二阶抛物型偏微分方程

辜联崑　编著

厦门大学出版社

本书承福建省自然科学基金会赞助出版

二阶抛物型偏微分方程

辛联崑　编著

厦门大学出版社

[闽]新登字 09 号

二阶抛物型偏微分方程

辜联崑 编著

*

厦门大学出版社出版发行

厦门大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 12.375 印张 315 千字

1995 年 9 月第 1 版 1995 年 9 月第 1 次印刷

印数:1－2000 册

ISBN 7－5615－1071－3/O·63

定价:12.80 元

内 容 简 介

本书系统地介绍线性及非线性二阶抛物型偏微分方程的基本理论，着重介绍定解问题的各种先验估计方法和解的存在唯一性及正则性。全书共十章，循序渐进地讨论热传导方程、线性方程、拟线性方程及完全非线性方程定解问题的可解性，阐述 Schauder 估计、L_p 估计、De Giorgi—Nash 估计及 Krylov—Safonov 估计等各种先验估计方法。书中还给出一些泛函分析材料，包括若干基本空间、Sobolev 空间及嵌入定理、不动点原理等预备知识，以便读者阅读。

本书可作为大学数学系研究生教材，也可供数学系及有关专业的学生、教师及[redacted]工作者参考。

基 本 符 号

$\mathbb{R}^n$	n 维欧氏空间，点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$\lvert x\rvert=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$
$\mathbb{R}^n_+$	$\mathbb{R}^n$ 的半空间 $=\{x\in\mathbb{R}^n,x_n>0\}$
Ω	$\mathbb{R}^n$ 的有界区域，其边界为 $\partial\Omega$
$d(x,y)$	点 x 与 y 的距离 $=\lvert x-y\rvert=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$
$d(x,\Omega)$	点 x 与 Ω 的距离 $=\inf\limits_{y\in\Omega}\lvert x-y\rvert$
Ω_δ	$\{x\in\Omega,d(x,\partial\Omega)>\delta\}$
d_x,d_{xy}	$d_x=d(x,\partial\Omega),d_{xy}=\min(d_x,d_y)$
Q_T,S_T	$Q_T=\Omega\times(0,T],S_T=\partial\Omega\times(0,T]$
Γ_T	Q_T 的抛物边界 $=S_T\cup\{(x,t),x\in\overline{\Omega},t=0\}$
Q_T^δ	$\Omega_\delta\times(\delta^2,T]$
$d(P,Q)$	点 $P(x,t)$ 与 $Q(y,\tau)$ 的抛物距离 $=(\lvert y-x\rvert^2+\lvert t-\tau\rvert)^{\frac{1}{2}}$
$d(P,\Gamma_T)$	点 P 到 Γ_T 的抛物距离 $=\inf\limits_{Q\in\Gamma_T}d(P,Q)$
$d_P,d_{P,Q}$	$d_P=d(P,\Gamma_T),d_{P,Q}=\min(d_P,d_Q)$
$B_\rho(x^0)$	以 x^0 为心，ρ 为半径的球 $=\{x\mid \lvert x-x_0\rvert<\rho\}$
$R_\rho(x^0,t^0)$	$B_\rho(x^0)\times\{t^0-\rho^2<t\leqslant t^0\}$ 或 $B_\rho(x^0)\times\{t^0<t\leqslant t^0+\rho^2\}$
$K_R(x^0)$	以 x^0 为中心的长方体 $=\{x\mid \lvert x_i-x_i^0\rvert<R,i=1,\cdots,n\}$
$K_{R,\tau}(x^0,t^0)$	$K_R(x^0)\times\{t^0-\tau<t\leqslant t^0\}$ 或 $K_R(x^0)\times\{t^0<t\leqslant t^0+\tau\}$
$\subset\subset$	$A\subset\subset B$ 表示 $\overline{A}\subset B$
$\lvert A\rvert$	表示集合 A 的测度 $\mathrm{mes}A$
ω_n	$\mathbb{R}^n$ 的单位球体积 $=2\pi^{\frac{n}{2}}/n\Gamma(\frac{n}{2})$，面积为 $n\omega_n$
u_x	$u_x=D_xu=(u_{x_1},\cdots,u_{x_n})=(D_1u,\cdots,D_nu),D_iu=D_{x_i}u$ $\lvert u_x\rvert=\lvert D_xu\rvert=\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}u_{x_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}$
u_{xx}	$u_{xx}=D_x^2u=(u_{x_ix_j})=(D_{x_ix_j}u)=(D_{ij}u)$，$\lvert u_{xx}\rvert=\lvert D_x^2u\rvert=\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}u_{x_ix_j}^2\right)^{\frac{1}{2}}$
$D^\beta u$	或 $D_x^\beta u$，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 为多重指标，$\beta_i=$ 整数 $\geqslant 0$，$\lvert\beta\rvert=\sum\beta_i$，$D^\beta u=$ $D_x^\beta u=\dfrac{\partial^{\lvert\beta\rvert}u}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}$
D_x^su	s 为非负整数，D_x^su 为 u 关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的任意 s 阶偏导数

