大學用書

李代數與表現理論之導引

J. E. Humphrey 著
張 瑞 吉譯

國立編譯館主編
黎明文化事業公司出版

大學用書

李代數與表現理論之導引

J. E. Humphrey 著

張 瑞 吉 譯

國 立 編 譯 館 主 編
黎明文化事業公司出版

310(69-64)

李代數與表現理論之導引

著作者：J. E. Humphrey
翻譯者：張　瑞　吉
出版者：黎明文化事業股份有限公司
地　址：臺北市信義路二段二一三號十一樓
行政院新聞局出版事業登記臺業字第一八五號
總發行所：
臺北市長安東路一段五十六號
門市部：
臺北市信義路二段二一三號綜合書城
臺北市長安東路一段五十六號
臺北市重慶南路一段四十九號
臺北市林森南路一〇七號文化大樓
高雄五福四路九十五號
郵政劃撥帳戶一八〇六一號
印刷者：永　裕　印　刷　廠
地　址：臺北市西昌街一六八號
中華民國七十年八月初版

定　價：新臺幣一八〇元

◀如有缺頁、倒裝請寄回換書▶

序　　言

本書的主要內容是介紹讀者有關特徵數爲 0 的代數封閉體上的半單李代數的經典理論，特別是表現理論。閱讀本書所需的預備知識爲線性代數（包括固有值，雙線性形式，歐氏空間以及向量空間的張量積）和一些抽象代數的方法。一般說來，一個聰明而且用功的大學部學生要瞭解前四章的內容是不很難的，不過若想唸懂後三章則須有較好的程度。

除了在物理以及數學的許多部門上的用途之外，半單李代數本身就具有吸引力因爲它有某種程度和完整的基本結果。自從十年前 Jacobson 的經典之作出版以來，此理論已改良許多，即使是古典部分也有很多改進的地方。我儘力地將他們編在此書裏並使這些內容較易爲非專家們所接受。對於專家來說，以下幾點是要特別注意的:

(1) 在討論半單李代數的情形下，爲了要以環面子代數取代較古典的 Cartan 子代數我特別強調線性變換的 Jordan-Chevalley 分解。

(2) Cartan 子代數的共軛定理的證明是採用基礎的李代數方法（根據 D. J. Winter 和 G. D. Mostow 的證明）而避免用代數幾何。

(3) 同構定理先是用基礎的方法證明（定理 14.2），其後又可由 Serre 定理（18.3）推論而得。Serre 定理提供一個用生成元及關係來呈現李代數的想法。

(4) 從一開始，在課文及習題裏就強調 A, B, C, D 型單代數。

(5) 根系（第三章）以及一些權論是以公理化的方法處理的。

(6) 在 23 節和 24 節裏我介紹 Weyl 的特徵標公式。整個過程是基於 Harish-Chandra 的特徵標理論而與 Freudenthal 的重複數公式 (22.3) 是不相關的。這是取自 D. N. Verma 博士論文以及 I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand, S. L. Gel'fand 的最近成果。

(7) 在第七章我根據 R. Steinberg 的講義介紹 Chevalley 羣論的基本造法。

我省略一些標準的題材（其中大部分我認為是屬於更深的課程）例如，雙對同調，Levi 和 Mal'cev定理，Ado 和 Iwasawa 定理，非代數封閉體上的分類，質特徵數的李代數，這些題材可在參考文獻的一些書及文章裏，特別是 Jacobson〔1〕,〔2〕, Winter〔1〕, Seligman〔1〕找得到。我希望讀者能繼續探討這些題材。

J. E. Humphrey

記　號

Z, **Z**$^+$, **Q**, **R**, **C** 分別代表整數，非負整數，有理數，實數，以及複數。

$\amalg$　表示向量空間的直和

$A \ltimes B$　表示羣 A 與羣 B 的半直積，其中以 B 為正規子羣

Card＝Cardinality

char＝characteristic

det＝行列式值

dim＝維數

Ker＝核

Im＝像

Tr＝跡

目　　錄

第一章　基本概念

在這一章裡 $\mathbf{F}$ 表代表任意（可交換）體。

1.　定義與範例

1.1.　李代數的觀念

李代數是在線性變換的向量空間中賦上一個新的運算：$[x, y]=xy-yx$（其中右端的運算是通常的運算）之後的自然產物，新運算在一般的情形下，既沒有可交換性也沒有結合性。我們可以抽象地用幾個公理描述這個系統。

