ZHONGXUESHUXUESIWEIFANGFACONGSHU

中学数学思维方法丛书

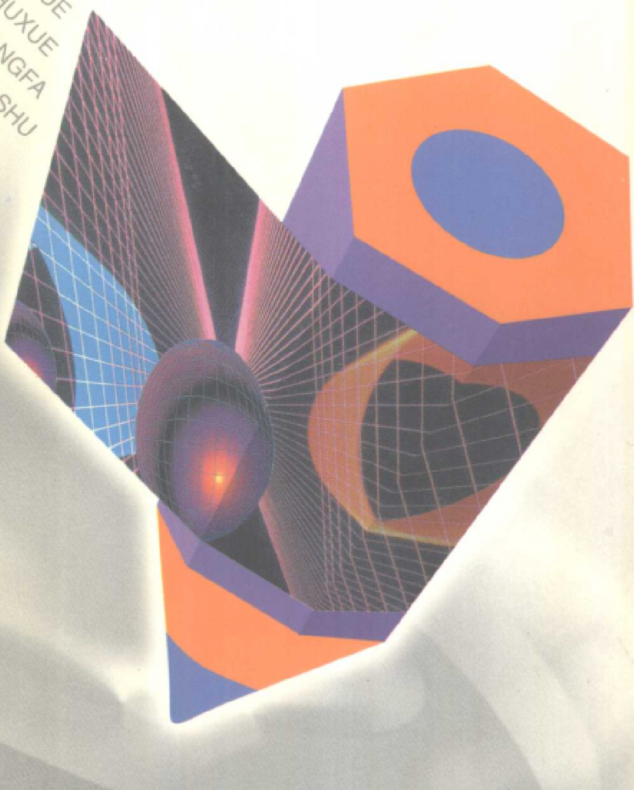
转化与化归

杨世明 编著

ZHUANHUAYUHUAGUI

YANGSHIMING

ZHONGXUE
SHUXUE
SIWEIFANGFA
CONGSHU



大象出版社

中学数学思维方法丛书

- 走向数学发现
- 原则与策略
- 猜想与合情推理
- 直觉探索方法
- 逻辑探索方法
- 整体方法
- 逻辑与演绎
- 综合与构造
- 转化与化归
- 抽象与模式
- 反思与监控
- 计算机与思维
- 观念与文化

ISBN 7-5347-2465-1

9 787534 724657 >

ISBN 7-5347-2465-1/G · 1998

定价：8.20元

中学数学思维方法丛书

转化与化归

杨世明 编著

大象出版社

ZHUANHUAYUHUAGUI

YANGSHIMING

图书在版编目(CIP)数据

转化与化归/杨世明著.—郑州:大象出版社,
2000.10
(中学数学思维方法丛书/王梓坤,张乃达主编)
ISBN 7-5347-2465-1

Ⅰ.转… Ⅱ.杨… Ⅲ.数学课-中学-数学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 18645 号

责任编辑 理 科
责任校对 魏 郭 范 吴
封面设计 马天羽
出　　版 大象出版社(郑州市农业路 73 号 邮政编码 450002)
发　　行 新华书店经销
印　　刷 河南第二新华印刷厂
版　　次 2000 年 10 月第 1 版 2000 年 10 月第 1 次印刷
开　　本 850×1168 毫米 1/32
印　　张 6
字　　数 133 千字
印　　数 1-3 000 册
定　　价 8.20 元

主编　王梓坤　张乃达

责任编辑　理　科
封面设计　马天羽

中学数学思维方法丛书

主　　编　王梓坤　张乃达

编　　委　（以姓氏笔画为序）

王梓坤　过伯祥　杨世明

张乃达　蒋　声

本册作者　杨世明

序

早在 1995 年 8 月，大象出版社（原河南教育出版社）在扬州举办了一个座谈会，邀请十余位教学水平很高的数学教师参加，商讨出版一套“中学数学思维方法丛书”。与会同仁认为，这是一个富有创见的倡议，因而得到大家热烈赞许。提供一套既有较深厚的理论基础，又富有文采和启发性、可读性的关于数学思维的参考书，对中学数学教学，无疑会是非常有益的；而更主要的，广大的中学生们，将在形象思维、逻辑推理和严密计算等方面，学到很多的东西。这对将来无论做什么工作，都会受益无穷。