$D_t^r D_x^s u$	r 为非负整数，$D_t^r u=\dfrac{\partial^r u}{\partial t^r}$，$D_t^r D_x^s u=D_t^r(D_x^s u)$
p,r	$p=(p_1,\cdots,p_n)$，$\lvert p\rvert=\left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$，$r=(r_{ij})$，$\lvert r\rvert=\left(\sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$
$F(x,t,z,p,r)$	$F(x_1,\cdots,x_n,t,z,p_1,\cdots,p_n,r_{11},\cdots,r_{ij},\cdots,r_{nn})$
$F(x,t,u,u_x,u_{xx})$	$F(x_1,\cdots,x_n,t,u,u_{x_1},\cdots,u_{x_n},u_{x_1x_1},\cdots,u_{x_ix_j},\cdots,u_{x_nx_n})$
	同样可定义 $a(x,t,z,p)$，$a(x,t,u,u_x)$
$C(\Omega)(\overline{\Omega})$	$\Omega(\overline{\Omega})$ 上连续的函数集合. 同样可定义 $C(Q_T)$，$C(\overline{Q}_T)$
$C^k(\Omega)(\overline{\Omega})$	$\{u\mid D^\beta u\in C(\Omega)(\overline{\Omega}),0\leqslant\lvert\beta\rvert\leqslant k,k$ 为非负整数$\}$. $C^0(\Omega)\triangleq C(\Omega)$
$C^k(Q_T)(\overline{Q}_T)$	$\{u\mid D_t^r D_x^s u\in C(Q_T)(\overline{Q}_T),0\leqslant r+s\leqslant k\}$
$C^{2k,k}(Q_T)(\overline{Q}_T)$	$\{u\mid D_t^r D_x^s u\in C(Q_T)(\overline{Q}_T),0\leqslant 2r+s\leqslant 2k\}$
$[u]_{\alpha,\Omega}$	$[u]_{\alpha,\Omega}=\sup\limits_{x\neq y,x,y\in\Omega}\dfrac{\lvert u(x)-u(y)\rvert}{\lvert x-y\rvert^\alpha}$，$0<\alpha\leqslant 1$
$C^\alpha(\Omega)$	$\{u\mid[u]_{\alpha,\Omega}<\infty\}$，$0<\alpha<1$
$\mathrm{Lip}(\Omega)$	$\{u\mid[u]_{\alpha,\Omega}<\infty \quad \alpha=1\}$
$C^{k,\alpha}(\Omega)$	$\{u\in C^k(\Omega),D^k u\in C^\alpha\}$， $0<\alpha\leqslant 1$
$C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$	$\{u\mid[u]_{\alpha,Q_T}=\sup\limits_{P\neq Q,P,Q\in Q_T}\dfrac{\lvert u(P)-u(Q)\rvert}{(d(P,Q))^\alpha}<\infty,0<\alpha\leqslant 1\}$
$C^{2k+\alpha,k+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$	$\{u\mid u\in C^{2k,k}(Q_T),D_t^r D_x^s u\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q_T),2r+s=2k,0<\alpha\leqslant 1\}$
$\lvert u\rvert_{0,\Omega}$	$=\sup\limits_{\Omega}\lvert u\rvert$； $\lvert u\rvert_{0,Q_T}=\sup\limits_{Q_T}\lvert u\rvert$
$\lvert u\rvert_{\alpha,\Omega}$	$=\lvert u\rvert_{0,\Omega}+[u]_{\alpha,\Omega}$； $\lvert u\rvert_{0,Q_T}=\lvert u\rvert_{0,Q_T}+\lvert u\rvert_{\alpha,Q_T}$
$\lvert u\rvert_{k,\Omega}$	$=\lvert u\rvert_{0,\Omega}+\sum\limits_{j=1}^{k}\lvert D^j u\rvert_{0,\Omega}$； $\lvert u\rvert_{k,Q_T}=\lvert u\rvert_{0,Q_T}+\sum\limits_{j=1}^{k}\lvert D^j u\rvert_{0,Q_T}$
$\lvert u\rvert_{k+\alpha,\Omega}$	$\lvert u\rvert_{k,\Omega}+\sum\limits_{k}[D^k u]_{\alpha,Q}$，$\sum\limits_{k}$ 表示对 $k_1+\cdots+k_n=k$ 的 k_i 求和
$\lvert u\rvert_{2k,Q_T}$	$=\lvert u\rvert_{0,Q_T}+\sum\limits_{2k}\sum\limits_{2r+s=1}^{2k}\lvert D_t^r D_x^s u\rvert_{0,Q_T}$
$\lvert u\rvert_{2k+\alpha,Q_T}$	$=\lvert u\rvert_{2k,Q_T}+\sum\limits_{2r+s=2k}[D_t^r D_x^s u]_{\alpha,Q_T}$
$\mathrm{supp}\, u$	u 的支集$=\{x\in\Omega,u(x)\neq 0\}$的闭包
$C_0^k(\Omega)$	$\{u\in C^k(\Omega)$并具有紧支集$\}$
$\dot{C}^k(Q_T)$	$\{u\in C^k(Q_T)$并在 Γ_T 附近为 $0\}$
$L_p(\Omega)$	Ω 上 p 次可积的可测函数集合，$p\geqslant 1$，范数为
	$\lVert u\rVert_{L_p(\Omega)}=\lVert u\rVert_{p,\Omega}=\left\{\int_\Omega\lvert u\rvert^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$
	$\lVert u\rVert_{L_\infty(\Omega)}=\lVert u\rVert_{\infty,\Omega}=\sup\limits_{\Omega}\lvert u\rvert$
$L_{p,r}(Q_T)$	$\{u\mid\lVert u\rVert_{L_{p,r}(Q_T)}<\infty\}$，范数为
	$\lVert u\rVert_{L_{p,r}(Q_T)}=\lVert u\rVert_{p,r,Q_T}=\left\{\int_0^T\left[\int_\Omega\lvert u\rvert^p dx\right]^{\frac{r}{p}}dt\right\}^{\frac{1}{r}}$，$L_p(Q_T)=L_{p,p}(Q_T)$

