



中央财经大学学术著作
出版资助基金资助出版

JINGSUAN FENBU
LILUN YANJIU

精算分布 理论研究

高洪忠◎著

知识产权出版社

精算分布理论研究

高洪忠 著

知识产权出版社

内容提要

本书重点研究了赔付次数分布,用于分析保险业务的损失规律。本书共包括四部分内容,分别为:基础精算分布理论、一维 GPSJ 分布类、二维 GPSJ 分布类、赔付额分布右尾的建模问题。

作为精算分布理论的专著,本书可以作为精算学、金融数学专业学生和精算师考生的学习参考用书,也可以供精算专业人员和保险业从业人员使用。

责任编辑:兰 涛

图书在版编目(CIP)数据

精算分布理论研究/高洪忠著. —北京:知识产权出版社, 2008. 6

ISBN 978 - 7 - 80247 - 307 - 2

I. 精… II. 高… III. 保险 - 精算学 - 研究 IV. F840. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 080312 号

精算分布理论研究

高洪忠 著

出版发行: **知识产权出版社**

社 址: 北京市海淀区马甸南村 1 号

邮 编: 100088

网 址: <http://www.cnipr.cn>

邮 箱: bjb@cnipr.com

发行电话: 010 - 82000893 82000860 转 8101

传 真: 010 - 82000860 - 8325

责编电话: 010 - 82000860 - 8325

责编邮箱: lantao@cnipr.com

印 刷: 知识产权出版社电子制印中心

经 销: 新华书店及相关销售网点

开 本: 880mm × 1230mm 1/32

印 张: 10.5

版 次: 2008 年 6 月第 1 版

印 次: 2008 年 6 月第 1 次印刷

字 数: 245 千字

定 价: 26.00 元

ISBN 978 - 7 - 80247 - 307 - 2/F · 179 (2349)

版权所有 侵权必究

如有印装质量问题,本社负责调换。

前言

当统计数据非常充足时，大多数问题可以通过对经验分布的分析得到解决；但是在大多数情况下，精算人员往往难以得到如此丰富的数据，特别是有关巨额赔付的数据。在这种情况下，精算人员往往需要建立赔付次数模型和赔付额模型。对于一组保单，风险理论的一个重要目标是建立精算赔付模型，包括赔付次数模型和赔付额模型；然后以此模型为基础，可以作出相关决策。

即使在统计数据十分充足的情况下，建立赔付模型也是很有意义的。一方面，它可借助于中心极限定理和随机变量的属性（如可加性）等理论工具，对实际问题进行分析；另一方面，由于理论分布可由几个参数概括，这使得我们可以避免直接与冗长的观测数据打交道。

在非寿险精算领域，分布理论主要应用领域可概括为以下方面：

- (1) 反映赔付过程，分析巨额赔付对公司财务可能造成的影响；
- (2) 分析免赔额、共保、保险限额对赔付过程的影响；
- (3) 合理确定保险产品价格；
- (4) 按照监管规定和公司需要，计提各种准备金；
- (5) 分析再保险成本，合理安排分保；
- (6) 分析随机波动对公司支付能力的影响；

(7) 分析经验估费系统的效用。

本书重点研究赔付次数分布, 包括四部分。第一部分包括第 1 章到第 4 章, 介绍了基础精算分布理论, 同时对本书所使用的约定和符号等内容进行说明。

本书的第二部分包括第 5 章到第 11 章, 共 7 章内容, 主要考虑一维赔付次数模型, 特别是 GPSJ 分布类。

第 5 章研究 GPSJ 分布类的一个特例, 即泊松-Tweedie 分布类。

第 6 章详细介绍了 GPSJ_1 分布类, 包括 GPSJ_1 分布类的性质、与参数混合泊松模型的关系, 它所包含的常见分布类、最大似然估计、复合赔付分布的计算公式等问题。 GPSJ_1 分布类具有许多优点:

(1) 使用面广。用此分布类对精算文献中出现的赔付次数数据进行拟合, 在 χ^2 拟合优度意义下要优于已知的其他分布类。

(2) 包含的分布多。如泊松分布、Gamma 分布、负二项分布、泊松-逆高斯分布、Hofmann 分布、广义负二项分布、泊松-TW 分布等都是 GPSJ_1 分布类的特例。

