

■ 主编 朱 军

数字 信号处理

SHUZI XINHAO CHULI

合肥工业大学出版社

数字信号处理

主 编 朱 军

副主编 杨会成 李 阳 周巧喜



合肥工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理/朱军主编. —合肥:合肥工业大学出版社,2009.1

ISBN 978-7-81093-767-2

I. 数… II. 朱… III. 数字信号—信号处理—高等学校—教材 IV. TN911.72
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 201757 号

数字信号处理

主编 朱 军

责任编辑 陆向军

责任校对 方 丹

出 版 合肥工业大学出版社

地 址 合肥市屯溪路 193 号

邮 编 230009

电 话 总编室:0551—2903038

发行部:0551—2903198

网 址 www.hfutpress.com.cn

E-mail press@hfutpress.com.cn

版 次 2009 年 1 月第 1 版

印 次 2009 年 1 月第 1 次印刷

开 本 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 13

字 数 310 千字

印 刷 安徽江淮印务有限责任公司

发 行 全国新华书店

ISBN 978-7-81093-767-2 定价: 22.00 元

如果有影响阅读的印装质量问题,请与出版社发行部联系调换。

前 言

“数字信号处理”课程是电子信息类本科各专业学生必修的一门核心基础课,通过本课程的学习,使学生掌握数字信号处理的基础理论和基本方法,培养学生的科学思维方法和创新精神,为学生学习有关专业课程奠定必要的基础。

本书是合肥工业大学出版社规划的电子信息类教材之一。本教材的主要读者对象为电子信息类专业的本科生,但也可供相关专业的科技人员参考。

本书共分8章,第1章首先介绍数字信号处理的基本概念,使学生了解数字信号处理系统的基本组成及广泛的应用前景;第2~3章介绍离散时间信号与系统及 Z 变换,分别讨论了常数系数线性差分方程、连续时间信号的抽样、 Z 变换的基本性质和定理、用单边 Z 变换解线性差分方程、三种变换之间的关系、系统的频率响应的分析方法;在第4~5章中分别讨论了离散傅里叶变换的原理、快速傅里叶变换的原理及其典型应用,其中第4章按照周期序列、卷积、周期序列的傅里叶级数(DFS)、周期序列的傅里叶变换、离散傅里叶变换(DFT)及其应用的思路展开讨论;第5章对方法FFT算法的引入、时域抽取基2FFT算法、频域抽取基2FFT算法、高效率计算FFT的方法的探讨、离散傅里叶反变换的FFT算法等内容展开讨论;第6章介绍了数字滤波器的分类与结构表示方法、IIR和FIR滤波器的结构实现;第7章介绍了IIR数字滤波器的设计方法,包括冲激响应不变法和双线性变换法,另外可以通过频率变换法和在数字域直接设计的方法设计IIR数字滤波器;第8章介绍了线性相位FIR数字滤波器的特点和窗函数设计法,利用频率采样法设计FIR滤波器和优化设计方法,FIR滤波器设计通过MATLAB软件实现。各章末尾均附有对本章主要内容的小结。附录给出了书中使用的部分MATLAB命令名称,以便读者查用。

本书由朱军、李阳、杨会成、周巧喜合作编写,其中第2、3章由周巧喜编写,第4、5章由李阳编写,第1章、第6章和第7章由朱军编写,第8章由杨会成编写,最后由朱军负责全书的统稿工作。本书融入了编写者长期从事“数字信号处理”课程教学的经验和体会。

