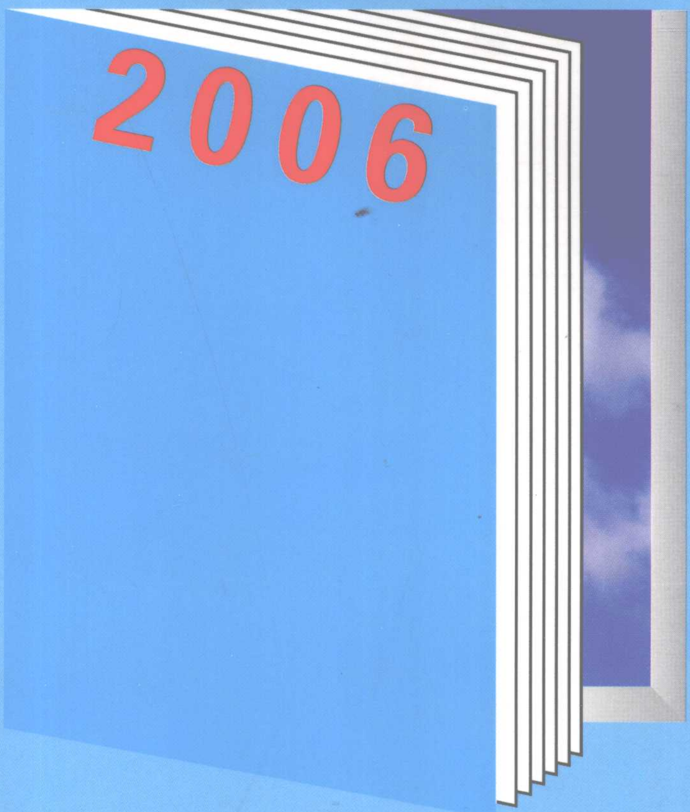
世纪ONE
高教版

全国考研数学真题第一书



历年考研数学（数学三）真题解析及复习思路

考研命题研究组

新华出版社

历年考研数学真题解析及复习思路

（数学三）

考研命题研究组

新 华 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

历年考研数学真题解析及复习思路(数学三)/考研命题研究组编写.
—北京:新华出版社,2005.4
ISBN 7－5011－7043－6

Ⅰ.历...
Ⅱ.考...
Ⅲ.高等数学－研究生－入学考试－解题
Ⅳ.013－44

1241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 026683 号

总 策 划 张剑锋
责任编辑 刘 洁
封面设计 祝东平 李继斌

历年考研数学真题解析及复习思路(数学三)
考研命题研究组

出版发行:新华出版社
地 址:北京市石景山区京原路 8 号
邮 编:100043
经 销:新华书店
印 刷:煤炭工业出版社印刷厂
开 本:787×1092 毫米 1/16
印 张:16.875
版 次:2005 年 5 月第 1 版
印 次:2005 年 5 月第 1 次印刷

新华出版社网址:www.xhcbs.126.com
高教考研人网址:www.kaoyanren.com
世纪高教书店:010－82627540
邮 购 部:010－62534421
门 市 部:010－82627540
字 数:300 千字
ISBN 7－5011－7043－6
定 价:25.00 元

前 言

《历年数学真题解析及复习思路(数学三)》是考研命题研究系列丛书中的一本,该系列丛书是由曾多年参加研究生考试大纲修订和命题的专家,为便于参加2006年研究生入学考试的广大莘莘学子对考试大纲规定的考试内容和考试要求进行全面、准确地理解而精心设计之作。该系列丛书内容精心设计,预见性极强,既体现了考生复习的阶段性特征,同时又鲜明地突出了考生能力结构提升的层次性。

(一)本书在结构框架和试题编排方面,其主要特点如下:

在第一部分,我们汇编了1987~2005年的全部数学试题,这些试题凝聚了近20年来参加命题的专家、教授的集体智慧,是一份十分宝贵的资料。这些试题既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力的测试要求,又充分地体现了命题专家和教授们进行数学命题的基本指导思想和基本原则,而且还能全面地展现试卷的结构、题型的特点。

在第二部分,我们对1987~2005年的全部数学试题根据《数学考试大纲(数学三)》的考查要求按照学科进行了科学地编排,并对试题进行了详细地解析。在编排顺序上,我们把相同或相近知识点列在一块进行解析,这样做除了便于进行比较分析外,更重要的是提供给考生一个重要的信息,即:相同或相近的知识点,相隔多少年会重新进行命题以及考查的知识点和题型的变化情况,以增强考生对命题基本规律的感性认识。如2004年数学三、四第(18)题与1992年数学四、2002年数学四第七大题;2004年的数学四的(21)题与1997年数学三第十大题;2003年数学四的第十题与1999年数学三的第九题;2003年数学四的第七题与1998年数学三的第八题;2002年数学四第十二题与1999年数学四第二大题中第(5)小题;……

关于试题重复命题的问题,需要说明的是,不仅在当年的经济类数学三和数学四之间使用部分相同试题,而且相隔多年后,一些理工科试题也被用作经济类试题。因此,经济类考生在分析历年试题时,可适当做一些理工类试题。

(二)本书在试题解析方面,其主要特点如下:

(1)依据《数学考试大纲》的章节,按试题考查的知识点分章,并对一些跨章节的、综合性较强的试题进行了科学的编排和处理。同时在每一章节加写了内容提要,对本章考查的大纲知识点进行了提纲挈领的分析。

(2)对每一道试题我们都进行了详细地分析和注释,并给出了命题和解题思路。在"**分析**"部分,主要分析试题的解题思路和解题方法,以期加强对考生的数学思维能力的培养,提高考生的破题能力;在"**解析**"部分则对试题进行详细的解析,给出了试题的解题步骤和详细答案,同时,为进一步拓宽考生的思维视野,我们在解析时尽可能地给出了多种解题思路或方法,以便使考生能够举一反三,触类旁通;在"**注释**"部分则针对历年考生在答卷中的典型错误进行了分析,同时对试题命制的思路、同类试题的解题方法、所考查知识点进行了归纳和总结;在"**复习思路**"部分,我们对考查的知识点进行了进一步的归纳和总结,并对该知识点的命题特点和趋势进行了分析。

(三)本书适用的报考专业：

(1)经济学门类的应用经济学一级学科中统计学、数量经济学二级学科、专业。

(2)管理学门类的工商管理一级学科中企业管理、技术经济及管理二级学科、专业。

(3)管理学门类的农林经济管理一级学科中对数学要求较高的二级学科、专业。

(四)如何使用本书，我们的建议：

(1)建议考生参照《数学考试大纲(数学三)》的考查知识点，结合人大版或四川人民版教材《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》进行第一轮的复习。为了使复习具有针对性，考生可在这一阶段结合教材的复习进度使用本书，从本书的第二部分开始阅读。这一阶段的阅读主要是使考生明了教材的内容与考试试题的吻合度。这时候，考生首先要自己思考题目，如果不会可参考"分析"再做，如果还是不会再看答案，最后再认真地思考本题，参照"注"对题目进行归纳和总结，不能就题做题，要通过考研真题发现一些规律性的东西，这样才能取得最好的效果。

(2)在完成第一轮复习后，考生需要尝试做一些套题。每一年的试题就知识点而言，既具有分散性，同时又具有综合性。做套题的目的就是要使考生熟悉考研试题并进行自我检测。考生在做题时不要着急看答案，一定要把整个一套试题做完后再看。在看答案时，要将自己的解题思路与本书的分析进行对比，找差距，找不足。