回想我们青少年时期学习数学的情景，总会有几分乐趣几分惊异。做出了几道难题是乐趣，而惊异则来自方法的进步。记得小学算鸡兔同笼，必须东拼西凑，多一只兔便比鸡多了两条腿，好不容易才能做出一题。而学过代数，这类问题便变得极为简单。做几何题也一样，必须具体问题具体解决，而学过解析几何后便有了一般的

程序可循。至于算圆的面积，如果不用积分便会相当麻烦。由此可见，方法的进步对科学的发展是何等重要。以上是对学习现成的东西而言。如果要进行科研，从事创新、发现或发明，那就更应重视方法，特别是思维方法。没有新思想，没有新方法，要超过前人是很困难的。有鉴于此，一些优秀的数学家便谆谆告诫学生们，要非常重视学习方法和研究方法。美国著名数学家 G. Pólya 写过好几种关于数学思想方法的书，如《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》，后来都成为世界名著，很受欢迎。

学习任何一门科学，都有掌握知识和培养能力两方面。一般说来，前者比较容易。因为知识已经成熟，而且大都已经过前人整理，成为循序渐进的教材。但能力则不然，那是捉摸不定、视之无形的东西，主要靠自己去思考，去探索，去总结，去刻苦锻炼。老师的培养固然重要，但只能起辅导作用。只可意会，不可言传，而有时甚至连意会都做不到。正如游泳，只靠言传是绝对学不会的。这是对受业人而说的。

至于老师，则应无保留地传授自己的经验和体会，尽量缩短学生学习的时间。中国有句古诗：“鸳鸯绣出凭君看，不把金针度与人。”意思是说知识可以输出，但能力不可传授。前一句话意思很好，后一句应改为“急把金针度与人”。这套丛书，正是专门传授金针的。

一般的科学研究方法，可分为演绎与归纳两大类。在数学中，演绎极为重要，而归纳则基本上用不上，除了 C. F. Gauss 等人偶尔通过观察数列以提出一些数论中的猜想而外。不过自从计算机发明后，这种情况已大为改

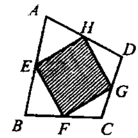
观。混沌学主要靠计算机而发展起来，数学模拟也主要靠计算机。再者，以往数学中极少实验，还是由于计算机的广泛使用，现在不少数学系已有了实验室，特别是统计实验室。可以期望，计算机对改变数学的面貌，对改善数学的思维方法，都会起到越来越大的作用。

在此之前，我国已经出版了几本关于数学方法的书，它们都各有特色。如就规模之大，选题之广，论述之精而言，这套丛书也许是盛况空前、蔚为大观的。我们希望它在振兴我国的科学事业和培养数学人才中，将会起到令人鼓舞的作用。

王梓坤

99.7.6.

目　　录



一、数学与转化

1.转化例说

数学是什么？

数学家们众说纷纭.但是从思维角度看，不过是人们从量的侧面对事物的一种思考，是通过量认识世界万事万物的一种过程、途径、方法.因为事物在不断地运动变化，所以这个过程也充满了从一种形式到另一种形式的转化.

(1)从一则传说谈起

传说，古印度北方有一座圣庙，庙里有一块黄铜板，板上竖着三根宝石针.印度教主梵天在创世之初，把64个大小不同的金盘(中间有孔)由大到小地穿放在其中一根针上(图1).梵天传旨僧侣们，要日夜不停地把金盘从 A 针移到 B 针上，并且规定：每次移一盘，可以 C 针为“中间站”，但大盘不得放于小盘之上.当这64个金盘全

部移到 B 针之时，整个世界将霹雳一声，化为乌有．这大概就是印度教中所说的“世界末日”吧！

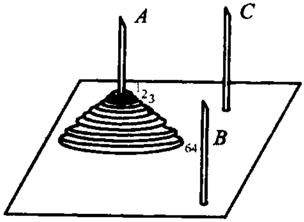


图 1

世界末日何时降临人间？这可是件大事．为了得到明确答案，我们不妨用数学方法，把它转化为一个数学问题来解决．

1° 在此问题中，我们关心的是移完 64 个盘的时间，自然与次数有关．因为同一盘在两针间来回移动只会白费时间，所以我们假定，僧侣们都掌握了恰当的移盘方式，使移盘次数最少．我们以 a_n 表示将 n 个盘从一根针移到另一根针用的最少次数，目的是求出 a_{64}．