(3) 易于进行模型拟合。 GPSJ_1 分布类本身固有的一些性质使得我们可以迅速求得各个参数的最大似然估计, 若结合我开发的一个软件包, 则可以轻而易举地得到模型的拟合结果。

(4) 具有较为完备的理论。本书已对 GPSJ_1 分布类的性质、算法的稳定性、合成假设检验以及与其他分布类的关系等问题给予了深入研究。

第 7 章引入 GPSJ_1 随机过程的定义, 并导出对应的最优无赔款优待系统和零效用原理下的无赔款优待系统。

第 8 章根据相对误差分析理论, 给出了 GPSJ 三个递归方程

强稳定和局部强稳定的理论基础，同时用 Monte Carlo 方法对不稳定情形进行了讨论。

第 9 章给出了 GPSJ_1 分布类的合成检验；作为特例，同时也给出了泊松-逆高斯分布、SJ 分布类的合成检验。

第 10 章证明了 Hofmann 分布类、广义负二项分布类、泊松-Tweedie 分布类的等价性，此基础上给出了 GPSJ_1 子类的合成假设检验。

第 11 章用非参数方法给出了反映离散程度的 Karl Pearson 散度系数的区间估计。

第三部分包括第 12 章和第 13 章，主要讨论了 GPSJ_2 分布类的有关问题。

第 12 章把 GPSJ_1 分布类推广到二维的情形，讨论了 GPSJ_2 分布类的定义、基本性质、边缘分布、最大似然估计、复合分布的递归算法等问题。 GPSJ_2 分布类具有许多优点：

(1) 把二维分布的最大似然估计问题简化为一维的情形，可以很快求得 GPSJ_2 分布类各参数的最大似然估计，从而使得模型拟合变得比较简单；

(2) 有稳定的算法可得到二维总赔付额分布。我们分两步给出了复合分布的递推公式，并对一些特殊的情形进行了分析。

(3) 包括许多已知的二维分布类。如传统的二维独立泊松分布、二维混合负二项分布、二维混合泊松-逆高斯分布、二维混合 Hofmann 分布等。

(4) 具有很自然的应用背景。对于一组同质的保单，用 K 表示在某一固定时间内的总赔付次数，而每次的赔付额 $W_i, i = 1, 2, \dots, K$ ，独立同分布且与 $K \sim \text{GPSJ}_1(\lambda_1, c, p)$ 独立。设保险公司的最大自留额为 τ ，令

$$N = \sum_{i=1}^K I(W_i \leq \tau), \quad M = \sum_{i=1}^K I(W_i > \tau)$$

那么, 二维随机变量 (N, M) 满足 GPSJ_2 模型, 其中 $\sigma_1 = P\{W_i \leq \tau\}$ 。

第 13 章讨论了 GPSJ_2 分布类的合成假设检验问题, 同时给出了检验统计量和渐近分布。

第四部分包括第 14 章和第 15 章, 重点是第 15 章, 它考虑了赔付额分布右尾的建模问题, 这一问题在再保险的高超额层选取及定价等问题上有重要意义。这里讨论的问题是如何选取好的统计模型来拟合较大的观测值, 为了这一目标, POT 方法是一个不错的选择。这一章根据极值理论, 用模拟的方法对这一估计过程进行检验, 同时指出了 POT 方法的若干优缺点。第 14 章给出了第 13 章的有关背景知识。

本书是“中央财经大学 121 人才工程青年博士发展基金”资助项目“非寿险业务准备金充足性研究”(项目编号: QBJ0602) 的阶段研究成果。

本书的出版首先感谢中央财经大学中国精算研究院孙宝文院长, 没有他的大力支持, 这本书是不可能与读者见面的。在本书的修改过程中, 我的研究生张晓会提出了许多宝贵意见, 在此表示感谢。另外, 我的同事董洪斌、张宁、周明、寇业富、姚海波、林光彬、欧阳和霞、李石保、刘达等人从许多方面给予了帮助, 在此一并表示感谢! 本书的出版得到中央财经大学学术著作出版基金的资助。在整个的写作过程中, 我的爱人刘姗从精神上给了我大力支持, 使我能够顺利完成本书稿。最后把诚挚的谢意献给本书的编辑——兰涛女士, 她在本书出版过程中付出了很多汗水。