在本书的编写过程中,得到了许多同志的大力支持与帮助。合肥工业大学出版社和陆军编辑为本书的出版给予了大力支持和帮助,作者在此一并表示衷心的感谢。

由于编写者水平有限,书中难免存在一些缺点和错误,敬请广大读者批评指正。

编 者

2009年1月于合肥

目 录

第 1 章 绪 论	(1)
1.1 信号的分类与信号处理	(1)
1.2 数字信号处理系统的组成和特点	(2)
1.3 数字信号处理学科的发展与内容	(3)
1.4 数字信号处理的应用和发展方向	(4)
1.5 本书内容安排	(5)
第 2 章 离散时间信号与系统	(6)
2.1 离散时间信号	(6)
2.2 离散时间系统	(13)
2.3 常系数线性差分方程	(19)
2.4 连续时间信号的抽样	(23)
本章小结	(29)
习 题	(29)
第 3 章 离散时间信号和系统的频域分析	(32)
3.1 Z 变换的定义及收敛域	(32)
3.2 Z 反变换	(35)
3.3 Z 变换的基本性质和定理	(40)
3.4 用单边 Z 变换解线性差分方程	(45)
3.5 序列的 Z 变换与连续信号的拉普拉斯变换、傅里叶变换的关系	(46)
3.6 序列傅里叶变换的定义	(49)
3.7 序列傅里叶变换的性质	(50)
3.8 离散系统的系统函数, 系统的频率响应	(55)

本章小结	(61)
习 题	(62)
第 4 章 离散傅里叶变换(DFT)	(65)
4.1 周期序列	(65)
4.2 周期序列的傅里叶级数和傅里叶变换	(71)
4.3 离散傅里叶变换的定义	(74)
4.4 离散傅里叶变换的基本性质	(77)
4.5 频率域采样	(82)
4.6 DFT 的应用	(83)
本章小结	(91)
习 题	(93)
第 5 章 快速傅里叶变换(FFT)	(95)
5.1 快速傅里叶变换方法的引入	(95)
5.2 时域抽取基 2FFT 算法	(97)
5.3 频域抽取基 2FFT 算法	(104)
5.4 高效率计算 DFT 的方法的探讨	(107)
5.5 离散傅里叶逆变换的 FFT 算法	(108)
5.6 线性调频 Z 变换算法	(109)
5.7 典型 FFT 算法的 MATLAB 实现	(112)
本章小结	(117)
习 题	(118)
第 6 章 数字滤波器概述	(120)
6.1 数字滤波器的分类与结构表示方法	(120)
6.2 无限长单位冲激响应(IIR)滤波器的结构实现	(121)
6.3 有限长单位冲激响应(FIR)滤波器的结构实现	(125)
本章小结	(128)
习 题	(129)

第 7 章 无限长单位冲激响应(IIR)数字滤波器的设计	(130)
7.1 数字滤波器设计概述	(130)
7.2 模拟滤波器的设计	(131)
7.3 基于模拟滤波器设计 IIR 数字滤波器	(139)
7.4 冲激响应不变法	(139)
7.5 双线性变换法	(143)
7.6 设计 IIR 滤波器的频率变换法	(147)
7.7 IIR 数字滤波器的直接设计法	(152)
本章小结	(157)
习 题	(158)
第 8 章 有限长单位冲激响应(FIR)数字滤波器的设计	(160)
8.1 线性相位 FIR 数字滤波器的特点	(160)
8.2 窗函数设计法	(167)
8.3 利用频率采样法设计 FIR 滤波器	(176)
8.4 FIR 数字滤波器的优化设计	(181)
8.5 FIR 滤波器设计的 MATLAB 实现	(186)
本章小结	(191)
习 题	(193)
附 录	(195)
参考文献	(197)

第1章 绪论

信息化的基础是数字化,数字化的核心技术之一是数字信号处理(Digital Signal Processing,简称DSP)。DSP技术已成为人们日益关注的并得到迅速发展的前沿技术。DSP可以代表数字信号处理器(Digital Signal Processor),也可以代表数字信号处理技术,后者是理论上的技术,要通过前者变成实际产品。DSP技术正在极大地改变着我们的生活和体验,DSP的核心是算法与实现,越来越多的人正在认识和使用它。掌握DSP技术,必须从信号处理的基本概念、基本算法及其实现入手,在此基础上进一步了解DSP的应用以及发展趋势,真正发挥出DSP的作用。