2° 怎样求 a_{64}？如果 $n=1$，则 1 次就可把盘 1 由 A 移到 B，因此，$a_1=1$．如果 $n>1$，我们这样想：要想把 n 个盘由 A 移到 B，那么首先应把它上面 $(n-1)$ 个盘移开（移到 C 上，用了 a_{n-1} 次），然后把盘 n 移到 B 上（用了 1 次），最后再把前 $(n-1)$ 个盘由 C 移到 B（又用了 a_{n-1} 次）．这时，就完成了 n 个盘由 A 到 B 的移动，于是有 $2a_{n-1}+1=a_n$，加上 $a_1=1$，得：

$$\begin{cases} a_1=1, \\ a_n=2a_{n-1}+1\,(n=2,3,\cdots). \end{cases} \qquad ①$$

这样，我们就把一个 n 盘问题（计算 a_n），化成了一个 $(n-1)$ 盘问题（计算 a_{n-1}）．事实上，我们做得比较充分：不仅把 64 盘问题化成了 63 盘问题，而且继之，又把 63 盘问题化成了 62 盘问题……只要反复应用①，即知，实际上化成了一盘问题，①叫做数列 $\{a_n\}$ 的递推公式．

3° 但是,事情并没有结束,因为要算 a_{64},须先算 a_{63},为此,又要算 a_{62},a_{61},…,a_1,这是递推公式的一个缺点.有没有能一下子算出 a_{64}(或者说 a_n)的公式呢?

我们先用归纳法猜猜看:

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 2\times 1 + 1 = 3,$$

$$a_3 = 2\times 3 + 1 = 7,$$

$$a_4 = 2\times 7 + 1 = 15,$$

$$a_5 = 2\times 15 + 1 = 31,$$

……

了解 2 的方幂数 2,4,8,16,32,…的人,不难猜想:

$$a_n = 2^n - 1. \qquad ②$$

它是对的吗?学过数学归纳法的读者,当然可以自行证明.下面我们作一简明推导.反复用①:

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 = 2(2a_{n-2} + 1) + 1 \\ &= 2^2 a_{n-2} + 2 + 1 = 2^2(2a_{n-3} + 1) + 2^2 - 1 \\ &= 2^3 a_{n-3} + 2^2 + 2^2 - 1 = 2^3(2a_{n-4} + 1) + 2^3 - 1 \\ &= 2^4 a_{n-4} + 2^3 + 2^3 - 1 = 2a_{n-4} + 2^4 - 1 \\ &\cdots\cdots \\ &= 2^{n-1}\cdot a_1 + 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1}\cdot 1 + 2^{n-1} - 1 \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

$\therefore \quad a_{64} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$(次).

4° 如果移盘 1 次用一秒钟,则共用了 a_{64} 秒.如一年按 365.2422 天算,则共 31556926 秒.那么移完 64 盘要用约

$$a_{64} \div 31556926 \approx 5844 \text{ 亿(年)}$$

据现代宇宙学测算，宇宙年龄不过几百亿年，就算是我们的僧侣已辛勤工作了几百亿年；而太阳系的“寿命”大约还有150亿年，两项合起来尚不足1000亿年，看来梵天真有些失算了.因为太阳系给僧侣们的时间，大约只能完成移盘任务的1/6.

(2)一个趣味旅行问题

某人按如下方式做一次旅行：第一天向东行$\frac{1^2}{2}$千米，第二天向北行$\frac{2^2}{2}$千米，第三天向西行$\frac{3^2}{2}$千米，第四天向南行$\frac{4^2}{2}$千米，第五天又向东行……且旅行都在同一平面上.问：第40天他距第一天出发点多远？