定義： 設 L 爲體 $\mathbf{F}$ 上的向量空間，而 $L\times L\to L$ 爲 L 中的一個運算，記爲 $(x, y)\to[xy]$ 並稱爲 x 與 y 的**括弧**或**換位元素**。再設這個括弧運算滿足下列公理：

$(L1)$ 括弧運算爲雙線性。

$(L2)[xx]=0$ 對所有 $x\in L$。

$(L3)[x[yz]]+[y[zx]]+[z[xy]]=0\ (x, y, z\in L)$

則稱 L 爲 $\mathbf{F}$ 上的**李代數**。

公理 $(L3)$ 稱爲 **Jacobi 恆等式**。注意，將 $(L1)$ 和 $(L2)$ 應用到 $[x+y, x+y]$ 上面去會得到反交換性：$(L2')[xy]=-[yx]$（反之，若 $\operatorname{char}\mathbf{F}\neq 2$，則顯然可由 $(L2')$ 導出 $(L2)$。）

如果 $\mathbf{F}$ 上的兩個李代數 L, L' 之間存在一向量空間同構 $\phi: L \rightarrow L$ 具有如下的性質：對所有的 $x, y \in L$ 滿足

$$\phi([xy])=[\phi(x)\phi(y)]$$

則稱 L 和 L' 是同構（ϕ 稱爲李代數 L 與 L' 之間的一個**同構**）。同理，我們也可以很容易地介紹（**李**）**子代數**這個觀念：設 K 是 L 的一個子空間。如果對任意 $x, y \in K$，總有 $[xy] \in K$，則稱 K 是 L 的一個子代數；當然，K 在括弧運算下自成一個李代數。注意，任意非零元素 $x \in L$ 定義一個一維子代數 $\mathbf{F}_x$，其運算依（$L2$）是自明的。

在此書中我們幾乎只考慮有限維的向量空間的李代數。除非另有例外的敍述我們總是做這樣的假設。然而我們急須指出在研究表現理論時（五至七章）某些 $\mathbf{F}$ 上的無限維向量及結合代數扮演一個極重要的角色。在看一些具體的例子之前我們也提醒讀者一下，即使只假定 L 爲交換環上的一個模，李代數的公理還是有意義的，不過在此我們將不討論這觀點。

1.2.　線性李代數

設 V 爲 $\mathbf{F}$ 上的有限維向量空間，以 $End V$ 表示 V 上的一切線性變換 $V \rightarrow V$ 所組成的集合。$End V$ 可看成是 $\mathbf{F}$ 上的一個 n^2 維向量空間（$n = dim V$），同時 $End V$ 對於通常的乘法（映射的合成）形成一個環。定義一個新運算 $[xy]=xy-yx$，稱爲 x 和 y 的括弧。在此運算下 $End V$ 成爲 $\mathbf{F}$ 上的李代數：公理（$L1$）及（$L2$）立刻可檢驗出，然而（$L3$）需要一個簡單的計算（希望讀者自證之）。爲了要區分這個新的代數結構和老的結合結構，我們記具有新結構的李代數 $End(V)$ 爲 $gl(V)$ 並且稱爲**一般線性李代數**（因其與**一般線性羣** $GL(V)$ 有很密切的關係，$GL(V)$ 爲 V 上一切可逆自同構形成的集合）。當 V 爲無限維時我們還是採用記號 $gl(V)$ 而不另作說明。

李代數 $gl(V)$ 的任意子代數都稱爲**線性李代數**。若讀者認爲矩陣比線性變換更適意的話則可固定V的一組基底，藉以認同$gl(V)$和 $\mathbf{F}$ 上的一切 $n\times n$ 矩陣所成的集合記爲 $gl(n,\mathbf{F})$。這樣的做法是無害的，而且對於明確的計算是很方便的。爲參考之故，我們寫下 $gl(n,\mathbf{F})$ 的標準基底矩陣e_{ij}, $1\leq i$, $j\leq l$，（在 (i,j) 位置爲1其他爲0）的乘法表。因爲 $e_{ij}e_{kl}=\delta_{jk}e_{il}$，所以

