathcal{R}^m$ 中 n -匣子的 n -體積	464
†	第四十六章 線性寫像與體積	473
46-1	線性寫像下之體積變換因式	473
† 46-2	可微分寫像下之局部體積變換因式	477
† 46-3	應用至積分	479
	附錄 集合、寫像、與關係	487
A-1	集合	487
A-2	寫像	490
A-3	關係	494
	奇數題的答案	500
	索引	540

第一部份

向量幾何的課題