目 录

第一部分 基础精算分布理论

第 1 章 基础知识介绍	3
1.1 相关数学公式及符号说明	3
1.1.1 二项系数	3
1.1.2 伽马函数、贝塔函数及 Digamma 函数	4
1.1.3 不完全伽马函数及不完全贝塔函数	7
1.2 概率相关知识介绍	10
1.2.1 特征函数	10
1.2.2 矩与矩母函数	10
1.2.3 概率母函数	12
1.2.4 概率理论中的各类收敛	14
1.3 其他	15
第 2 章 常见的赔付次数分布	18
2.1 泊松分布	18
2.1.1 左截尾泊松分布	20
2.1.2 右截尾泊松分布	21

2.2	二项分布	22
2.3	负二项分布	25
2.4	Logarithmic 分布	29
2.5	$(a, b, 0)$ 类	31
2.6	$(a, b, 1)$ 类	33
2.7	混合次数模型	39
2.7.1	混合泊松分布	42
2.7.2	混合二项分布	43
2.8	复合次数分布	44
2.9	泊松-二项分布	49
2.10	Neyman-A 分布	51
2.11	Polya-Aeppli 分布	53
2.12	泊松-Pascal 分布	54
 第3章 极大似然估计		57
3.1	极大似然估计的定义	57
3.2	极大似然估计的性质	58
3.3	极大似然估计的有效性	62
3.4	特殊情形下的 MLE	64
3.5	极大似然估计的数值解法	67
3.5.1	Newton-Raphson 算法	67
3.5.2	Fisher 得分法	69
3.5.3	计数分布极大似然估计的数值解法	70
3.5.4	部分复合计数分布的参数初值	72

第 4 章 用于模型拟合的假设检验方法	75
4.1 似然比检验	75
4.2 Pearson χ^2 检验	78
4.3 其他检验方法	79
4.3.1 Kolmogorov-Smirnov 检验	79
4.3.2 罚似然值法	80
4.3.3 Wald 检验法	81
4.3.4 得分检验法	83

第二部分 一维 GPSJ 赔付次数模型

第 5 章 泊松-Tweedie 分布类	87
5.1 简介	87
5.2 预备知识	89
5.3 泊松-Tweedie 模型	90
5.4 从 Bayesian 方法角度进行分析	94
5.5 数值例子	95
5.6 结论	99
第 6 章 GPSJ ₁ 分布类	100
6.1 简介	100
6.2 预备知识	102
6.2.1 参数混合泊松分布	102
6.2.2 几何变换	103
6.2.3 ESJ 函数类	104
6.2.4 EDP 变换及 IEDP 变换	110

6.2.5 伪复合泊松分布	116
6.3 GPSJ_1 赔付次数分布类	118
6.4 GPSJ_1 分布类的性质	126
6.5 GPSJ_1 分布类下总赔付额的计算公式	131
6.6 GPSJ_1 的极大似然估计	134
6.7 实例	139
第7章 GPSJ_1 分布类的无赔款优待系统	141
7.1 简介	141
7.2 背景知识	142
7.2.1 保费定价原理	142
7.2.2 无赔款优待系统的数学模型	143
7.2.3 GPSJ_1 分布类	146
7.2.4 参数混合泊松模型	148
7.2.5 非参数混合泊松模型	149
7.3 GPSJ_1 下的无赔款优待系统	151
7.3.1 GPSJ_1 过程	151
7.3.2 最优无赔款优待系统	154
7.3.3 零效用原理下的无赔款优待系统	155
7.4 实例	156
7.5 结论	158
第8章 GPSJ_1 分布类的稳定性	160
8.1 引言	160
8.2 无穷阶非同质递归方程	162

