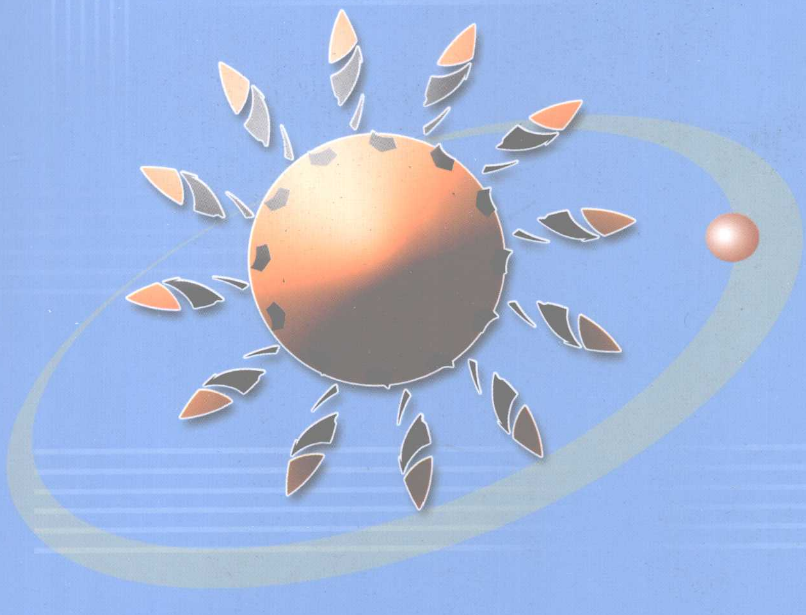
应用型本科理工类基础课程规划教材
山东省精品课程教材

线性代数

杨洪礼　蔺香运　主编



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

应用型本科理工类基础课程规划教材

山东省精品课程教材

线性代数

主　编　杨洪礼　蔺香运

副主编　张序萍　武　波　王安平

北京邮电大学出版社

·北京·

内容简介

本书是高等学校精品课程建设教材的成果之一，是为理工类各专业本科二年级线性代数课程编写的教材. 主要内容包括行列式、矩阵、向量组的相关性、线性方程组、二次型、线性空间与线性变换等各章. 以线性方程组的求解和二次型的“型”为主线，全书体现方程组和“型”两个重点，另外介绍如行列式、矩阵、向量组，线性变换等内容，既为主线服务，又体现线性代数学科内容的完整性. 每章后面有两套相应的不同难度和目标要求的练习题，并且为了增加书的可读性和介绍更多的线性代数的有关背景，在每章后面列出了与本章内容相关的阅读材料. 同时，我们也注意增加了一些与现代科技紧密相关的实际例子，在每章后面还介绍了 MATLAB 软件包来解决问题的实例. 每章分 A、B 两类习题，附有答案.

本书适合作为高等学校理工经管类本科各专业的线性代数教材，同时也可以作为自学者选用或者作为电大，函授类理工经管本科各专业使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/杨洪礼，蔺香运主编．—北京：北京邮电大学出版社，2009

ISBN 978-7-5635-1790-9

Ⅰ. 线…　Ⅱ. ①杨…②蔺…　Ⅲ. 线性代数—高等学校—教材　Ⅳ. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 206601 号

书　　名：线性代数
主　　编：杨洪礼　蔺香运
责任编辑：刘　磊
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京忠信诚胶印厂
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：11.5
字　　数：248 千字
版　　次：2009 年 1 月第 1 版　2009 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-1790-9　　定　价：19.50 元

前　言

为了适应我国高等教育飞速发展的需求以及数学在各学科中更广泛应用的需要，根据高等教育在教学过程中对于线性代数教学要求的需求，以及满足不同层次的学生对于线性代数的需求，结合我们近年来从事线性代数精品课程建设的成果和经验，编写了这本线性代数教材.

在教育部最新颁发的线性代数教学大纲的基本框架下，针对使用对象的特点，本书主要从以下几方面进行了考虑：

在课程框架方面，一方面考虑到理工类基础课程本科教学实际的需求和后继课程的需要，另一方面又考虑到线性代数自身的学科体系的特点，以线性方程组的求解和二次型的“型”为主线，全书体现方程组和“型”两个重点，此外介绍如行列式、矩阵、向量组，线性变换等内容，并为主线服务，体现线性代数学科内容的完整性.