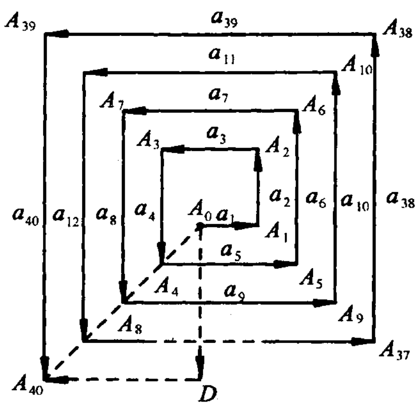


图 2

1° 为了弄清旅行的具体情况，应按题意画出一个图形(图2)，则这个旅行问题就转化为一个几何问题，因为逐日行程越来越长，所以路线形成一条回形折线；

2° 第1天从A_0出发，到达A_1走了$a_1=\frac{1}{2}$千米；

第2天由A_1到A_2，走了$a_2=\frac{2^2}{2}$千米；如规定向东、向北为正，向西、向南为负，则

第3天由A_2到A_3，走了$a_3=-\frac{3^2}{2}$千米；

第4天由A_3到A_4，走了$a_4=-\frac{4^2}{2}$千米；

……

第 37 天由 A_{36} 到 A_{37}，走了 $a_{37}=\frac{37^2}{2}$ 千米；

第 38 天由 A_{37} 到 A_{38}，走了 $a_{38}=\frac{38^2}{2}$ 千米；

第 39 天由 A_{38} 到 A_{39}，走了 $a_{39}=-\frac{39^2}{2}$ 千米；

第 40 天由 A_{39} 到 A_{40}，走了 $a_{40}=-\frac{40^2}{2}$ 千米.

总之：

$a_1, a_5, a_9, \cdots, a_{37}$ 是向东走，$a_2, a_6, a_{10}, \cdots, a_{38}$ 是向北走，均为正；

$a_3, a_7, a_{11}, \cdots, a_{39}$ 是向西走，$a_4, a_8, a_{12}, \cdots, a_{40}$ 是向南走，均为负.

3° 作出 Rt $\triangle A_0A_{40}D$，易见：

$$\begin{aligned} DA_{40} &= A_0A_1+A_2A_3+A_4A_5+\cdots+A_{38}A_{39} \\ &= a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{39}, \\ A_0D &= A_1A_2+A_3A_4+A_5A_6+\cdots+A_{39}A_{40} \\ &= a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{40}, \end{aligned}$$

按勾股定理，有

$$\begin{aligned} A_0A_{40}^2 &= DA_{40}^2+A_0D^2 \\ &= (a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{37}+a_{39})^2 \\ &\quad +(a_2+a_4+a_6+a_8+\cdots+a_{38}+a_{40})^2 \\ &= \left(\frac{1^2}{2}-\frac{3^2}{2}+\frac{5^2}{2}-\frac{7^2}{2}+\cdots+\frac{37^2}{2}-\frac{39^2}{2}\right)^2 \\ &\quad +\left(\frac{2^2}{2}-\frac{4^2}{2}+\frac{6^2}{2}-\frac{8^2}{2}+\cdots+\frac{38^2}{2}-\frac{40^2}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(1^2-3^2+5^2-7^2+\cdots+37^2-39^2)^2 \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4}(2^2-4^2+6^2-8^2+\cdots+38^2-40^2)^2$$

$$=\frac{1}{4}[-2(1+3)-2(5+7)-\cdots-2(37+39)]^2$$

$$+\frac{1}{4}[-2(2+4)-2(6+8)-\cdots-2(38+40)]^2$$

$$=(1+3+5+7+\cdots+37+39)^2+(2+4+6+8+\cdots$$

$$+38+40)^2$$

$$=(20^2)^2+(20\times 21)^2$$

$$=20^2(20^2+21^2)$$

$$=20^2\times 29^2.$$

$\therefore\quad |A_0A_{40}|=20\times 29=580$(千米).

3° 此题设计十分精巧,不仅沟通了几何(回形折线、勾股定理、有向线段等)、代数(线段的数量、数列求和等),而且数字凑得正好计算.如建立坐标系,则只须依次计算 $A_i(x_i,y_i)(i=0,1,\cdots,40)$坐标,再用两点距离公式就可以了.

(3)猪舍问题

有木料可做围墙 24 米,欲围猪舍三间,一面靠旧墙,问:怎样围最大?

1° 如图 3,这是在一定条件下求矩形 *ABCD* 的最大面积问题.

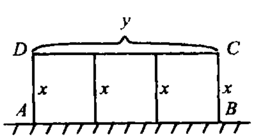


图 3

2° 因 24 米不是 *ABCD* 周长,用几何法不好解.我们引进符号:设猪舍宽 $AD=x$ 米,长 $CD=y$ 米,则依题意有