$W_p^k(\Omega)$	$\{u \mid$ 弱导数 $D^\beta u\in L_p(\Omega),0\leqslant\lvert\beta\rvert\leqslant k\}$，范数为 $\lVert u\rVert_{W_p^k(\Omega)}=\sum_{\lvert\beta\rvert\leqslant k}\lVert D^\beta u\rVert_{L_p(\Omega)}$
$W_p^{2k,k}(Q_T)$	$\{u \mid$ 弱导数 $D_t^rD_x^s u\in L_p(Q_T),0\leqslant 2r+s\leqslant 2k\}$，范数为 $\lVert u\rVert_{W_p^{2k,k}(Q_T)}=\sum_{j=0}^{2k}\sum_{2r+s=j}\lVert D_t^rD_x^s u\rVert_{L_p(Q_T)}$
$W_2^{1,1}(Q_T)$	$\{u \mid u\in L_2(Q_T)$，弱导数 $u_x,u_t\in L_2(Q_T)\}$，范数为 $\lVert u\rVert_{W_2^{1,1}(Q_T)}=\lVert u\rVert_{L_2(Q_T)}+\lVert u_x\rVert_{L_2(Q_T)}+\lVert u_t\rVert_{L_2(Q_T)}$
$W_2^{1,0}(Q_T)$	$L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$，范数为 $\lVert u\rVert_{W_2^{1,0}(Q_T)}=\lVert u\rVert_{L_2(Q_T)}+\lVert u_x\rVert_{L_2(Q_T)}$
$V_2(Q_T)$	$L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\cap W_2^{1,0}(\Omega)$，范数为 $\lVert u\rVert_{V_2(Q_T)}=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\lVert u(x,t)\rVert_{L_2(Q_T)}+\lVert u_x\rVert_{L_2(Q_T)}$
$V_2^{1,0}(Q_T)$	$C([0,T];L_2(\Omega))\cap W_2^{1,0}(Q_T)$
$\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)$	$C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W_p^k(\Omega)$ 的范数意义下的闭包
$\overset{\circ}{W}{}_p^{2k,k}(Q_T)$	在 S_T 附近为零的无穷次可微函数集合在 $W_p^{2k,k}(Q_T)$ 的范数意义下的闭包
$\overset{\bullet}{W}{}_p^{2k,k}(Q_T)$	在 Γ_T 附近为零的无穷次可微函数集合在 $W_p^{2k,k}(Q_T)$ 的范数意义下的闭包
	同样可定义 $\overset{\circ}{W}{}_p^{1,1}(Q_T)$，$\overset{\bullet}{W}{}_p^{1,1}(Q_T),\cdots,\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$，$\overset{\bullet}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$
$\partial\Omega\in C^{K,\alpha}$	对 $\forall\ x^0\in\partial\Omega$，存在一个邻域 $V(x^0)$ 及 1—1 映射 Ψ 使得
$\Omega\in C^{K,\alpha}$	(i) $\Psi(V(x^0)\cap\partial\Omega)\subset\partial\mathbb{R}_+^n$，(ii) $\Psi(V(x^0)\cap\Omega)\subset\mathbb{R}_+^n$，(iii) $\Psi\in C^{K,\alpha}(V(x^0))$，$\Psi^{-1}\in C^{K,\alpha}(D)$，$D=\Psi(V(x^0))$
内部一致锥条件	对 $\forall\ x\in\Omega$，存在一个以 x 为顶点，张角为 α，高为 h 的锥包含在 Ω 内，则称 Ω 满足内部一致锥条件
B_ρ 的截断函数 $\zeta(x)$	$\zeta(x)\in C_0(B_\rho)$ 具有分片连续导数且 $0\leqslant\zeta(x)\leqslant 1$
$\operatorname*{osc}_{\Omega} u$	$=\sup_{\Omega} u-\inf_{\Omega} u$
$\sup_{\Omega} u(\inf_{\Omega} u)$	本书表示本质上(下)确界 ess sup u (ess inf u)，即 u 在 Ω 除零测度子集外的上(下)确界. 如果 $u\in C(\bar{\Omega})$，则 $\sup_{\Omega} u=\max_{\Omega} u$，($\inf_{\Omega} u$($\min_{\Omega} u$
δ_i^j	Kronecker 符号，即 $\delta_i^i=1$，$\delta_i^j=0$ 当 $i\neq j$
u^+,u^-	$u^+=\max(u,0)$，$u^-=\min(u,0)$，$u=u^++u^-$，$\lvert u\rvert=u^+-u^-$
$\forall$	对于所有
$\searrow$	嵌入
$\triangleq$	右端是左端的定义
$a.e.$	几乎处处
▌	证毕、述毕

目　　录

第一章　预备知识

本章介绍偏微分方程理论所需的一些泛函分析材料，若干基本函数空间，特别是 Sobolev 空间及其性质，不动点原理等. 限于篇幅，有些结果没有给出证明.

§1.1　Banach 空间

设 $\mathscr{X}$ 是实线性空间，$\mathscr{X}$ 上的范数 $\|\cdot\|$ 是 $\mathscr{X}$ 上的实泛函，满足

(i)　$\forall\, x\in\mathscr{X}$，$\|x\|\geqslant 0$；$\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$；

(ii)　$\forall\, x\in\mathscr{X}$，$\alpha\in\mathrm{R}$，$\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$（齐次性）；

(iii)　$\forall\, x,y\in\mathscr{X}$，$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$（三角不等式）.