(3)在复习的第三阶段使用本书，主要结合《数学考试大纲》知识点，重点分析历年试题的命制情况，从中发现和总结知识点命题的特点和规律。这一阶段，要认真阅读本书的试题"注释"部分和"复习思路"部分。通过使用本书，考生会看到每一部分都考过什么内容，如何考查，考试的重点和热点是什么，以便在复习时真正做到心中有数，有的放矢。对历年真题，我们建议大家最少要做2～3遍，做到看到题目就会解答的程度。

由于时间仓促和其他方面的原因，本书难免有不足之处，敬请广大读者和专家同行批评指正，以便再版时更臻于完善。

最后，预祝广大考生考研成功！

考研命题研究组

2005 年 5 月

目　　录

1987—2005 年考研数学试题汇编

历年真题解析及复习思路

1987—2005 年考研数学试题汇编

2005 年全国硕士研究生入学统一考试
数学三试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ ________. P64*

(2) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足初始条件 $y(1)=2$ 的特解为________. P149

(3) 设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$,则 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,0)}=$ ________. P119

(4) 设行向量组 $(2,1,1,1)$,$(2,1,a,a)$,$(3,2,1,a)$,$(4,3,2,1)$ 线性相关,且 $a\neq 1$,则 $a=$ ________. P178

(5) 从数 1,2,3,4 中任取一个数,记为 X,再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数,记为 Y,则 $P\{Y=2\}=$ ________. P220

(6) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为 P236

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

若随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立,则 $a=$ ________,$b=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 当 a 取下列哪个值时,函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点. P84

(A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8　　【　】

(8) 设 $I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$,$I_2=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$,$I_3=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,则 P130

(A) $I_3>I_2>I_1$　　(B) $I_1>I_2>I_3$

(C) $I_2>I_1>I_3$　　(D) $I_3>I_1>I_2$　　【　】

(9) 设 $a_n>0$,$n=1,2,\cdots$,若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛,则下列结论正确的是 P136

* P64,表示该题的解答在本书第 64 页,下同.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散.　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛.　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛.　　【　】

(10) 设 $f(x)=x\sin x+\cos x$，下列命题中正确的是　　P83

(A) $f(0)$ 是极大值，$f(\frac{\pi}{2})$ 是极小值.

(B) $f(0)$ 是极小值，$f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值.

(C) $f(0)$ 是极大值，$f(\frac{\pi}{2})$ 也是极大值.

(D) $f(0)$ 是极小值，$f(\frac{\pi}{2})$ 也是极小值.　　【　】

(11) 以下四个命题中，正确的是　　P80

(A) 若 $f'(x)$ 在(0,1)内连续，则 $f(x)$ 在(0,1)内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在(0,1)内连续，则 $f(x)$ 在(0,1)内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在(0,1)内有界，则 $f(x)$ 在(0,1)内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在(0,1)内有界，则 $f'(x)$ 在(0,1)内有界.　　【　】

(12) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^T$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^T$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵. 若 a_{11}，a_{12}，a_{13} 为三个相等的正数，则 a_{11} 为　　P160

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(B) 3　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\sqrt{3}$　　【　】

(13) 设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是　　P178

(A) $\lambda_1=0$　　(B) $\lambda_2=0$　　(C) $\lambda_1\neq0$　　(D) $\lambda_2\neq0$　　【　】

(14) 设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ 均未知，现从中随机抽取16个零件，测得样本均值 $\bar{x}=20(\text{cm})$，样本标准差 $S=1(\text{cm})$，则 μ 的置信度为0.90的置信区间是

(A) $(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(16))$　　P263

(B) $(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(16))$

(C) $(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15))$

(D) $(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(15))$　　【　】

三、解答题(本题共9小题，满分94分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分8分)

求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$.　$\frac{3}{2}$　　P64

(16)(本题满分8分)

设 $f(u)$ 具有二阶连续导数，且 $g(x,y)=f(\frac{y}{x})+yf(\frac{x}{y})$，求 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.　　P114

(17)(本题满分9分)

计算二重积分 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\,d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\}$.　　P130

(18)(本题满分9分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n+1}-1)x^{2n}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$. **P144**

(19)(本题满分 8 分)

设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续，且 $f(0)=0,f'(x)\geqslant 0,g'(x)\geqslant 0$. 证明：对任何 $a\in[0,1]$，有 $\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)g(1)$. **P104**

(20)(本题满分 13 分)

已知齐次线性方程组 **P184**

$$(\text{i})\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1+3x_2+5x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}\quad\text{和}\quad(\text{ii})\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$$

同解，求 a,b,c 的值.