在例子的选择方面，线性代数是一门应用性很强的学科，在经济管理、图像信号处理、力学、数据处理等领域有着鲜活的例子，但是传统的教材和国内的教材只注重本课程理论体系的完整性，很少顾及到应用性和实际例子. 本书在这方面做了一个尝试，试图增加一些最新科技发展成果中一些成熟的例子，结合国外教材中好的实例来介绍，这在一定程度上可以解决这门课程枯燥无味的现象，提高学生的应用意识和学习兴趣，这也是我们写这本书的初衷.

在培养学生应用能力方面，我们强调用计算机来处理数学中的问题. 本书在这一方面有所加强，在每章介绍完主要内容后强调用计算机来解决实际问题，每章后面都有用MATLAB软件包来解决问题的实例，详细介绍 MATLAB 软件包的应用，因为 MATLAB 软件包是现在工程中比较通用的软件包，无论是在科研中还是在工作中用处都非常大. 在语言的叙述方面，一方面不违背数学专业术语的严谨和简明，同时又力求做到通俗易懂，由浅入深. 另外，在每章内容后面或者适当的地方都介绍了线性代数的背景知识、发展现状、轶闻趣事等有关的阅读材料，旨在增加学生对线性代数学科内容的广泛了解，同时也增加了本书的可读性.

每章后面习题分 A、B 两类，难度有所侧重，读者对象有所侧重，一个重基础知识，另一个重能力培养和为进一步深造服务.

本书由杨洪礼老师提出编写思想和编写提纲，列出章节目录，编写阅读材料部分的框

架，最后对全书进行修改补充、统稿定稿，并编写第 4 章和 5.1 至 5.4 节的内容. 蔺香运老师编写了第 1、2 章内容，武波老师负责编写第 3 章与第 4 章的 4.4.3 节部分内容，张序萍老师负责编写 5.5 至 5.8 节和第 6 章内容. 参加本书编写的还有秦婧，韩晓峰，王安平老师.

在本书的编写过程中，参考了大量的相关教材和资料，并选用了其中部分内容和例题、习题，在此谨向有关编者、作者一并表示感谢.

本书适合作为高等学校理工类经管本科各专业的线性代数课程教材，全书前 5 章约需 36 学时，第 6 章为选学内容，约需 8 学时，同时也可以作为自学者选用或者作为电大、函授类理工本科各专业使用.

由于编者水平所限，本书中不当之处在所难免，希望得到广大读者与同仁的批评指正.

本书得到山东省高等学校基础学科建设专项资金项目资助.

编　者

目　录

第 1 章　行列式

1.1　行列式的定义 …… 1
1.1.1　二元线性方程组与二阶行列式 …… 1
1.1.2　三元线性方程组与三阶行列式 …… 2
1.1.3　n 阶行列式的定义 …… 4
1.2　行列式的性质 …… 6
1.3　行列式的按行展开 …… 12
1.3.1　余子式与代数余子式 …… 12
1.3.2　行列式的按行展开定理 …… 13
小结 …… 18
习题一 …… 21
习题一参考答案 …… 23

第 2 章　矩阵

2.1　矩阵的概念 …… 27
2.2　矩阵的运算 …… 29
2.2.1　矩阵的相等 …… 29
2.2.2　矩阵的加法 …… 29
2.2.3　数与矩阵的乘法 …… 30
2.2.4　矩阵的乘法 …… 31
2.2.5　矩阵的转置 …… 34
2.2.6　方阵 …… 35
2.3　逆矩阵 …… 37
2.4　矩阵的分块 …… 40
2.4.1　矩阵的分块 …… 40

2.4.2 分块矩阵的运算…………………………………………………………………………………… 41
2.5 初等变换与初等矩阵……………………………………………………………………………… 43
2.5.1 初等变换…………………………………………………………………………………………… 43
2.5.2 初等矩阵…………………………………………………………………………………………… 45
2.6 矩阵的秩……………………………………………………………………………………………… 48
2.6.1 矩阵的子式……………………………………………………………………………………… 48
2.6.2 矩阵的秩…………………………………………………………………………………………… 49
2.6.3 矩阵秩的性质…………………………………………………………………………………… 50
小结 …… 51
习题二 ……………………………………………………………………………………………………… 59
习题二参考答案 ………………………………………………………………………………………… 62

