實用工場數學

工場幾何三角學

駱塞諾夫著

余德星　王冰譯

商務印書館

譯　序

幾何學和三角術是數學中的基本學科，也是工場、工具間、製圖室、設計室和檢驗室中解決許多實際問題時所必需的工具——譬如劃線、度量、估重、製圖等，若離開這些基本的常識，便覺無從着手。

關於幾何學和三角術，不論是教科書或參考書，出版的已不在少數；但是一般的書籍，或者是材料太多，閱讀費時；或者是和實際問題缺乏聯系，應用困難，不能適應一般實際工作者的需要。

本書的原作者便是針對着實際需要而編寫這本書的。所以，聯系實際，可以說是本書最大的特點。

本書內容共分三章：第一章敘述平面幾何的定理，舉出這些定理在實際問題中的應用；第二章着重討論圓和作圖問題，以及求平面圖形的面積和立體幾何學中求體積的問題；第三章廣泛討論三角術在工場實際問題中的應用。每章後面附有許多實際應用問題，供讀者練習。

書末更附有各種有用的表，可作計算問題時查閱之用。

余滋基　　王　冰

目　　錄

第一章　幾何學

遠在埃及和巴比倫時代，便有了幾何這門科學。到現在這門科學已經廣泛地應用於各工場和工具間中。本章將舉出某些重要的幾何實義以及這些實義在工場和工具間中的應用。

每一實質物體必佔有一限定空間。幾何便是討論這些實質物體所佔空間的科學。

平面幾何學係研究在一平面上點和線所構成的圖形；立體幾何學爲研究具有長、寬、厚、三度的立體或圖形。

一　平面幾何學常見的名詞

幾何學中許多應用的名詞，簡單地予以解釋，以便讀者易於應用。

一實質物體從其周圍空間劃分出來的限界，稱爲這一物體的表面。表面有時簡稱爲面。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook

點爲線的這一部分和那一部分的交界，或者是兩條線或多數線的交界。點有一定的位置，但是沒有長度、寬度或厚度。

線爲面的限界，或者是兩個面或多數面的交界。線有一定的位置，而且只有一個向度，即長度。線的方向始終不變的，稱爲直線。方向隨時改變的，稱爲曲線。由數條不同方向的直線連接而成的線，便是折線。

點運動的結果，可以生成一線。而線運動的結果，可以生成一面。

在一平面上，任何二點間，可以用一直線連接，且此直線完全在此平面上。但在曲面上則不然。

兩直線相交於一已知點，便成爲角。兩直線的交點爲角的頂；這兩直線爲角的邊。

角可用寫在頂點傍的一個字母表示，或者用寫在兩邊間的小寫字母表示，或者用三個字母表示。當用三個字母表示時，係用頂點及兩邊的字母。頂點的字母常寫在其他兩個字母的中間。如圖 1—1 中的角 ABC，B 爲頂點，AB 和 BC 爲兩邊。

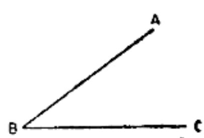


圖 1—1

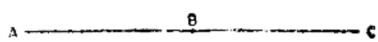


圖 1—2

角的兩邊，若在一直線上，從其頂點，引向反對方向，則此角便是平角。如圖 1—2 所示，AB 和 BC 爲角的兩邊，B 爲頂點。

兩角有一共同邊和共同的頂點，這兩個角便稱爲鄰角。如圖 1—3，ABC 和 CBD 卽爲鄰角。BC 爲共同的邊，B 爲共同的頂點。

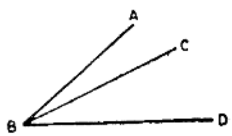


圖 1—3

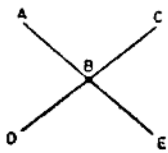


圖 1—4

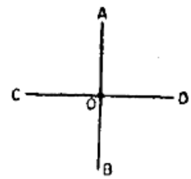


圖 1—5

兩直線相交於一點，自其交點向相反方向引伸，所成的兩角稱爲對頂角。對頂角有一共同的頂點，如圖 1—4 所示，角 ABC 和 DBE，或 ABD 和 CBE 爲對頂角，其共同頂點爲 B。