(21)(本题满分 13 分)

设 $D=\begin{pmatrix}A & C\\C^T & B\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，其中 A,B 分别为 m 阶，n 阶对称矩阵，C 为 $m\times n$ 矩阵.

(Ⅰ) 计算 P^TDP，其中 $P=\begin{bmatrix}E_m & -A^{-1}C\\O & E_n\end{bmatrix}$； **P209**

(Ⅱ) 利用(Ⅰ)的结果判断矩阵 $B-C^TA^{-1}C$ 是否为正定矩阵，并证明你的结论.

(22)(本题满分 13 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 **P240**

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：(Ⅰ) (X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$；

(Ⅱ) $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$；

(Ⅲ) $P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

(23)(本题满分 13 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其样本均值为 $\overline{X}$，记 $Y_i=X_i-\overline{X},i=1,2,\cdots,n$. **P261**

(Ⅰ) 求 Y_i 的方差 $DY_i,i=1,2,\cdots,n$；

(Ⅱ) 求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$；

(Ⅲ) 若 $c(Y_1+Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量，求常数 c.

2004 年全国硕士研究生入学统一考试
数学三试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$,则 $a=$ ______,$b=$ ______. P64

(2) 函数 $f(u,v)$ 由关系式 $f[xg(y),y]=x+g(y)$ 确定,其中函数 $g(y)$ 可微,且 $g(y)\neq 0$,则$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$ ______. P114

(3) 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2}, & -\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2} \\ -1, & x\geqslant \dfrac{1}{2}\end{cases}$,则$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\mathrm{d}x=$ ______. P95

(4) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为 ______. P204

(5) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$ ______. P230

(6) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$,总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本,则 P260

$$E\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=\_\_\_\_\_\_.$$

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界 P67

(A)$(-1,0)$　(B)$(0,1)$　(C)$(1,2)$　(D)$(2,3)$　【　】

(8) 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内有定义,且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,$g(x)=\begin{cases} f(\dfrac{1}{x}), & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$,则 P67

(A)$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.

(B)$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C)$x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D)$g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关.　【　】

(9) 设 $f(x)=|x(1-x)|$,则 P84

(A)$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B)$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C)$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D)$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.　【　】

(10) 设有以下命题: P135

① 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

② 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$收敛.

③ 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

④ 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛.

则以上命题中正确的是

(A)①②.　　(B)②③.　　(C)③④.　　(D)①④.　　【　】

(11) 设$f'(x)$在$[a,b]$上连续，且$f'(a)>0$，$f'(b)<0$，则下列结论中错误的是　P68

(A) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f'(x_0)=0$.

(D) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)=0$.　　【　】

(12) 设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价，则必有　P169

(A) 当$|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$时，$|\boldsymbol{B}|=a$.

(B) 当$|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$时，$|\boldsymbol{B}|=-a$.

(C) 当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$时，$|\boldsymbol{B}|=0$.

(D) 当$|\boldsymbol{A}|=0$时，$|\boldsymbol{B}|=0$.　　【　】

(13) 设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{0}$，若$\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系　P181

(A) 不存在.　　(B) 仅含一个非零解向量.