(*) $$[e_{ij},e_{kl}]=\delta_{jk}e_{il}-\delta_{kj}$$

注意上式的係數爲±1或0？特別的是這些係數都落在 $\mathbf{F}$ 的質體內。

我們現在就舉幾個例子看看，這些例子將是此書中整個理論的中心。他們分成四大簇 $A_l,B_l,C_l,D_l(l\leq 1)$ 而統稱爲**古典代數**（因爲他們與古典線性李羣相對應）。

A_l: 設 $dimV=l+1$。以 $sl(V)$ 或 $sl(l+1,\mathbf{F})$ 表示從V映至V的所有跡爲0的線性變換組成的集合。記住，一矩陣的跡是指它的對角線上所有成分的和；它與V的基底的選取無關，因此上面的說法是沒有問題的。）因爲 $Tr(xy)=Tr(yx)$及 $Tr(x+y)=Tr(x)+Tr(y)$ 所以 $sl(V)$爲$gl(V)$ 的子代數，稱爲**特殊線性代數**因爲它與**特殊線性羣** $SL(V)$，卽從V映至V的一切行列式爲1的線性變換組成的羣；有所關連。那麼 $sl(V)$ 的維數爲何呢？一方面 $sl(V)$ 爲$gl(V)$的眞子代數因此其維數最多是 $(l+1)^2-1$。他方面，我們能寫出 $(l+1)^2-1$ 個跡爲0而且是線性獨立的矩陣：取一切的 $e_{ij}(\neq j)$ 以及一切的 $h_i=e_{i1}-e_{i+1,i+1}(1\leq i\leq l)$，總數正好是 $l+(l+1)^2-(l+1)$。我們將把這一組基底看成是 $sl(l+1,\mathbf{F})$ 的標準基底。

C_l: 設 $dimV=2l$，其基底爲 $(v_1,\cdots\cdots,v_{2l})$。藉矩陣

$$s=\begin{pmatrix}0 & I_l\\ -I_l & 0\end{pmatrix}$$

在V上定義一個非退化斜對稱形式f。（若V有一非退化雙線性形式

f 滿足 $f(v,w)=-f(w,v)$ 則不難證明 V 的維數是偶數。）以 $sp(V)$ 或 $sp(2l,\mathbf{F})$ 表示所有線性映射 $x:V\to V$ 而且滿足條件

$$f(x(v),w)=-f(v,x(w)),v,w,\in V$$

組成的集合，而且稱其爲**耦對代數**。讀者易證 $sp(V)$ 在括弧運算下是封閉的。若以矩陣表示，則

$$x=\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}(m,n,p,q\in gl(l,\mathbf{F}))$$ 爲耦對的條件

是 $sx=-x^ts$ ($x^t=x$ 的轉置)，即 $n^t=n$，$p^t=p$ 而 $m^t=-q$（最後的條件使 $Tr(x)=0$。）現在可很容易地算出 $sp(2l,\mathbf{F})$ 的一組基底。取對角矩陣 $e_{ii}-e_{l+i,\,l+i}(1\leq i\leq l)$，共有 l 個。加上 $e_{ij}-e_{l+j,l+i}(1\leq i\neq j\leq l)$，共有 l^2-l 個。對於 n 我們取矩陣 $e_{i,l+i}(1\leq i\leq l)$ 以及 $e_{i,l+j}+e_{j,l+i}(1\leq i<j\leq l)$，共有 $l+\frac{1}{2}l(l-1)$ 個，同理，p 也可如法炮製。全部加起來我們就得 $\dim s_p(2l,\mathbf{F})=2l^2+l$

B_l: 設 $\dim V=2l+1$ 爲奇數，取 f 爲 V 上的非退化對稱雙線性形式其矩陣表示爲

$$s=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{pmatrix}$$

正交代數 $o(V)$ 或 $o(2l+1,\mathbf{F})$ 是由所有的線性映射 $x:V\to V$ 且滿足條件

$$f(x(v),w)=-f(v,x(w)),\ v\ ,\ w\in V$$

（與 C_e 的條件相同）者組成。若我們將 x 作與 s 相同的分割

$$x=\begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & m & n \\ c_2 & p & q \end{pmatrix}$$