$\mathscr{X}$ 赋予范数后称为线性赋范空间. 定义度量

$$\rho(x,y)=\|x-y\|,\qquad \forall\, x,y\in\mathscr{X},$$

则 $\mathscr{X}$ 是度量空间. 如果 $\{x_n\}\subset\mathscr{X}$，$x\in\mathscr{X}$ 且 $\|x_n-x\|\to 0$，则称 x_n 收敛于 x；如果 $m,n\to\infty$ 时 $\|x_m-x_n\|\to 0$，则称 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列；如果 $\mathscr{X}$ 的每一个 Cauchy 序列都收敛，则称 $\mathscr{X}$ 是完备的. 完备的线性赋范空间称为 Banach 空间 $\mathscr{B}$.

设 $\mathscr{X}_1$，$\mathscr{X}_2$ 是线性赋范空间，称映射 $T:\mathscr{X}_1\to\mathscr{X}_2$ 为算子，特别称映射 $f:\mathscr{X}\to\mathrm{R}$ 为泛函. 称线性算子 T 有界，如果

$$\|T\|=\sup_{x\in\mathscr{X},\,x\neq 0}\frac{\|Tx\|_{\mathscr{X}_2}}{\|x\|_{\mathscr{X}_1}}<\infty. \tag{1.1}$$

容易证明线性算子 T 有界当且仅当 T 连续.

线性赋范空间 $\mathscr{X}$ 上的线性有界泛函全体构成的空间称为 $\mathscr{X}$ 的共轭空间，记为 $\mathscr{X}^*$，赋予范数

$$\|f\|_{\mathscr{X}^*}=\sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|_{\mathscr{X}}}, \tag{1.2}$$

则 $\mathscr{X}^*$ 是 Banach 空间.

$\mathscr{X}^*$ 的共轭空间 $\mathscr{X}^{**}$ 称为 $\mathscr{X}$ 的第二共轭空间. 对 $f\in\mathscr{X}^*$，定义 $\mathscr{X}^*$ 上的泛函 $J_xf\triangleq f(x)$. 不难验证 J_x 是线性的，所以 $J_x\in\mathscr{X}^{**}$ 且 $\|J_x\|_{\mathscr{X}^{**}}=\|x\|_{\mathscr{X}}$，于是由 $J_xf\triangleq f(x)$ 定义的 $x\to J_x$ 给出一个 $\mathscr{X}\to\mathscr{X}^{**}$ 的映射 $J:Jx=J_x$，它是保范、线性且一对一的. 一般 $\mathscr{X}\subset\mathscr{X}^{**}$，如果 $J\mathscr{X}=\mathscr{X}^{**}$，则称 $\mathscr{X}$ 是自反的. 自反的 Banach 空间具有一些更适用于微分方程理论所要求的性质.

设 T 是线性赋范空间 $\mathscr{X}_1$ 到 $\mathscr{X}_2$ 的有界线性算子，由

$$(T^*g)x=g(Tx),\quad g\in\mathscr{X}_2^*,\quad x\in\mathscr{X}_1 \tag{1.3}$$

定义一个从 $\mathscr{X}_2^*$ 到 $\mathscr{X}_1^*$ 的有界线性算子 T^*，称为 T 的共轭算子.

微分方程的存在定理常常归结为适当函数空间的算子的不动点存在问题.对 Banach 空间的算子方程,有下述的基本存在定理.

定理 1.1 (压缩映象原理) 设 T 是 Banach 空间 $\mathscr{B}$ 到自身的压缩映射,即

$$\| Tx - Ty \| \leqslant \theta \| x - y \|, \quad \forall\, x,y \in \mathscr{B}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{1.4}$$

则 T 存在唯一不动点,即 $Tx=x$ 存在唯一的解 $x\in\mathscr{B}$.

证明 用逐步逼近法.设 $x_0\in\mathscr{B}$,定义 $x_n=T^n x_0\in\mathscr{B}(i=1,2,\cdots)$.如果 $n\geqslant m$,由三角不等式有

$$\begin{aligned}\| x_n - x_m \| &\leqslant \sum_{i=m+1}^{n} \| x_i - x_{i-1} \| = \sum_{i=m+1}^{n} \| T^{i-1}x_1 - T^{i-1}x_0 \| \\ &\leqslant \sum_{i=m+1}^{n} \theta^{i-1} \| x_1 - x_0 \| \qquad (\text{由}(1.4)) \\ &\leqslant \frac{\theta^m}{1-\theta} \| x_1 - x_0 \| \to 0, \qquad \text{当 } m \to \infty.\end{aligned}$$

从而 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列,由 $\mathscr{B}$ 的完备性,它收敛于一个元素 $x\in\mathscr{B}$.由(1.4),T 显然是连续的,因此

$$Tx = \lim Tx_n = \lim x_{n+1} = x.$$

x 的唯一性直接由(1.4)得出. ▌

注 空间 $\mathscr{B}$ 用任一闭子集代替,定理仍成立.

有界线性算子的可逆性有时可通过另一类似算子的可逆性推得,这种方法称为连续性方法.

定理 1.2 (连续性方法) 设 $\mathscr{B}$ 是 Banach 空间.$\mathscr{X}$ 是线性赋范空间.T_0,T_1 是 $\mathscr{B}$ 到 $\mathscr{X}$ 的有界线性算子,对 $\forall\, \tau\in[0,1]$,令

$$T_\tau = (1-\tau)T_0 + \tau T_1.$$

如果存在正常数 C 使得

$$\| x \|_{\mathscr{B}} \leqslant C \| T_\tau x \|_{\mathscr{X}}, \quad \forall\, \tau \in [0,1], \tag{1.5}$$

则 T_1 把 $\mathscr{B}$ 映上 $\mathscr{X}$ 当且仅当 T_0 把 $\mathscr{B}$ 映上 $\mathscr{X}$.