(C) 含有两个线性无关的解向量.　　(D) 含有三个线性无关的解向量.　　【　】

(14) 设随机变量X服从正态分布$N(0,1)$，对给定的$\alpha\in(0,1)$，数u_α满足$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若$P\{|X|<x\}=\alpha$，则x等于　P229

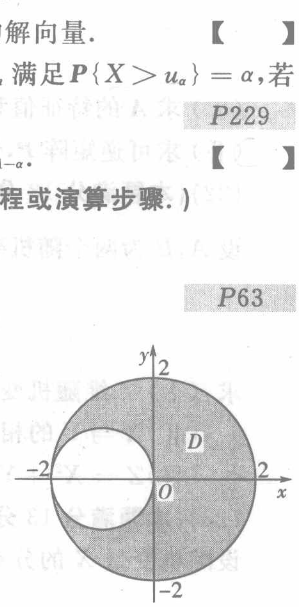
(A)$u_{\frac{\alpha}{2}}$.　　(B)$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.　　(C)$u_{\frac{1-\alpha}{2}}$.　　(D)$u_{1-\alpha}$.　　【　】

三、解答题(本题共9小题，满分94分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分8分)

求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.　P63

(16)(本题满分8分)



求$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由圆$x^2+y^2=4$和$(x+1)^2+y^2=1$所围成的平面区域(如图).　P130

(17)(本题满分8分)

设$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续，且满足　P104

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b),$$

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b g(t)\mathrm{d}t,$$

证明：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

(18)(**本题满分 9 分**)

设某商品的需求函数为 $Q = 100 - 5P$，其中价格 $P \in (0,20)$，Q 为需求量.

（Ⅰ）求需求量对价格的弹性 $E_d(E_d > 0)$； P86

（Ⅱ）推导 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P} = Q(1 - E_d)$（其中 R 为收益），并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时，降低价格反而使收益增加.

(19)(**本题满分 9 分**)

设级数 $\frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots(-\infty < x < +\infty)$ 的和函数为 $S(x)$. 求：

（Ⅰ）$S(x)$ 所满足的一阶微分方程； P143

（Ⅱ）$S(x)$ 的表达式.

(20)(**本题满分 13 分**)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,a+2,-3a)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (-1,-b-2,a+2b)^T$，$\boldsymbol{\beta} = (1,3,-3)^T$. 试讨论当 a,b 为何值时，

（Ⅰ）$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示； P172

（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示，并求出表示式；

（Ⅲ）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式.

(21)(**本题满分 13 分**)

设 n 阶矩阵 P196

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

(22)(**本题满分 13 分**)

设 A,B 为两个随机事件，且 $P(A) = \frac{1}{4}$，$P(B \mid A) = \frac{1}{3}$，$P(A \mid B) = \frac{1}{2}$，令 P235

$$X = \begin{cases} 1, & A\text{ 发生} \\ 0, & A\text{ 不发生} \end{cases}, \qquad Y = \begin{cases} 1, & B\text{ 发生} \\ 0, & B\text{ 不发生} \end{cases}.$$

求：（Ⅰ）二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

（Ⅱ）X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}；

（Ⅲ）$Z = X^2 + Y^2$ 的概率分布.

(23)(**本题满分 13 分**)

设随机变量 X 的分布函数为 P258

$$F(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x > \alpha \\ 0, & x \leqslant \alpha \end{cases}$$

其中参数 $\alpha > 0$，$\beta > 1$. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

（Ⅰ）当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的矩估计量；

（Ⅱ）当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的最大似然估计量；

（Ⅲ）当 $\beta=2$ 时，求未知参数 α 的最大似然估计量.

2003 年全国硕士研究生入学统一考试
数学三试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,其导函数在 $x=0$ 处连续,则 λ 的取值范围是__________.

P71

(2) 已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切,则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=$ __________.

P75

(3) 设 $a>0$,$f(x)=g(x)=\begin{cases} a, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,而 D 表示全平面,则 $I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $=$ __________.

P125

(4) 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^T$,$a<0$;$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\dfrac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$,其中 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$,则 $a=$ __________.