1.1 信号的分类与信号处理

信号是信息的物理表现形式,或者说是传递信息的函数,而信息则是信号的具体内容。例如:电视里播放的电视节目是视频信号,它传递给观众各方面的信息——科技、娱乐、新闻和气象信息等等;普通电话里传输的是语音信号,它使通信双方通过语言交流了解彼此的情况。根据载体的不同,信号可以是热、声、光、电、磁、机械的各种信号。

可以从不同的角度对信号进行分类:

1. 根据信号是几个变量的函数,可以分为一维信号、二维信号、 M 维信号等。如果信号是一个变量的函数,例如时间变量的函数,则称为一维信号;如果信号是两个变量的函数,例如是空间坐标 x, y 变量的函数,则称为二维信号; M 维信号是 M 维变量的函数。

2. 根据信号是否具有周期性,可以分为周期信号和非周期信号。例如,正弦信号为周期信号,非正弦信号为非周期信号。

3. 根据信号的取值,可以分为确定信号和随机信号。如果信号在任意时刻的取值能够精确确定,则称为确定信号;如果信号在任意时刻的取值是随机的,不能够精确确定,则称为随机信号。

4. 根据信号的能量或功率是否有限,可以分为能量信号和功率信号。如果信号能量有限,则称为能量信号;如果信号功率有限,则称为功率信号。例如非周期的绝对可和的信号是能量信号;周期信号和随机信号由于能量不是有限的,所以不是能量信号,而其功率在一个周期或一段时间内是有限的,因此是功率信号。

5. 根据时间变量与信号幅值的连续与离散性,可以分为模拟信号、连续时间信号、离散时间信号和数字信号。

- (1) 模拟信号:时间和幅值都是连续的。

- (2) 连续时间信号:又可以简称为连续信号,它在时间上是连续的,幅值上是连续的或离散的。

- (3) 离散时间信号:又可以简称为离散信号或序列,它在时间上是离散的,幅值上是连续的。

- (4) 数字信号:信号在时间上是离散的,幅值是量化的。由于幅值是量化的,所以幅值可以

表示成二进制码的形式。

系统是对信号进行处理的物理设备,按照所处理的信号的种类可以将系统分为模拟系统、连续时间系统、离散时间系统和数字系统。其中,离散时间系统的输入和输出均为离散信号,数字系统的输入和输出均为数字信号。本书只讨论一维离散时间信号的处理问题,离散时间信号和离散时间系统理论是数字信号处理的理论基础。简单来说,信号处理是对含有信息的信号进行处理或变换,以获得所希望的信号即提取有用信息的过程。信号处理的主要内容包括变换、滤波、检测、谱分析和估计、压缩和识别等。

1.2 数字信号处理系统的组成和特点

数字信号处理系统与模拟信号处理系统相比,具有精度高、灵活性高、可靠性强和容易大规模集成等优点。由于数字信号处理的突出特点,它在通信、语音处理、图像处理、电视、雷达、生物医学信号处理等领域日益得到广泛的应用。数字信号处理系统的基本组成如图 1.2.1 所示,主要包括前置预滤波器、A/D 变换器、数字信号处理器等几个组成部分。



图 1.2.1 数字信号处理系统的基本组成

图 1.2.1 表示的是模拟信号 $x_a(t)$ 输入数字信号处理器的处理过程,首先经过前置预滤波器将 $x_a(t)$ 中高于折叠频率的分量滤除;然后在 A/D 变换器中对滤波之后的模拟信号抽样,变成离散时间信号;同时在 A/D 变换器的保持电路中将抽样信号的幅度进行量化编码,变换成数字信号 $x(n)$ 。它是数的序列,每个数用有限位二进制数码表示。数字信号序列 $x(n)$ 输入到数字信号处理器,按照预定的要求进行变换处理,输出数字信号 $y(n)$ 。纯数字系统因为输入的是数字信号,所以就不需要前置预滤波器和 A/D 变换器两个组成部分。

图 1.2.1 中的数字信号处理器可以是数字计算机或微处理器,通过软件编程对输入的数字信号进行变换和处理。例如在非实时语音信号处理的场合,对于含有噪音的语音信号,将其转换成数字信号后输入计算机,然后通过数字滤波算法滤除噪音,得到清晰的语音信号。数字语音信号还可以通过 D/A 变换器和模拟滤波器还原为模拟语音信号。