证明 设对某 $s\in[0,1]$,T_s 是映上的,由(1.5)可得 T_s 是一对一的,所以逆映射 $T_s^{-1}:\mathscr{X}\to\mathscr{B}$ 存在.对 $\tau\in[0,1]$, $y\in\mathscr{X}$,算子方程 $T_\tau x=y$ 等价于方程

$$T_s x = y + (T_s - T_\tau)x = y + (\tau - s)(T_0 x - T_1 x).$$

因 T_s^{-1} 存在,此方程又等价于

$$x = T_s^{-1}y + (\tau - s)T_s^{-1}(T_0 - T_1)x \triangleq Tx.$$

如果 $|\tau-s|<\delta=[C(\|T_0\|+\|T_1\|)]^{-1}$,则由(1.5)易知映射 $T:\mathscr{B}\to\mathscr{B}$ 是压缩的,根据定理 1.1 可得对 $|s-\tau|<\delta$ 的 $\tau\in[0,1]$,所有映射 T_τ 是映上的.将$[0,1]$分为长度小于 δ 的小区间,容易推得只要对某固定的 $\tau\in[0,1]$(特别对 $\tau=0$ 或 $\tau=1$),T_τ 是映上的,则对一切的 $\tau\in[0,1]$,T_τ 也是映上的. ▌

现在引进线性赋范空间 $\mathscr{X}$ 的收敛概念.

(i) **强收敛(按范数收敛)**: 称 $\{x_n\}\subset\mathscr{X}$ 强收敛于 $x\in\mathscr{X}$,记作 $x_n\Rightarrow x$,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\| x_n-x \|=0$.

(ii) **弱收敛**：称$\{x_n\}\subset\mathscr{X}$弱收敛于$x\in\mathscr{X}$，记作$x_n\rightharpoonup x$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$，$\forall f\in\mathscr{X}^*$.

(iii) ***弱收敛**：设$f_n\in\mathscr{X}^*$，$f\in\mathscr{X}^*$，称$\{f_n\}$ *弱收敛于f，记作$w^*-\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，$\forall x\in\mathscr{X}$.

显然，如果强(弱)极限存在，必唯一. 强极限如果存在必是弱极限.

定义 1.1 紧集 设$\mathscr{M}$为Banach空间$\mathscr{B}$的子集，称$\mathscr{M}$为(弱)准紧的，如果任一序列$\{x_n\}\in\mathscr{M}$包含一个(弱)收敛子序列. 如果所有的(弱)极限元素都属于$\mathscr{M}$，则称$\mathscr{M}$是(弱)紧的.

有如下重要的判别法则.

定理 1.3 可分自反Banach空间的有界序列包含弱收敛子序列.

定义 1.2 紧映射 设$\mathscr{B}_1$及$\mathscr{B}_2$为Banach空间，如果连续映射$T:\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2$将$\mathscr{B}_1$的有界集映为$\mathscr{B}_2$的准紧集，则称$T$为紧映射.

§ 1.2 不动点定理

不动点定理在研究可解性问题时起关键作用，前节已介绍一个特殊的不动点定理，压缩映象原理，本节进一步介绍几个微分方程理论常用的不动点定理.

定理 2.1 Brouwer 不动点定理

设T是从$\mathbb{R}^n$中单位闭球到自身的连续映射，则T存在不动点.

证明见[7].

定理 2.2 Schauder 不动点定理

设$\mathfrak{S}$是Banach空间$\mathscr{B}$的一个紧凸集，T是从$\mathfrak{S}$到自身的连续映射，则T存在不动点.

证明 因$\mathfrak{S}$是紧的，对任意正整数k，存在有限个点$x_1,\cdots,x_N(N=N(k))$使得半径为$\frac{1}{k}$的球$B^i=B_{\frac{1}{k}}(x_i)(i=1,\cdots,N)$复盖$\mathfrak{S}$. 设$\mathfrak{S}_k\subset\mathfrak{S}$是$\{x_1,\cdots,x_N\}$的凸包，定义映射$J_k:\mathfrak{S}\to\mathfrak{S}_k$如下

$$J_kx=\frac{\sum\operatorname{dist}(x,\mathfrak{S}-B^i)x_i}{\sum\operatorname{dist}(x,\mathfrak{S}-B^i)}.$$

显然J_k连续且对任意的$x\in\mathfrak{S}$,

$$\|J_kx-x\|\leqslant\frac{\sum\operatorname{dist}(x,\mathfrak{S}-B^i)\|x_i-x\|}{\sum\operatorname{dist}(x,\mathfrak{S}-B^i)}<\frac{1}{k}. \tag{2.1}$$

映射$J_k\circ T$限制在$\mathfrak{S}_k$上时，是一个从$\mathfrak{S}_k$到自身的连续映射，按Brouwer不动点原理，它存在不动点$x^{(k)}$(注意$\mathfrak{S}_k$同胚于某欧氏空间中的一个闭球). 因$\mathfrak{S}$是紧的，所以$\{x^{(k)}\}$存在子序列(仍记为$\{x^{(k)}\}$)收敛到某$x\in\mathfrak{S}$. 我们证明x是T的不动点. 事实上，由(2.1)有

$$\|x^{(k)}-Tx^{(k)}\|=\|J_k\circ Tx^{(k)}-Tx^{(k)}\|<\frac{1}{k}.$$

因T是连续的，令$k\to\infty$得$Tx=x$. ▎

从证明中看出，只需 $T\mathfrak{G}$ 是准紧的，$\{x^{(k)}\}$ 就存在收敛子序列. 因此有

推论 2.3　设 $\mathfrak{G}$ 是 Banach 空间 $\mathscr{B}$ 的凸闭集，T 是 $\mathfrak{G}$ 到自身的连续映射，使得 $T\mathfrak{G}$ 是准紧的，则 T 存在不动点.