爲簡便起見，本書將以符號 $\angle$ 表示角。

兩直線 AB 和 CD 相交，如所構成的鄰角相等，這些角便是直角。如圖1—5，角 AOC, AOD, BOC 和 BOD 都是直角。

角的量度以度(°)表示，每一度爲一直角的 $\frac{1}{90}$。所以，直角等於 90°，平角等於 180°。每度再分爲 60 個更小的單位，稱爲分(′)。每分又再分爲更小的單位，稱爲秒(″)。每

分等於 60 秒。

小於 90° 的角，稱爲銳角；大於 90° 的角，稱爲鈍角。

如果兩角之和等於一直角(90°)，則此兩角互爲餘角。

如果兩角之和等於一平角(180°)，則此兩角互爲補角。

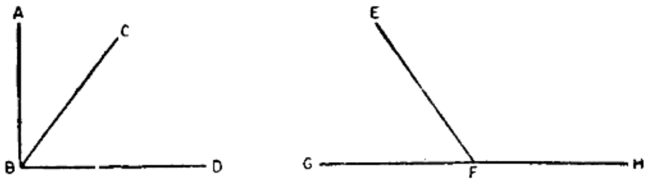


圖 1—6

在圖 1—6 中，$\angle ABC$ 和 $\angle CBD$ 互爲餘角，$\angle EFG$ 和 $\angle EFH$ 互爲補角。

在一平面內有兩直線，若其相互間的距離，處處相等，這兩直線便是平行線。如圖 1—7、AB 和 CD 卽爲平行線，寫作 $AB \parallel CD$。

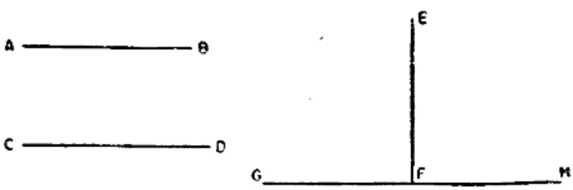


圖 1—7

當兩直線相交而構成直角時，此兩直線卽互爲垂線。在圖 1—7 中，EF 和 GH 相互垂直，寫作 $EF \perp GH$。

二　平面幾何圖形

平面幾何圖形爲有一定限界的平面，卽用三角形的直邊置於圖上，可以點點與圖形接觸。這些平面圖形是以直線或曲線爲其限界。如限界都是直線，便叫做多邊形，並依照每一多邊形的邊或角的數目，稱其爲幾邊形或幾角形。

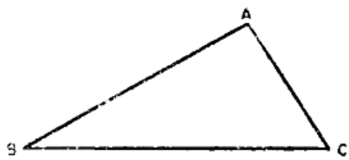


圖 1—8

由三邊構成的平面圖形爲三角形，如圖 1—8 的 ABC，以符號△表示。

任何三角形中三內角之和等於 180°。本章後部將證明這一定理。

應用 $S=180^\circ\times(N-2)$ 這一簡單公式，可求得任何多邊形中各內角的和。$S=$ 多邊形中各內角之和的度數，$N=$ 多邊形的邊數。例如，八邊形中各內角之和等於 $180^\circ\times(8-2)=180^\circ\times6=1080^\circ$。本章後部將證明這一定理。