第 3 章 向量组及其线性相关性

3.1 向量及其运算……………………………………………………………………………………… 65
3.1.1 n 维向量的概念 ……………………………………………………………………………… 65
3.1.2 n 维向量的线性运算 ………………………………………………………………………… 66
3.1.3 n 维向量的线性组合与线性表示 ………………………………………………………… 67
3.2 向量组的线性相关性……………………………………………………………………………… 69
3.2.1 概念………………………………………………………………………………………………… 69
3.2.2 性质………………………………………………………………………………………………… 70
3.3 向量组的秩…………………………………………………………………………………………… 72
3.4 向量空间……………………………………………………………………………………………… 75
3.4.1 向量空间的概念………………………………………………………………………………… 75
3.4.2 向量空间的基、维数、向量的坐标………………………………………………………… 77
3.4.3 过渡矩阵、基变换公式、坐标变换公式…………………………………………………… 78
小结 …… 81
习题三 ……………………………………………………………………………………………………… 82
习题三参考答案 ………………………………………………………………………………………… 85

第 4 章 线性方程组

4.1 线性方程组有解的判定定理……………………………………………………………………… 87
4.2 线性方程组解的结构……………………………………………………………………………… 92
4.3 Cramer 法则 ……………………………………………………………………………………… 97
4.4 线性方程组的应用………………………………………………………………………………… 99
4.4.1 线性方程组与空间解析几何的联系………………………………………………………… 99

4.4.2 线性方程组与矩阵方程 …… 100
4.4.3 线性方程组与向量组的相关性 …… 101
4.4.4 线性方程组求解简述 …… 102
小结 …… 102
习题四 …… 106
习题四参考答案 …… 110

第 5 章 相似矩阵与二次型

5.1 方阵的特征值与特征向量 …… 113
5.1.1 特征值与特征向量的基本概念 …… 113
5.1.2 特征值和特征向量的求法 …… 114
5.1.3 特征值与特征向量的性质 …… 116
5.2 相似矩阵 …… 119
5.3 正交矩阵 …… 121
5.3.1 实向量的内积与长度 …… 121
5.3.2 正交向量组 …… 122
5.3.3 正交矩阵与正交变换 …… 124
5.4 实对称阵的对角化 …… 125
5.5 二次型及其标准形 …… 130
5.5.1 二次型及其矩阵 …… 131
5.5.2 矩阵的合同 …… 132
5.6 化二次型为标准形 …… 133
5.6.1 用正交变换化二次型为标准形 …… 133
5.6.2 用配方法化二次型成标准形 …… 135
5.7 正定二次型 …… 137
5.7.1 二次型的定性 …… 137
5.7.2 正定二次型的判定 …… 138
5.8 应用举例 …… 139
5.8.1 化简二次曲线或二次曲面 …… 139
5.8.2 二元函数的极值问题 …… 140
小结 …… 141
习题五 …… 147
习题五参考答案 …… 148

第 6 章　线性空间与线性变换

6.1　线性空间与子空间 …… 150
6.1.1　引入 …… 150
6.1.2　线性空间的定义及性质 …… 151
6.1.3　线性子空间 …… 152
6.2　维数、基与坐标 …… 153
6.2.1　线性空间的基与维数 …… 153
6.2.2　线性空间中向量的坐标 …… 154
6.2.3　线性空间的同构 …… 155
6.3　基变换与坐标变换 …… 155
6.3.1　基变换 …… 155
6.3.2　坐标变换 …… 156
6.4　线性变换 …… 157
6.4.1　映射 …… 157
6.4.2　线性变换 …… 158
6.4.3　线性变换的基本性质 …… 158
6.4.4　线性变换的值域与核 …… 159
6.5　线性变换的矩阵表示 …… 159
6.5.1　线性变换的矩阵表示 …… 159
6.5.2　线性变换在不同基下的矩阵之间的关系 …… 161
小结 …… 162
习题六 …… 169
习题六参考答案 …… 171

参考文献 …… 173

第 1 章　行列式

行列式是线性代数的一个重要组成部分. 它是研究矩阵和方程组等问题的重要工具. 本章主要介绍了行列式的定义、性质及计算方法，最后给出了行列式的按行展开理论.