推论 2.4　设 $B=B_1(0)$ 是 $\mathscr{B}$ 中的单位球，T 是 $\overline{B}$ 到 $\mathscr{B}$ 的连续映射，它使 $T\overline{B}$ 是准紧的且 $T\partial B\subset B$，则 T 存在不动点.

证明　定义映射 $\tilde{T}$

$$\tilde{T}x=\begin{cases}Tx\ , & \text{当}\ \|Tx\|\leqslant 1,\\ \dfrac{Tx}{\|Tx\|}\ , & \text{当}\ \|Tx\|\geqslant 1.\end{cases}$$

显然 $\tilde{T}$ 是 $\overline{B}$ 到自身的连续映射，因 $T\overline{B}$ 是准紧的，所以 $\tilde{T}\overline{B}$ 也是准紧的，由推论 2.3，$\tilde{T}$ 存在不动点 x，又因 $T\partial B\subset B$，所以必有 $\|x\|<1$，因此 $x=Tx$. ▌

定理 2.5　**特殊的 Leray－Schauder 不动点定理**

设 T 是 Banach 空间 $\mathscr{B}$ 到自身中的紧映射，又设存在常数 $M>0$，使得对满足 $x=\sigma Tx$ 的所有 $(x,\sigma)\in\mathscr{B}\times[0,1]$ 都有

$$\|x\|_{\mathscr{B}}<M, \tag{2.2}$$

则 T 存在不动点.

证明　不失一般性可设 $M=1$. 定义映射 $\tilde{T}$

$$\tilde{T}x=\begin{cases}Tx\ , & \text{当}\ \|Tx\|\leqslant 1,\\ \dfrac{Tx}{\|Tx\|}\ , & \text{当}\ \|Tx\|\geqslant 1.\end{cases}$$

显然 $\tilde{T}$ 是 $\mathscr{B}$ 中单位闭球 $\overline{B}$ 到自身的连续映射. 因为 $T\overline{B}$ 是准紧的，所以 $\tilde{T}\ \overline{B}$ 也是准紧的，由推论 2.3，$\tilde{T}$ 存在不动点 x. 我们证明 x 也是 T 的不动点. 事实上，如设 $\|Tx\|\geqslant 1$，则当取 $\sigma=\dfrac{1}{\|Tx\|}$ 时 $x=\tilde{T}x=\sigma Tx$，因此 $\|x\|=\|\tilde{T}x\|=1$ 而与假设(2.2)矛盾，因此必须 $\|Tx\|<1$，从而 $x=\tilde{T}x=Tx$. ▌

注　由定理 2.5 可得：如果 T 是 $\mathscr{B}$ 到自身的紧映射，则不论(2.2)是否成立，总有一个 $\sigma\in(0,1]$，使 σT 存在不动点. 如果(2.2)成立，则对所有的 $\sigma\in[0,1]$，σT 存在不动点.

定理 2.6　Leray－Schauder **不动点定理**

设 $\mathscr{B}$ 是 Banach 空间，T 是从 $\mathscr{B}\times[0,1]$ 至 $\mathscr{B}$ 的紧映射，对所有的 $x\in\mathscr{B}$，都有 $T(x,0)=0$. 设存在正常数 M，使得对满足 $x=T(x,\sigma)$ 的所有 $(x,\sigma)\in\mathscr{B}\times[0,1]$ 都有

$$\|x\|_{\mathscr{B}}<M, \tag{2.3}$$

则映射 $T(x,1)$ 存在不动点.

证明　不失一般性可设 $M=1$. 对 $0<\varepsilon\leqslant 1$，定义一个从 $\mathscr{B}$ 中单位闭球 $\overline{B}$ 到 $\mathscr{B}$ 的映射

$$\tilde{T}x=\tilde{T}_\varepsilon x=\begin{cases}T\left(\dfrac{x}{\|x\|},\dfrac{1-\|x\|}{\varepsilon}\right)\ , & \text{当}\ 1-\varepsilon\leqslant\|x\|\leqslant 1,\\[2ex] T\left(\dfrac{x}{1-\varepsilon},1\right)\ , & \text{当}\ \|x\|<1-\varepsilon.\end{cases}$$

显然 $\tilde{T}$ 是连续的，由 T 的紧性知 $\tilde{T}\overline{B}$ 是准紧的，且 $\tilde{T}\partial B=0$，由推论 2.4，$\tilde{T}$ 存在不动点 $x(\varepsilon)$. 令

$$\varepsilon=\frac{1}{k},x_k=x\left(\frac{1}{k}\right),\sigma_k=\begin{cases}k(1-\|x_k\|) & , \quad 1-\frac{1}{k}\leqslant x_k\leqslant 1,\\ 1 & , \quad \|x_k\|<1-\frac{1}{k},\end{cases}$$

其中 $k=1,2,\cdots$. 由 T 的紧性，存在一个子序列，仍记为$\{(x_k,\sigma_k)\}$，在 $\mathscr{B}\times[0,1]$中收敛于(x,σ). 我们证明 $\sigma=1$，否则，如果 $\sigma<1$，则对充分大的 k 有 $\|x_k\|\geqslant 1-\frac{1}{k}$，因此 $\|x\|=1$，$x=T(x,\sigma)$而与(2.3)矛盾. 由 $\sigma=1$，根据 T 的连续性有 $\widetilde{T}_{\frac{1}{k}}x_k\to T(x,1)$，从而 x 也是$T(x,1)$的不动点. ▌

如果 $T(x,\sigma)=\sigma T_1$，算子 T_1 具有定理 2.5 要求的性质，由定理 2.6 即得定理 2.5.

