江汉大学学术丛书
JIANGHAN UNIVERSITY ACADEMIC LIBRARY

点集拓扑基础

DIANJI TUOPU JICHU

王 锋 编著

武汉出版社

江汉大学学术丛书

JIANGHAN UNIVERSITY ACADEMIC LIBRARY

点集拓扑基础

王锋 编著

武汉出版社

(鄂)新登字 08 号
图书在版编目(CIP)数据
点集拓扑基础/王锋编著.—武汉:武汉出版社,2007.9
(江汉大学学术丛书)
ISBN 978-7-5430-3745-8
Ⅰ.点…　Ⅱ.王…　Ⅲ.拓扑空间　Ⅳ.0189.11
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 141996 号

书　名:点集拓扑基础

编　　著:王　锋
责任编辑:齐大勇
封面设计:吴　涛
出　版:武汉出版社
社　址:武汉市江汉区新华下路 103 号　　邮　编:430015
电　话:(027)85606403　85600625
http://www.whcbs.com　　E-mail:wuhanpress@126.com
印　刷:武汉中科兴业印务有限公司　　经　销:新华书店
开　本:850mm×1168mm　1/32
印　张:9.875　　字　数:248 千字　　插　页:6
版　次:2007 年 9 月第 1 版　　2007 年 9 月第 1 次印刷
定　价:28.00 元

作者简介

王锋：男，1947年9月出生，辽宁省抚顺市人。1981年毕业于武汉师范学院汉口分部数学系，现为江汉大学数学与计算机科学学院教授、湖北省暨武汉市数学学会常务理事。主要从事常微分方程定性、稳定性、分支理论以及分析数学、拓扑学的教学与研究工作，在国内外学术刊物上发表学术论文40余篇，主持和参与省、市科研课题4项。1997年、2002年先后两次享受武汉市政府专项津贴，2000年被评为武汉市优秀专家。

《江汉大学学术丛书》

总　序

在我们跨入人类又一个新千年的时刻，白云黄鹤的武汉终于迎来了一所将与武汉特大中心城市地位相称的地方一流综合性大学——江汉大学。

在我国高等教育布局中，武汉是个高校林立、人文及科技精英荟萃的重镇，以武汉大学、华中科技大学为代表的高等院校享誉国内外。江汉大学在这样的时空环境中建立，面临的挑战，肩负的重任是不言而喻的。

要建成一所名副其实的地方一流综合性大学，需要的条件很多：好的校长，一批高水平的教授，好的校园环境及设施，高水平的教学和管理等。但是，不可否认，最重要的方面之一是源源不断的、紧跟时代学术潮流的高质量科研成果。

这里的《江汉大学学术丛书》是江大学人为中国高等教育面向世界、面向未来、面向现代化的一份微薄奉献，是对人民期望的回报，是对科教兴国的呼应。

《江汉大学学术丛书》是江大学人对21世纪中国政治、经济、文化诸多存在的一份认真的思考与回答，是江大

学人对具有中国特色社会主义建设贡献的聪明才智的结晶。

《江汉大学学术丛书》体现江汉大学学术成果的水平，涉及哲学、经济学、法学、文学、历史学、理学、工学、农学、医学及管理学等诸多领域，显示老一辈专家和中青年学者组成的学术阵容。

《江汉大学学术丛书》一定要成为培养江汉大学学术精英、建设江汉大学师资队伍和回报社会的园地。在这里，锻炼我们的学术品格，提升我们的学术水准，并成为我们的学术象征。

《江汉大学学术丛书》实行科学、公正、公开的选拔原则，经校学术委员会执行严格的评审、投票程序，遴选相应著作。

其山巍巍，其水淼淼，学无止境，江大学人努力吧！

薪火相传，代代不息，江大学人努力吧！

李进才

2001年2月

前 言

拓扑学是近代数学的三大基础之一,(一般地认为近代数学的三大基础是:泛函分析、抽象代数、拓扑学。)是研究抽象空间的理论的一门学科,它具有高度的概括性和抽象性。正因为如此,拓扑学给数学本身的研究提供了极大的发展空间,同时也为其他学科的研究与发展提供了广泛的应用工具。但也正因为它的高度抽象,使得许多初学者望而生畏,止步在现代数学的门槛边。

其实,拓扑空间并不神秘,它有我们非常熟悉的原始模型——实数空间。由于科学技术的发展,也由于数学自身的发展,建立在实数理论基础上的诸如极限、连续性等理论已经不够用了,我们需要在任意集合上去研究映射的连续性等问题,于是就产生了拓扑空间。所谓拓扑空间就是:在一个非空集合上,给出满足一定条件的子集族(称之为拓扑),也就是在这个非空集合上给出了一个数学结构,这个数学结构也叫做拓扑结构(用这样的拓扑结构来刻划该集合中点与点之间的关系),这个非空集合连同它的拓扑就称之为拓扑空间。我们在大学里学习的实数空间就是一个拓扑空间。