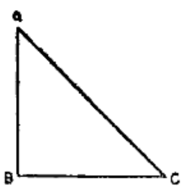


圖 1—9

一直角三角形中有一角爲直角，如圖 1—9 所示，$\angle ABC$ 爲一直角。其對直角之邊爲斜邊，他兩邊稱爲底和高。底爲設想這一三角形立於其上的邊。

在一斜三角形中，如圖 1—10，沒有一個角爲直角。

在任意三角形中，如圖 1—10，AC 爲底，BD 爲高。

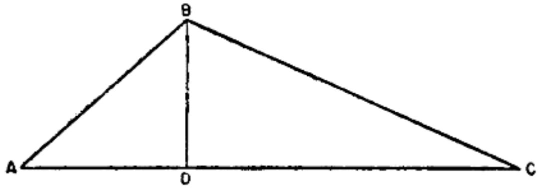


圖 1—10

有兩邊相等的三角形爲等腰三角形；與兩等邊相對的兩個角也相等。如圖 1—11 所示，AB 邊和 AC 邊相等，$\angle ABC = \angle ACB$。

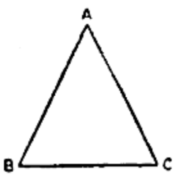


圖 1—11

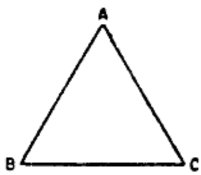


圖 1—12

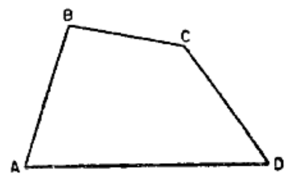


圖 1—13

三邊都相等的三角形爲等邊三角形；等邊三角形的三個角也都相等。三角都相等的三角形爲等角三角形；等角三角形的三邊也都相等。如圖 1—12 所示。

四邊形爲多邊形的一種，如圖 1—13 所示。如四邊形的四邊和四角都相等，這一四邊形便是正方形。如四邊形的對邊平行，四角爲直角，這一四邊形便是長方形。在圖 1—14 中，$ABCD$ 爲一正方形，$EFGH$ 爲一長方形。

兩對對邊互相平形的四邊形爲平行四邊形。在圖 1—

14 中所示的正方形和長方形只是平行四邊形的特例。其他

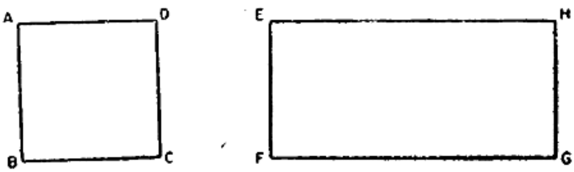


圖 1—14

的平行四邊形,如圖 1—15 所示。$ABCD$ 的四邊不都相等,稱爲長斜方形;$EFGH$ 的四邊都相等,稱爲菱形。

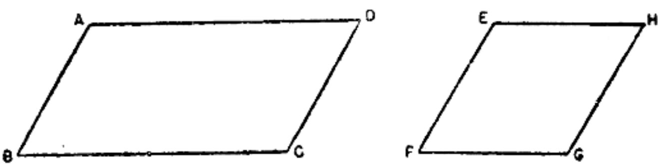


圖 1—15

如只有一對對邊平行的四邊形,稱爲梯形,如圖 1—16。

如對邊都不平行的四邊形,稱爲不規則四邊形,如圖 1—17。

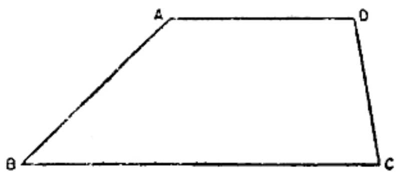


圖 1—16

除三角形外,任何多邊形中,連接不相鄰的兩頂點的直線爲對角線 如圖 1—17 中,AC 即爲一對角線。

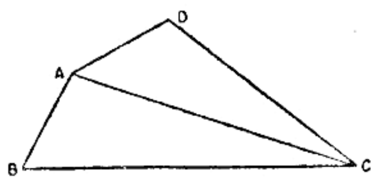
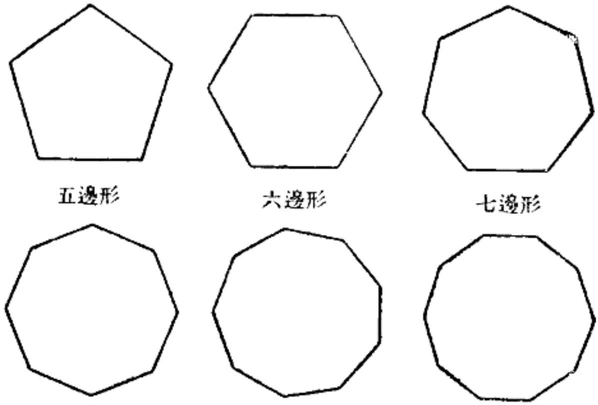