另外,图 1.2.1 中的数字信号处理器还可以采用数字信号处理芯片,它分为专用 DSP 芯片和通用 DSP 芯片。其中专用 DSP 芯片只能针对某一种应用,通过加载数据、控制参数、加控制信号以使它具有有限的可编程能力,处理速度快,可以满足实时性要求,但是灵活性差,并且专用 DSP 芯片一般都是定点型,动态范围和精度较差。而通用 DSP 芯片有定点型和浮点型两种,具有通用性强和应用范围较广的特点。

以数字信号处理为基础的数字信号处理系统(DSP 系统)与传统的模拟信号处理系统相比较具有以下优点:

(1) 接口简单、方便。由于数字信号的电气特性简单,不同的 DSP 系统相互连接时,在硬件接口上容易实现。在数据流接口上,各系统间只要遵循特定的标准协议即可。

(2) 精度高,稳定性好。数字信号处理仅受到量化误差和有限字长的影响,处理过程不引入其他噪声,因此具有较高的信噪比。另外,模拟系统的性能受到元器件参数性能影响比较大,而数字系统基本不变,因此数字系统更便于测试、调试及批量生产。

(3) 编程方便,容易实现复杂的算法。在DSP系统中,DSP芯片提供了一个高速计算平台,系统功能依赖于软件编程实现。特别是与现代信号处理理论和计算数学相结合时,可以实现复杂的数字信号处理功能。

(4) 集成方便。现代DSP芯片都是将DSP芯核及其外围电路综合集成在单一芯片上。这种结构便于设计便携式高集成度的数字产品。

另外,DSP芯片作为可编程超大规模集成(VLSI)电路器件,还可以通过可下载的软件和固件来实现数字信号处理功能。DSP芯片除具备普通微处理器的运算和控制功能外,还针对高数据传输速率、数值运算密集的实时数字信号处理,在处理器结构、指令系统和指令流程设计上不断进行改进。

1.3 数字信号处理学科的发展与内容

数字信号处理学科的理论基础是计算数学,它的学科体系是在20世纪40—50年代建立起来的,而真正意义上的数字信号处理研究是在20世纪50年代末至60年代初期才开始的。1965年库利(Cooley)和图基(Tukey)在“Mathematics of Computation”上发表了《用机器计算复序列傅里叶级数的一种算法》即“快速傅里叶变换算法”的论文,促进了数字信号处理理论的蓬勃发展,逐渐形成了一套完整的理论体系并且成为独立发展的学科。进入20世纪80年代以后,尤其是在90年代中期,数字信号处理的理论和技术更加成熟,它开始渗透到其他学科应用领域,并与语音、图像、通信等信息产业紧密结合,不断在理论和技术上有所突破和创新,在这一时期小波变换和人工神经网络的算法研究与应用,就是典型的数字信号处理理论发展的实例。2000年以后,数码相机、数字电视和手持电子设备等数码产品的迅速发展进一步促进了高性能数字信号处理器的广泛使用。数字信号处理学科的内容主要包括以下几个方面:

1. 离散时间线性时不变系统分析。
2. 离散时间信号时域与频域分析,离散傅里叶变换理论。
3. 谱分析和快速傅里叶变换,快速卷积与相关算法。
4. 数字滤波技术,主要包括IIR和FIR滤波器设计。
5. 信号的采集,量化噪声理论等。
6. 自适应信号处理。
7. 功率谱估计与相关函数估计等。
8. 语音信号与图像信号的压缩。
9. 同态处理、抽取与插值、信号重建等。
10. 数字信号处理的实现与应用。

数字信号处理学科的内容还在不断的发展和完善中,本书重点介绍了离散时间线性时不变系统分析、离散时间信号时域与变换域分析、离散傅里叶变换理论、快速傅里叶变换理论、快速卷积与相关算法、IIR和FIR滤波器设计方法。其中数字滤波技术中结合应用实例通过MATLAB编程加以实现。