8.3	经验膨胀因子	166
8.4	GPSJ ₁ 分布类的稳定性	168
8.4.1	三个递归方程稳定性的理论分析	168
8.4.2	用模拟方法分析方程的稳定性	171
8.5	结论	176
第 9 章	GPSJ₁ 分布类的合成假设检验	177
9.1	简介	177
9.2	背景知识	178
9.3	GPSJ ₁ 合成假设检验	180
9.4	泊松-逆高斯、SJ 分布类合成假设检验	183
9.5	实例	185
第 10 章	一类无穷可分分布的合成假设检验	187
10.1	简介	187
10.2	预备知识	188
10.2.1	GPSJ ₁ 分布类	188
10.2.2	几种用来拟合赔付次数的无穷可分分布	190
10.3	一类无穷可分分布	192
10.4	合成假设检验	195
10.5	实例	201
10.6	结论	202
第 11 章	变异系数的区间估计	203
11.1	简介	203

11.2	渐近分布	204
11.3	实例	206
11.4	保费的变异系数	207

第三部分 多维 GPSJ 赔付次数模型

第 12 章	GPSJ ₂ 分布类	211
12.1	简介	211
12.2	预备知识	212
12.2.1	多维几何变换	212
12.2.2	ESJ 函数类	214
12.2.3	GPSJ ₁ 分布类	215
12.2.4	多维 EDP 变换及 IEDP 变换	215
12.2.5	多维伪复合泊松分布	221
12.3	GPSJ ₂ 分布类	222
12.4	GPSJ ₂ 模型的边缘分布	231
12.5	参数的极大似然估计	235
12.6	应用实例	237
12.7	结论	238
第 13 章	GPSJ ₂ 分布类的合成检验	240
13.1	简介	240
13.2	预备知识	242
13.2.1	GPSJ ₁ 分布类的定义	242
13.2.2	GPSJ ₂ 分布类的定义	242
13.2.3	GPSJ ₂ 分布类的性质	243

13.2.4 阶序	244
13.3 渐进分布	245
13.4 实例	249

第四部分 对损失分布尾部特征的研究

第 14 章 损失分布的尾部特征	253
第 15 章 用 POT 方法估计损失分布尾部的效应分析	260
15.1 引言	260
15.2 极值理论	261
15.2.1 广义极值分布	261
15.2.2 Fisher-Tippett 定理	262
15.2.3 广义 Pareto 分布 (GPD)	264
15.2.4 PBdH 定理	264
15.2.5 尾部拟合	265
15.2.6 统计特性	266
15.3 损失额模型	267
15.3.1 背景	267
15.3.2 Monte Carlo 模拟试验	268
15.4 数据分析	269
15.4.1 探索性数据分析	269
15.4.2 估计形状参数	271
15.4.3 对高于临界值的超额数据进行拟合	274
15.4.4 有关定价的计算	274
15.4.5 对数据的敏感性分析	278

15.5 讨论	279
附录 A 由已知分布产生新分布的方法	281
附录 B 常见的损失分布	285
附录 C COPULA 的有关理论	302
附录 D MCMC 方法	305
参考文献	307

表格目录

表 2.1	$(a,b,0)$ 所包含的分布	32
表 2.2	$(a,b,1)$ 所包含的分布	36
表 2.3	$(a,b,1)$ 中所包含分布间的关系	39
表 4.1	Kolmogorov-Smirnov 检验临界值	80
表 5.1	c 和 ζ 的关系	91
表 5.2	泊松-Tweedie 分布类的概率母函数	92
表 5.3	汽车赔付次数数据	96
表 5.4	拟合 Bühlmann 数据组	97
表 5.5	拟合 Hossack 等的数据组	98
表 6.1	赔付次数的统计数据及拟合值	140
表 6.2	各种模型的拟合效果	140
表 7.1	赔付次数统计数据及拟合值	156
表 7.2	GPSJ ₁ 分布类的最优 BMS	157

表 7.3	零效用原理下 GPSJ_1 的 BMS	158
表 9.1	赔付次数统计表	185
表 10.1	赔付次数统计表	201
表 11.1	赔付次数统计表	207
表 12.1	观测值和理论值对照表	237
表 12.2	χ^2 检验对照表	238
表 13.1	赔付次数统计表	250
表 15.1	不同临界值下的分位数的估计值	273
表 15.2	两种不同方案推理的结果比较	278
附录 C 表 1	单参数 copula 族	303