§ 1.3 Hilbert 空间

线性空间 $\mathscr{H}$ 上的内积是一个映射 $T:\mathscr{H}\times\mathscr{H}\to\mathrm{R}$，记做$(x,y)$，$\forall\ x,y\in\mathscr{H}$，满足

(i) $\forall\ x,y\in\mathscr{H},(x,y)=(y,x)$;

(ii) $\forall\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathrm{R},x_1,x_2,y\in\mathscr{H},\quad (\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y)=\lambda_1(x_1,y)+\lambda_2(x_2,y)$;

(iii) $\forall\ \ 0\neq x\in\mathscr{H},(x,x)>0$.

线性空间 $\mathscr{H}$ 赋予内积后称为内积空间或准 Hilbert 空间. 完备的内积空间称为 Hilbert 空间. 定义范数 $\|x\|=(x,x)$，满足如下关系：

(i) Schwarz 不等式

$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\ \|y\|; \tag{3.1}$$

(ii) 三角不等式

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|; \tag{3.2}$$

(iii) 平行四边形定律

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{3.3}$$

设 $x,y\in\mathscr{H}$，如果$(x,y)=0$，则称 x,y 是正交的(垂直的). 设子集 $\mathscr{M}\in\mathscr{H}$，$\mathscr{M}^{\perp}$表示与 $\mathscr{M}$ 中每个元素都正交的元素集合.

定理 3.1（正交投影定理） 设 $\mathscr{M}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的闭子空间，则对任意的 $x\in\mathscr{H}$ 有

$$x=y+z,\quad y\in\mathscr{M},\quad z\in\mathscr{M}^{\perp}. \tag{3.4}$$

证明 如果 $x\in\mathscr{M}$，则置 $y=x,z=0$，定理成立.

不妨设 $\mathscr{M}\neq\mathscr{H}$，$x\overline{\in}\mathscr{M}$ 定义

$$d=\mathrm{dist}(x,\mathscr{M})=\inf_{y\in\mathscr{M}}\|x-y\|>0$$

并设$\{y_n\}\subset\mathscr{M}$ 是极小化序列，即 $\|y_n-x\|\to d$. 应用平行四边形定律(3.3)有

$$4\left\|x-\frac{1}{2}(y_m+y_n)\right\|^2+\|y_m-y_n\|^2=2(\|x-y_m\|^2+\|x-y_n\|^2).$$

因为$\frac{1}{2}(y_m+y_n)\in\mathscr{M}$，所以 $m,n\to\infty$ 时 $\|y_m-y_n\|\to 0$，由 $\mathscr{H}$ 的完备性得$\{y_n\}$收敛，又因 $\mathscr{M}$ 是闭的，还有 $y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n\in\mathscr{M}$ 且 $\|x-y\|=d$.

记 $z=x-y$，我们证明 $z\in\mathscr{M}^{\perp}$. 事实上，对任意的 $\tilde{y}\in\mathscr{M}$ 及 $\varepsilon\in\mathrm{R}$ 有 $y+\varepsilon\tilde{y}\in\mathscr{M}$，从而

$$d^2 \leqslant \| x - (y + \varepsilon\tilde{y}) \|^2 = (z - \varepsilon\tilde{y}, z - \varepsilon\tilde{y})$$
$$= \| z \|^2 - 2\varepsilon(\tilde{y}, z) + \varepsilon^2 \| \tilde{y} \|^2,$$

由 $\| z \| = d$ 得 $|(\tilde{y},z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \| \tilde{y} \|^2$. 由 ε 的任意性得对 $\forall\ \tilde{y} \in \mathscr{M}$, $(\tilde{y},z)=0$. 即 $z \in \mathscr{M}^{\perp}$. ▌

z 称为 x 在 $\mathscr{M}$ 上的正交投影.

定理 3.2 (Riesz **表示定理**) 对 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的每个有界线性泛函 F,存在唯一确定的元素 $f \in \mathscr{H}$,使得

$$F(x) = (f, x), \forall\ x \in \mathscr{H}, \tag{3.5}$$
$$\| F \| = \| f \| . \tag{3.6}$$

证明 记 $\mathscr{N} = \{x | F(x) = 0\}$, 如果 $\mathscr{N} = \mathscr{H}$, 取 $f=0$ 定理得证. 不妨设存在一个元素 $x_1 \in \mathscr{H}$ 但 $x_1 \overline{\in} \mathscr{N}$. 因 $\mathscr{N}$ 为 $\mathscr{H}$ 的闭子空间,按定理 3.1, x_1 可分解为

$$x_1 = y_1 + z_1, y_1 \in \mathscr{N}, \quad z_1 \in \mathscr{N}^{\perp},$$

对任意的 $x \in \mathscr{N}$, $(x, z_1) = 0$ 且 $F(z_1) \neq 0$. 但

$$F(x - \frac{F(x)}{F(z_1)} z_1) = F(x) - \frac{F(x)}{F(z_1)} F(z_1) = 0, \forall\ x \in \mathscr{H},$$

所以 $x - \frac{F(x)}{F(z_1)} z_1 \in \mathscr{N}$,这表示

$$(x - \frac{F(x)}{F(z_1)} z_1, z_1) = 0,$$

即

$$(x, z_1) = \frac{F(x)}{F(z_1)} \| z_1 \|^2.$$

从而

$$F(x) = (x, \frac{z_1 F(z_1)}{\| z_1 \|^2}) \triangleq (x, f),$$

其中 $f = \frac{z_1 F(z_1)}{\| z_1 \|}$. f 的唯一性容易证明,留给读者.