1.1　行列式的定义

1.1.1　二元线性方程组与二阶行列式

先看一个中国古代著作《孙子算经》所记载的“鸡兔同笼”问题：今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问鸡兔各几何？我们可以借助列方程组来求解这个问题，设笼内有 x_1 只鸡和 x_2 只兔子，由于一只鸡有两条腿，一只兔子有四条腿，可列方程组如下：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 35 \\ 2x_1 + 4x_2 = 96 \end{cases} \tag{*}$$

这个方程组为二元线性方程组，对一般的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1.1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (1.2) \end{cases}$$

可以用消元法来求解，方程(1.1)两边同时乘以 a_{22}，方程(1.2)两边同时乘以 $-a_{12}$ 再相加，消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

同理，方程(1.1)两边同时乘以 $-a_{21}$，方程(1.2)两边同时乘以 a_{11} 再相加，消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

注意到上式中的分子与分母都是 4 个数分两对相乘再相减的结果，为了便于描述，引入如下记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

并称其为二阶行列式，根据上述的记号，方程组解中的分子也可以分别用二阶行列式写为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

它们分别是把式(1.3)中的第 1、2 列(对应未知数 x_1、x_2 的系数)分别换为方程组右端相应的常数项 b_1、b_2 的结果. 由二元线性方程组未知数的系数构成的二阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为方程组的系数行列式，则当二元线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程组的解可用行列式表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

这样求解二元线性方程组的问题就可用行列式来解决，对方程组(*)，由于系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=2\neq 0$，所以其解为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 35 & 1 \\ 96 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}=22,\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 35 \\ 2 & 96 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}=13$$

所以笼中分别有 22 只鸡和 13 只兔子.

1.1.2　三元线性方程组与三阶行列式

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{**}$$

在利用消元法求解过程中，引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.4}$$

称其为三阶行列式. 此定义表明，三阶行列式含 6 项，每项均为不同行不同列的 3 个元素的乘积再冠以正、负号，其规律遵循图 1.1 所示的对角线法则：图中 3 条实线看作平行于主对角线，每条实线上 3 元素的乘积冠以正号，3 条虚线看作平行于副对角线，每条虚线上 3 元素的乘积冠以负号.

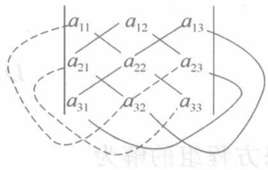


图 1.1

与二元线性方程组的情形类似，当方程组(**)的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，方程组有唯一解，相应地记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

例 1.1 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

解 由对角线法则，有

$$\begin{aligned} D=&(-1)\times1\times1+2\times1\times3+3\times(-2)\times(-1)-3\times1\times3 \\ &-2\times(-2)\times1-(-1)\times1\times(-1)=5. \end{aligned}$$

例 1.2 解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=4 \\ 2x_1-x_2-2x_3=-1 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1+6+2+3-2+2=12\neq 0,$$

从而方程有唯一解. 又由

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=4-1+1+8=12$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=1-24+3+8=-12$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-3+8+12+1=24$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=2$$

1.1.3 n 阶行列式的定义

二阶行列式与三阶行列式都是用对角线法则定义的，它们的共同点是看作不同行不同列元素乘积的代数和，其中不同行不同列元素乘积项前是正号还是负号是用对角线法则规定的，对四阶及以上的行列式就不适合再用对角线法则定义. 为了给出 n 阶行列式的定义，先考查三阶行列式与二阶行列式的关系. 对三阶行列式的定义式(1.4)中右边各项，按第一行元素合并同类项，便有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

上式的特点是：三阶行列式可以通过二阶行列式来表示，具体是三阶行列式的第一行元素乘以去掉这个元素所在行和列余下的两行两列元素组成的二阶行列式，然后乘以 -1 的行标与列标之和次幂，类似地，通过三阶行列式，四阶行列式可以定义如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

依次类推，n 阶行列式定义为

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_n = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n-1} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n-1} + \cdots$$

$$+(-1)^{n+1}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}_{n-1} \tag{1.5}$$

n 阶行列式定义的导出引入了一种重要的思想，从特殊到一般，然后再从一般到特殊. 为了推导出二元、三元线性方程组求解公式，引入了二阶、三阶行列式，然后通过高阶行列式与低阶行列式之间的联系来找出一般规律，从而定义更高阶的行列式. 当然，第 3 章中会学习到对 n 元线性方程组的求解公式也可以用 n 阶行列式来表示.

在 n 阶行列式 D 的定义中，$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为双下标记号，其中 i 表示该元素所在的行数（第 i 行），j 表示该元素所在的列数（第 j 列），有时也称 a_{ij} 为 (i,j) 元素，即表示元素所在的行与列的位置. 由行列式的定义可以计算一些简单的行列式.