本书共分七章,第一章从微积分谈起,编写这章的目的,一是为了消除初学者对点集拓扑的畏惧感,二是为学习点集拓扑的基

础知识做好必要的数学准备。在本章中，除了度量空间外，其他的知识点都是大学一、二年级已经学习过的数学内容（本书对这部分内容仅作了概念和结论方面的介绍）。对于度量空间，本章只选取了从实数空间过渡到度量空间中的最基本的知识点，这些知识点均是为建立拓扑空间做准备的，而度量空间的其他知识则融于相应的拓扑空间中。

第二章到第六章，是点集拓扑学的基本而重要的内容，在这几章中，介绍了拓扑空间中的许多基本概念，研究了建立拓扑空间的常见方法，讨论了具有某些特殊性的拓扑空间的重要性质（如拓扑不变性质、有限可积性质、遗传性质等）及有关结论，讨论了拓扑空间中的连续映射、拓扑空间中的序列等基础性的内容。其中，不少的结论综合了许多著作、论文以及作者本人在教学研究中的一些成果。

第七章有三部分内容：一是介绍了拓扑学中的一个重要问题——拓扑空间可度量化的问题。二是从高度抽象的拓扑空间回到熟知的实数空间，用拓扑空间的观点来看微积分中的一些重要结论。三是进一步讨论度量空间中的若干问题。作为综合应用，我们还将分散在前面各章节中的拓扑空间的有关结论，有机地融合在这一节里，对全书最基本的内容作了一个小结。

为使读者对抽象的拓扑空间不至于太感陌生，本书的各章节都是尽可能地从实数空间出发，从实际例子出发，从几何直观出发，深入浅出地引导出点集拓扑的基本概念和重要定理，并通过大量的例题来学习、巩固拓扑学中的基本知识。本书的各部分采用

围绕一个主题或主要定理的方式进行编写，有些由该主题而衍生的一些附带结论，则置于文后的说明中，这样既显得主题突出、条理清晰，而且也不影响点集拓扑学中基本知识的学习。

这种从熟知的实数空间过渡到相对熟悉的度量空间，再过渡到抽象的拓扑空间，然后再回到度量空间和实数空间的编写方式，希望能对读者由浅入深地学习点集拓扑学有所帮助，达到让初学者“入门”的目的。

由于作者是为初学者提供一本“点集拓扑”的入门书，因此，在本书中，有些点集拓扑学中内容（如无穷积空间）没有被讨论，不过，在本书各章的最后，作者向读者提出了应继续学习的若干知识点。希望本书能帮助读者较全面地了解点集拓扑学中最重要、最基础的知识，并为读者进一步学习更深层次的拓扑学（如代数拓扑、微分拓扑）及近代数学打下一定数学基础。

在本书中，有少量的定理或例题没有被证明，作者将它们集中在附录1（问题与练习）中，这样，一方面可使此文简洁、重点突出，另一方面也希望能让读者通过一定的练习达到学习的目的。

本书中，一些被直接引用的数学符号是常用的，如：

$\forall$：表示对每一个，对任意一个.

$\exists$：表示存在.

$A-B$：表示集合 A 与 B 的差集等.

那些具有特定的意义的符号均在行文中有所说明，这里就不再一一列举了。

感谢江汉大学党委书记徐茂才教授对作者的关心、帮助与

支持，感谢江汉大学科学研究处为本书出版提供的帮助，感谢江汉大学图书馆工作人员王敏和赵明两位同志，他们在搜集文献资料、编写名词索引以及全文校对等工作中付出了辛勤劳动，同时还感谢江汉大学数学与计算机科学学院有关领导和老师对作者工作的支持。

作　者

2007 年 4 月

目　　录

第 1 章
从微积分谈起

§1.1　欧氏空间

1.1.1　数列的极限与函数的极限

极限是微积分中的最基本、最核心的概念，连续、微分、积分、级数的收敛等一系列的概念无不以它为基础，在微积分中，极限有许多形式，我们以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 和$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 为例来说明.

在微积分中，我们学习过的极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 的定义如下：

定义 1.1.1　设$\{x_n\}$是一个数列，A 是一个确定的数，若$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in Z^+$使得当$n>N$时都有$|x_n-A|<\varepsilon$，则称数列$\{x_n\}$收敛于A，A 称作它的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 的几何意义是；不论ε 是多小的正数，在数列$\{x_n\}$中总存在相应的一项x_n，使得凡是下标大于n 的所有的项x_n 都落在A 的ε 邻域内，也就是x_n 与A 的距离小于ε，这样，我们用x_n 与A