圖 1—17

其他多邊形,如五

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

邊形、六邊形、七邊形、八邊形、九邊形和十邊形都顯示於圖1—18中。



五邊形　六邊形　七邊形

八邊形　九邊形　十邊形

圖 1—18

在一正多角形中，各邊都相等，各角也都相等。等邊三角形和正方形都是正多角形。

一多邊形所有邊之和，稱為這多邊形的周。

用曲線圍成的平面幾何圖形，將於本章後部加以討論。

三　公理和定理

在幾何學中的某些陳述，理由非常明顯，可以不需要證明，便能被我們接受，這些基本的真理稱為公理。有些權威人士將公理和公設分開；認為公理係一般事物中的基本真理，而特別有關於幾何學的公理則稱為公設。本書中對於

公理和公設不加區別。然而,必須注意,公理 9 和 10 也可以稱爲公設。

需要用公理和已證明的陳述,按照推理程序來證明的陳述,稱爲定理。爲簡明起見,我們將定理分爲三類:一般定理、三角形定理和圓定理,以便讀者在證明別的定理時參考。

從一公理或已證明的定理,直接推演出來的陳述,稱爲系。

公理 有些在幾何中常用的公理在代數學中也曾討論過 現在將幾何學中的公理列舉於下:

1. 等量加等量,其和必等。
2. 等量減等量,其差必等。
3. 等量以同數乘之,其積必等。
4. 等量以同數除之,其商必等。
5. 幾個量各和某一量相等,則這幾個量必彼此相等。
6. 在數學式中,任一量可用其等量代替。
7. 全量等於其各分量之和。
8. 全量大於其任一分量。
9. 兩點間只能作一直線。
10. 通過一已知點,只能作一直線和另一直線平行。

從公理 9,可直接推演出一系如下:

兩直線只能相交於一點。

從公理 10，可推得另一系如下：

兩直線都平行於第三直線，則此兩直線互相平行。

一般定理 幾何學中常用的一般定理列舉如下：

定理 1. 從已知直線外一已知點，僅可作一直線垂直於此已知線，且此垂線爲已知點與已知線間的極短線。

已知：如圖 1—19 所示，AB 爲一直線，C 爲線外一點，$CD \perp AB$。

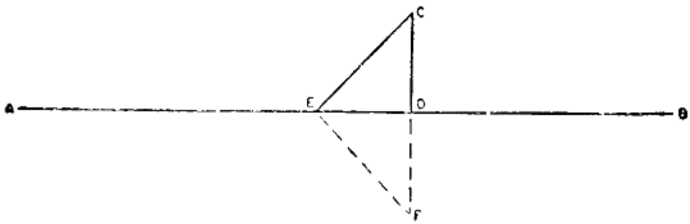


圖 1—19

求證：CD 爲唯一的垂線，且爲 C 與直線 AB 間的極短線。

證：任意作一直線 CE 而證明 CE 不垂直於 AB。將 CD 延長至 F 並使 $DF=CD$，聯結 EF，得 $\triangle CDE$ 和 $\triangle EDF$。ED 爲兩三角形的公用邊，$CD=DF$，$\angle CDE$ 和 $\angle EDF$ 都是直角，必相等。$\therefore$ 這兩個三角形全等(本章後部將證明這一定理)，$\angle CED$ 和 $\angle DEF$ 相等(符號 $\therefore$ 代表"所以"以後將繼續使用)。

因爲 $\angle CEF$ 不等於 $180°$，$\angle CED$ 不等於 $90°$，即

$\angle CED$ 不是直角，因 $\angle CED=\frac{1}{2}\angle CEF$。根據這一證明，我們可以斷定 CE 不垂直於 AB。同理，任何另一直線與 AB 所成的交角不等於直角時，即不與 AB 線垂直。$\therefore CD$ 是垂直於 AB 的唯一直線。

欲證明 CD 線爲極短線，將 CDF 線與 CEF 線加以比較，則可發現 CDF 比 CEF 短（公理 9）。因爲 $CD=\frac{1}{2}CDF$，$CE=\frac{1}{2}CEF$，所以 CD 比 CE 短，可寫爲 $CD<CE$（公理 4）。同理，可證明其他任何線都比垂線 CD 長。

註：符號<表示"小於"，而符號>表示"大於"。

定理 2.　兩直線相交，對頂角相等。

已知：兩直線 AB, CD 相交於點 E，如圖 1—20 所示。

求證：對頂角 $\angle AEC=\angle BED$，$\angle AED=BEC$。

證：$\angle AEC$ 和 $\angle AED$ 互爲補角。$\angle BED$ 和 $\angle AED$ 互爲補角。$\therefore \angle AEC=\angle BED$。