例 1.3 计算下列行列式.

(1) 下三角形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2) 对角形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}$$

解 (1) 注意到 D_n 中第一行元素只有 a_{11} 非零，其他元素都是零，由 n 阶行列式定义式(1.5)知从第二项开始都是乘以零的项，所以

$$D_n=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n-1} = a_{11}D_{n-1}$$

类似地，$n-1$ 阶行列式 D_{n-1} 中第一行元素只有 a_{22} 非零，其他元素都是零，同理有

$$D_{n-1}=a_{22}D_{n-2}$$

所以 $D_n=a_{11}a_{22}D_{n-2}$，依次类推即得

$$D_n=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 与(1)类似,可得

$$D_n=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

例 1.4 证明 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

证 注意到 D_n 中第一行只有$(1,n)$元素非零,所以按定义式(1.5)

$$D_n=(-1)^{1+n}\lambda_1\begin{vmatrix} & & & \lambda_2 \\ & & \lambda_3 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}_{n-1}=(-1)^{1+n}\lambda_1 D_{n-1}=(-1)^{n-1}\lambda_1 D_{n-1}$$

而 $n-1$ 阶行列式

$$D_{n-1}=\begin{vmatrix} & & & \lambda_2 \\ & & \lambda_3 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}_{n-1}$$

中第一行只有$(1,n-1)$元素非零,所以

$$D_{n-1}=(-1)^n\lambda_2 D_{n-2}=(-1)^{n-2}\lambda_2 D_{n-2}$$

即

$$D_n=(-1)^{(n-1)+(n-2)}\lambda_1\lambda_2 D_{n-2}$$

依次类推,即有

$$D_n=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

1.2 行列式的性质

对一些特殊的或阶数较低(二阶、三阶)的行列式利用定义计算较为容易,但对一般的高阶行列式,虽然利用定义可以将高阶行列式化为低阶行列式来计算,但是一般计算量很大,因此需要寻找计算行列式的其他方法和途径.本节不加证明地给出行列式的一些基本性质,适当地利用这些性质可以简化行列式的计算.

性质 1 行列式与它的转置行列式具有相同的值.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式,则有 $D=D^{\mathrm{T}}$.

利用性质 1,可以得到上三角形行列式的值也是对角线元素乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

性质 1 表明,在行列式中行和列的地位是对等的,因此,凡是有关行的性质,对列也同样成立,反之亦然.

性质 2　对换行列式的两行(列),行列式变号.

设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

交换行列式的第 i 行和第 j 行对应元素,得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

则 $D_1=-D$.

一般地,以 r_i 表示第 i 行,以 r_j 表示第 j 行,交换行列式第 i 行和第 j 行对应记作 $r_i \leftrightarrow r_j$;以 c_i 表示第 i 列,以 c_j 表示第 j 列,交换行列式第 i 列和第 j 列对应记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论　如果行列式中有两行(列)完全相同,则行列式的值为零.

证　交换行列式 D 的这两行(列),所得行列式还是原来的行列式 D,再由性质 2 有 $D=-D$,即 $D=0$.

性质 3　行列式的某一行(列)的所有元素都乘以数 k,等于用数 k 乘以此行列式.

具体地,令行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D_1 是 D 的某行(如第 i 行)乘以数 k 而得到的另一行列式,即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D_1=kD$.

一般地,行列式的第 i 行乘以数 k 记作 $r_i\times k$,行列式的第 i 列乘以数 k 记作 $c_i\times k$.

推论 1　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可提到行列式记号的外面.

第 i 行提出公因子 k 记作 $r_i\div k$,行列式的第 i 列提出公因子 k 记作 $c_i\div k$.

推论 1 是性质 3 的另一种描述.

推论 2　行列式中如果某一行(列)的所有元素都为零,则行列式的值等于零.

推论 3　行列式中两行(列)的元素对应成比例,则行列式的值等于零.

证　设行列式 D 的第 i 行与第 j 行成比例,且比例系数为 λ,即

$$D=\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

第 j 行提取公因子 λ,即有

$$D=\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

其中,行列式的第 i 行与第 j 行相同,从而行列式等于零,所以 $D=0$.

性质 4　若行列式的某一行(列)的元素都是两项之和,如第 i 行的元素都是两数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_1 & a_{i2}+b_2 & \cdots & a_{in}+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$