則條件 $sx=-x^ts$ 與以下的條件組等價:

$$a=0,c_1=-b_2{}^t,c_2=-b_1{}^t,\ q=-m^t,n^t=-n,p^t =-p。$$

（正如 C_l 的情形，這證明了 $Tr(x)=0$）至於基底，可先取 l 個對角矩陣 $e_{ii}-e_{l+i,l+i}(2\leq i\leq l+1)$，加上 $2l$ 個只牽涉到第一列與第一行的矩陣：$e_{1,l+i+1}-e_{i+1,1}$，和 $e_{1,i+1}-e_{l+i+1,1}(1\leq i\leq l)$。對 n 取 $e_{i+1,l+j+1}-e_{j+1,l+i+1}(1\leq i<j\leq l)$，而且對 p 取 $e_{i+l+1,j+1}-e_{j+l+1,i+1}$ $(1\leq j<i\leq l)$。基底元素的總個數為 $2l^2+l$（注意：這也是 C_l 的維數）。

D_l：我們將在此造另一個**正交代數**。除了 $dim V=2l$ 是偶數而且 s 有較簡單的形式外

$$\begin{pmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{pmatrix}$$

整個造法完全和 B_l 一樣。我們讓讀者自己去造基底並且證明 dim $\mathrm{o}(2l,\mathbf{F})=2l^2$（習題 8）。

在這一小節裏我們再提出 $gl(n,\mathbf{F})$ 的另外幾個子代數做為結束。這幾個子代數將為我們扮演着很重要的配角。令 $t(n,\mathbf{F})$ 為由一切**上三角矩陣** $(a_{ij}),a_{ij}=0$ 如果 $i>j$ 所組成的集合。令 $n(n,\mathbf{F})$ 為**嚴格上三角矩陣**（$a_{ij}=0$ 如果 $i\geq j$）。最後令 $d(n,\mathbf{F})$ 為由所有的對角矩陣組成的集合。顯然可驗證出這當中的任何一個在括弧運算下是封閉的。同時也該注意到

$$t(n,\mathbf{F})=d(n,\mathbf{F})+n(n,\mathbf{F})$$

（向量空間的直和），以及

$$[d(n,\mathbf{F}),n(n,\mathbf{F})]=n(n,\mathbf{F}),$$

因此

$$[t(n,\mathbf{F}),t(n,\mathbf{F})]=n(n,\mathbf{F}),$$

參考習題 5。（若H,K為L的子代數，$[H,K]$表示L中一切的換位元素$[xy]$，$x\in H$及$y\in K$，生成的子空間。）

1.3. 導子李代數

一些由線性變換組成的李代數可以很自然地看成是代數的導子組成的。為此，我先定義**F** 代數。所謂的 **F 代數**（不必有結合性）是指 **F** 上的一個向量空間$\mathscr{A}$具有一雙線性運算

$$\mathscr{A}\times\mathscr{A}\longrightarrow\mathscr{A}$$

$$(a,b)\longrightarrow ab$$

（如果$\mathscr{A}$是李代數，我們就用括弧來表示運算）。其次定義導子。所謂$\mathscr{A}$的**導子**是指一線性變換

$$\delta:\mathscr{A}\longrightarrow\mathscr{A}$$

滿足條件

$$\delta(ab)=a\delta(b)+\delta(a)b。$$

易於驗證$\mathscr{A}$的所有導子組成的集合 $Der\mathscr{A}$ 為 $End\mathscr{A}$ 的子空間。讀者也應證明兩個導子的的換位元素$[\delta,\delta']$還是導子（然而通常的乘積則不一定是，參考習題11）。所以 $Der\mathscr{A}$ 為 $gl(\mathscr{A})$ 的子代數。

因為在上面所敍述的定義下，李代數就是一個 **F** 代數，所以 $Der\,L$ 是有定義的。某些導子的產生是很自然的。譬如說，令$x\in L$則

$$y\longrightarrow[xy]$$

為L的一個自同態，我們記之為 $ad\,x$。實際上，$ad\,x\in DerL$，這是因為我們能够將 Jacobi 恒等式（利用（L2′））重新寫成：

$$[x[yz]]=[[xy]z]+[y[xz]]。$$

這種形式的導子稱為**內導子**，其他的都稱為**外導子**。當然很可能 $ad\,x=0$ 而 $x\neq 0$：例如在任何一個一維李代數裏就發生了這種情形。映