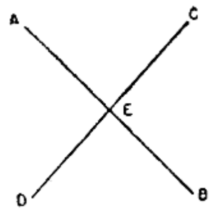


圖 1—20

同理可證 $\angle AED=\angle BEC$。

定理 3.　在一平面內，兩直線垂直於同一直線，則該兩直線互相平行。

已知：如圖 1—21 所示，AB, CD 二直線各 $\perp$ 於直線 EF。

求證：$AB \parallel CD$。

證：假定直線 AB 和 CD 並不互相平行，將其向圖的右方延長而交於一點。在這種假定下，將有：自一點至直線 EF 可作二垂線。這一情況和定理 1 不相符合，因爲定理 1 說明：自一點至一直線只可作一垂線。所以，我們可以得出結論：AB 和 CD 必須平行。由圖 1—21 也可以看出 AB 和 CD 永不相交。

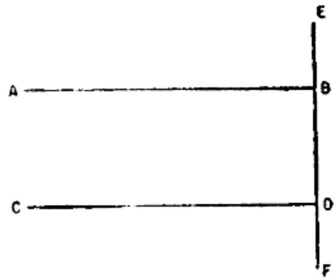


圖 1—21

定理 4. 如兩平行線中的一直線垂直於一已知線時，則另一線也必垂直於此已知線。

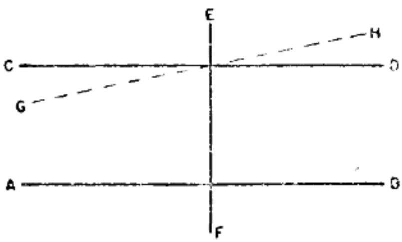


圖 1—22

已知：如圖 1—22 所示，AB 和 CD 互相平行，$AB \perp EF$。

求證：CD 也垂直於 EF。

證：如圖 1—22 所示，假定 CD 不⊥於 EF，而 $GH \perp EF$。根據定理 3，兩直線垂直於同一直線時，則該兩直線互相平行，所以 $GH \parallel AB$。但根據已知條件 $AB \parallel CD$。$\therefore GH$ 和 CD 必須重合。因爲 GH 原假設爲⊥於 EF，CD 自然也⊥於 EF（公理 10）。

定理 5. 兩平行線爲另一直線所截，其内錯角必等。

已知：如圖 1—23 所示，兩平行線 AB, CD 爲一截線 EF 所截。

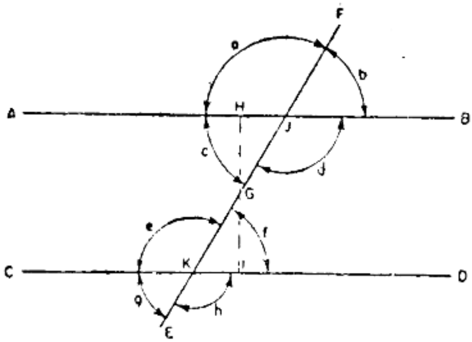


圖 1—23

求證：$\angle c=\angle f$, $\angle d=\angle e$。

註：在圖 1—23 中，角 a, b, g 和 h 稱爲外角，角 c, d, e 和 f 爲内角。角 a 和 h 及 b 和 g 稱爲外錯角。角 c 和 f 及 d 和 e 稱爲内錯角。角 a 和 e, c 和 g, b 和 f, 及 d 和 h 稱爲同位角。

證：通過 JK 的中點 G，作一直線 $HI \perp AB$。依照定理 4，這一直線也 $\perp$ 於 CD。考慮直角 $\triangle GHJ$ 和 $\triangle GIK$。因 $\angle GHJ$ 和 $\angle GIK$ 都是直角，相等。$\angle HGJ$ 和 $\angle IGK$ 爲對頂角，也相等（定理 2）。G 爲 JK 中點，$GJ=GK$。$\therefore \triangle GHJ$ 和 $\triangle GIK$ 全等，將在本章以後證明，且其對應角和邊也各相等。所以 $\angle c=\angle f$。角 d 和 e 按照對應的次序爲角 c 和 f 的補角；所以，角 d 和 e 也必然相等。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com