1.4 数字信号处理的应用和发展方向

数字信号处理在理论上和方法上正在向更深的层次发展,使得数字信号处理的应用领域不断扩大。早在 1978 年 A. V. Oppenheim 在“Application of Digital Signal Processing”一书中列举了数字信号处理在语音、图像、通信、音响、雷达、声呐和地球物理七个方面的应用。随着计算机、超大规模集成电路、数字信号处理新技术的发展,上述在各领域应用的系统也在不断地更新换代。例如在图像处理方面,对于图像数据的压缩是多媒体通信、影碟机和高清晰度电视的关键技术,国际上先后制定的标准有 H. 261、H. 263、H. 264、JPEG、MPEG-1、MPEG-2、MPEG-3、MPEG-4、MPEG-5,这些标准均使用了数字信号处理中的离散余弦变换(DCT)算法。20 世纪 90 年代以来,数字信号处理不断开辟新的应用领域,例如在自动控制领域的应用有导航和全球定位,将 FFT 算法应用于振动分析和机械故障诊断,磁盘驱动控制、激光打印控制和机器人控制等;在消费电子领域的应用有智能玩具、数字留言机、扫描仪、机顶盒、可视电话等;在医学应用中,将数字信号处理技术应用于心电和脑电等生物电信号的分析和处理,并已经开发了相应的医疗诊断设备。

数字信号处理的应用离不开数字信号处理器的发展,随着大规模集成电路技术的发展,1982 年世界上诞生了首枚 DSP 芯片。这种 DSP 器件采用微米工艺 NMOS 技术制作,虽功耗和尺寸稍大,但运算速度却比 MPU 快了几十倍,尤其在语音合成和编码解码器中得到了广泛应用。DSP 芯片的问世标志着 DSP 应用系统由大型系统向小型化迈进了一大步。随着 CMOS 技术的进步与发展,第二代基于 CMOS 工艺的 DSP 芯片应运而生,其存储容量和运算速度成倍提高,成为语音处理、图像硬件处理技术的基础。80 年代后期,第三代 DSP 芯片问世,运算速度进一步提高,其应用范围逐步扩大到通信、计算机领域。

90 年代 DSP 发展最快,相继出现了第四代和第五代 DSP 器件。现在的 DSP 属于第五代产品,它与第四代相比,系统集成度更高,将 DSP 芯核及外围组件综合集成在单一芯片上。这种集成度极高的 DSP 芯片不仅在通信、计算机领域大显身手,而且逐渐渗透到人们日常消费领域,前景十分可观。

DSP 在其发展的道路上不断满足人们日益提高的要求,正在逐渐朝个人化和低功耗化方向发展,其前景是非常可观的。目前一般的 DSP 运算速度为 100MIPS,即每秒钟可运算 1 亿条指令。由于电子设备的个人化和客户化趋势,DSP 必须追求更高更快的运算速度,才能跟上电子设备的更新步伐。DSP 运算速度的提高,主要依靠新工艺改进芯片结构。当前 DSP 器件大都采用 $0.5\mu\text{m} \sim 0.35\mu\text{m}$ CMOS 工艺,按照 CMOS 的发展趋势,DSP 的运算速度可以达到 3000 GIPS,即每秒钟可运算 3 万亿条指令,可以置于任何系统中。

数字信号处理的发展表现在很多方面,以下列举三个方面:

1. 由简单的运算走向复杂的运算。数字信号处理器(Digital Signal Processor)将是未来集成电路中发展最快的电子产品,并成为电子产品更新换代的决定因素。
2. 由低频走向高频。A/D 变换器的采样频率已经高达数百兆赫兹,可以将视频甚至更高频率的信号数字化后送入计算机处理。
3. 由一维走向多维。多维信号处理的应用领域包括高分辨率彩色电视、雷达、全球定位系统、航空航天太空探测等。