P163

(5) 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9,若 $Z=X-0.4$,则 Y 与 Z 的相关系数为__________.

P248

(6) 设总体 X 服从参数为 2 的指数分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,则当 $n\to\infty$ 时,$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于__________.

P254

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 每小 题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数,且 $f'(0)$ 存在,则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

P67

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在.　　(B) 有跳跃间断点 $x=0$.

(C) 在 $x=0$ 处右极限不存在.　　(D) 有可去间断点 $x=0$.

【　】

(2) 设可微函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 取得极小值,则下列结论正确的是

119

(A) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零.

(B) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零.

(C) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零.

(D) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在.

【 A 】

(3) 设 $p_n=\dfrac{a_n+|a_n|}{2}$,$q_n=\dfrac{a_n-|a_n|}{2}$,$n=1,2,\cdots$,则下列命题正确的是

P135

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定.

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定. 【　】

(4) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的秩等于 1，则必有 P168

(A) $a = b$ 或 $a + 2b = 0$.　　(B) $a = b$ 或 $a + 2b \neq 0$.

(C) $a \neq b$ 且 $a + 2b = 0$.　　(D) $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$. 【　】

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维向量，下列结论不正确的是 P177

(A) 若对于任意一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \neq 0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则对于任意一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = 0$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为 s.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关. 【　】

(6) 将一枚硬币独立地掷两次，引进事件：$A_1 = \{$掷第一次出现正面$\}$，$A_2 = \{$掷第二次出现正面$\}$，$A_3 = \{$正、反面各出现一次$\}$，$A_4 = \{$正面出现两次$\}$，则事件 P221

(A) A_1, A_2, A_3 相互独立.　　(B) A_2, A_3, A_4 相互独立.

(C) A_1, A_2, A_3 两两独立.　　(D) A_2, A_3, A_4 两两独立. 【　】

三、(本题满分 8 分)

设 $f(x) = \dfrac{1}{\pi x} + \dfrac{1}{\sin \pi x} - \dfrac{1}{\pi(1-x)}, x \in [\dfrac{1}{2}, 1)$，试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $[\dfrac{1}{2}, 1]$ 上连续.

P67

四、(本题满分 8 分)

设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$，又 $g(x,y) = f[xy, \dfrac{1}{2}(x^2 - y^2)]$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

P113

五、(本题满分 8 分)

计算二重积分 $I = \iint\limits_D e^{-(x^2+y^2-\pi)} \sin(x^2 + y^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant \pi\}$.

P129

六、(本题满分 9 分)

求幂级数 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2n} (|x| < 1)$ 的和函数 $f(x)$ 及其极值. P142

七、(本题满分 9 分)

设 $F(x) = f(x)g(x)$，其中 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足以下条件： P149

$$f'(x) = g(x), g'(x) = f(x) \text{ 且 } f(0) = 0, f(x) + g(x) = 2e^x.$$

(1) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程；

(2) 求出 $F(x)$ 的表达式.

八、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在$[0,3]$上连续,在$(0,3)$内可导,且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$,$f(3)=1$. 试证必存在 $\xi\in(0,3)$,使 $f'(\xi)=0$.

P79

九、(本题满分 13 分)

已知齐次线性方程组

P183

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases}$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$. 试讨论 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 满足何种关系时,

(1) 方程组仅有零解;

(2) 方程组有非零解. 在有非零解时,求此方程组的一个基础解系.

十、(本题满分 13 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$,其中二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1,特征值之积为 -12.

P203

(1) 求 a,b 的值;

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准型,并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

十一、(本题满分 13 分)

设随机变量 X 的概率密度为

P231

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x\in[1,8]\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数,求随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数.

十二、(本题满分 13 分)

设随机变量 X 与 Y 独立,其中 X 的概率分布为

P240

$$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$$

而 Y 的概率密度为 $f(y)$,求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$.