为证 $\| f \| = \| F \|$,由 Schwarz 不等式有

$$\| F \| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, f)|}{\| x \|} \leqslant \sup_{x \neq 0} \frac{\| x \| \ \| f \|}{\| x \|} = \| f \| .$$

但 $\quad \| f \|^2 = (f, f) = F(f) \leqslant \| F \| \ \| f \|$,综合得 $\| F \| = \| f \|$. ▌

注 如 $\mathscr{H}$ 换为 $\mathscr{H}$ 的闭子空间,定理仍然成立.

在证明存在定理时,需要 Lax—Milgram 定理.

定义 3.1 **双线性形式** $B(x,y)$ $\quad B(x,y)$是定义在 $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ 上的泛函,满足

(i) $B(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 B(x, y_1) + \lambda_2 B(x, y_2), \forall\ x, y_1, y_2 \in \mathscr{H}$;

(ii) $B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 B(x_1, y) + \lambda_2 B(x_2, y), \forall\ x_1, x_2, y \in \mathscr{H}$, λ_1, λ_2 为实数.

定义 3.2

(i) 称 $B(x,y)$是有界的,如果存在 $K>0$ 使得

$$|B(x,y)| \leqslant K \| x \| \ \| y \|, \forall\ x, y \in \mathscr{H}. \tag{3.7}$$

(ii) 称 $B(x,y)$是强迫的,如果存在 $\nu>0$ 使得

$$|B(x,x)| \geqslant \nu \| x \|^2, \quad \forall\, x \in \mathscr{H}. \tag{3.8}$$

定理 3.3（Lax－Milgram **定理**） 设 $B(x,y)$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的有界强迫双线性形式，则对每一有界线性泛函 $F \in \mathscr{H}^*$，存在唯一元素 $f \in \mathscr{H}$ 使得

$$B(x,f) = F(x), \quad \forall\, x \in \mathscr{H}. \tag{3.9}$$

证明 对确定的 $f \in \mathscr{H}$，$B(x,f)$ 定义了 $\mathscr{H}$ 上的一个线性有界泛函，由定理 3.2 知存在一个元素（记为 $Tf \in \mathscr{H}$）使得

$$B(x,f) = (x,Tf), \quad \forall\, x \in \mathscr{H}, \tag{3.10}$$

因此建立了一个线性映射 $T: \mathscr{H} \to \mathscr{H}$. 由(3.7)可得 $\| Tf \| \leqslant K \| f \|$，所以 T 是有界的. 由(3.8)还可得 $\nu \| f \|^2 \leqslant B(f,f) = (f,Tf) \leqslant \| f \| \, \| Tf \|$，因此

$$\nu \| f \| \leqslant \| Tf \| \leqslant K \| f \|,$$

这表示 T 是一对一的，其值域为闭的而且 T^{-1} 有界（由读者自证）.

现证 T 在 $\mathscr{H}$ 上是映上的. 否则由定理 3.1 可得存在一个元素 $0 \neq z \in \mathscr{H}$ 使得

$$(z,Tf) = 0, \forall\, f \in \mathscr{H}.$$

特别取 f 为 z，则 $(z,Tz) = B(z,z) = 0$，由 $B(,)$ 的强迫性得 $z=0$ 而导致矛盾，因此 T^{-1} 是 $\mathscr{H}$ 上的有界线性映射.

按定理 3.2，对任一个 $F \in \mathscr{H}^*$，存在一个 $g \in \mathscr{H}$ 使得

$$F(x) = (x,g), \forall\, x \in \mathscr{H},$$

再由(3.10)得 $F(x) = (x,g) = B(x,T^{-1}g)$，取 $f = T^{-1}g$ 则得(3.9). ▌

利用 Riesz 表示定理，对 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的序列 $\{x_n\}$，如果存在 $x \in \mathscr{H}$ 使得

$$(x_n,y) \to (x,y), \quad \forall\, y \in \mathscr{H},$$

则 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x.

下面二个结果在研究微分方程时是有用的.

定理 3.4 设 $\{x_n\} \subset \mathscr{H}$ 且 $x_n \rightharpoonup x$，则

$$\| x \| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \| x_n \| \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \| x_n \|,$$

其中不等式的右端有限.

定理 3.5 Hilbert 空间的有界序列包含弱收敛子序列.

§ 1.4 $L_p(\Omega)$ 空间及 $L_{p,r}(Q_T)$ 空间

设 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ 为有界域. Ω 上的可测函数理解为可测函数的等价类，在一个零测度的子集上函数值可以不同. 可测函数的逐点性质理解为函数类中某个函数所具有的通常意义下的性质. 其上（下）确界理解为本质上（下）确界.

$L_p(\Omega)$ $(p \geqslant 1)$ 表示 Ω 上 p 次可积的可测函数组成的 Banach 空间，其范数为

$$\| u \|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.1}$$

在不致混淆时，$\| \cdot \|_{L_p(\Omega)}$ 简记为 $\| \cdot \|_{p,\Omega}$ 或 $\| \cdot \|_p$.

容易验证，如对任意的 $p \geqslant 1$，$u \in L_p(\Omega)$，则