1.5 本书内容安排

本书对数字信号处理的基本理论和算法实现作了系统的介绍,并举例说明了利用 MATLAB 软件进行信号分析与应用设计的方法。本书共分为 8 章,第 1 章介绍了信号的分类与信号处理的基本概念、数字信号处理系统的基本组成、数字信号处理学科的发展与主要内容、数字信号处理的应用和发展方向;第 2 章介绍了离散时间信号与系统、常系数线性差分方程、连续时间信号的抽样;第 3 章讲述 Z 变换的定义及收敛域、 Z 变换的基本性质和定理、用单边 Z 变换解线性差分方程、序列的 Z 变换与连续信号的拉普拉斯变换、傅里叶变换的关系、序列傅里叶变换的定义和性质、离散系统的系统函数和系统的频率响应;第 4 章和第 5 章分别讲述离散傅里叶变换算法和快速傅里叶变换算法;第 6 章介绍了数字滤波器的分类与结构表示方法、IIR 和 FIR 滤波器的结构实现;第 7 章介绍了模拟滤波器的设计,并在此基础上设计 IIR 数字滤波器,设计的具体方法有冲激响应不变法和双线性变换法,另外可以通过频率变换法和在数字域直接设计的方法设计 IIR 数字滤波器;第 8 章介绍了线性相位 FIR 数字滤波器的特点和窗函数设计法,利用频率采样法设计 FIR 滤波器和优化设计方法,FIR 滤波器设计的 MATLAB 软件实现。

MATLAB 是 MathWorks 公司于 1982 年推出的功能强大、易于使用的高效数值计算和可视化软件,它为进行算法开发、数据计算、信号分析与可视化提供了交互式应用开发环境。本书结合 MATLAB 编程环境(M 语言)对快速傅里叶变换算法和滤波器设计进行软件实现,可以帮助学生更加直观和尽快地掌握数字信号处理的基本理论和算法,并为后续的“现代数字信号处理”和“随机信号处理”等课程的学习打下坚实的基础。

第2章 离散时间信号与系统

信号是传递信息的函数。例如,交通红绿灯是信号,它传递的信息是:红——停止,绿——通行。

按照信号特点的不同,信号可以表示成一个自变量或几个自变量的函数。而关于信号的自变量,有多种形式,可以是时间,也可以是频率、空间或其他物理量。若信号是一个变量(例如时间)的函数,则称为一维信号;若信号是两个变量(例如空间坐标 x, y) 的函数,则称为二维信号;推而广之,若信号为两个以上变量的函数,则称为多维信号。本书只讨论一维信号。针对信号的自变量和函数取值形式,下面介绍三种信号。

(1) 连续时间信号:在连续时间范围内定义的信号,但信号的幅值可以是连续数值,也可以是离散数值。在幅值为连续这一特定情况下又常称为模拟信号。实际上连续时间信号与模拟信号常常通用,用以说明同一信号。

(2) 离散时间信号:时间为离散变量的信号,而幅度仍是连续变化的。该类信号又称时域离散信号。

(3) 数字信号:时间离散而幅度量化的信号,因此,该信号是幅度量化的离散时间信号。

本章作为全书的基础,主要学习离散时间信号的表示方法和典型信号,线性时不变系统的因果性和稳定性,以及系统的输入输出描述方法,线性常系数差分方程的解法。最后介绍连续时间信号的抽样。

2.1 离散时间信号

离散时间信号只在离散时间上给出函数值,是时间上不连续的序列。通常,给出函数值的离散时刻之间隔是均匀的。若此间隔为 T ,可用 $x(nT)$ 表示此离散时间信号在 nT 点上的值, n 为整数。由于可将信号存放在存储器中,供随时取用,加之可以非实时地处理,因而可以直接用 $x(n)$ 表示第 n 个离散时间点上的序列值,并将序列表示成 $\{x(n)\}$ 。为书写简便,以 $x(n)$ 表示序列。注意, $x(n)$ 只在 n 为整数时才有意义, n 为非整数时无意义。

离散时间信号也常用图解(即波形)表示,如图 2.1.1 所示。横轴虽为连续直线,但只在 n 为整数时才有意义,纵轴线段的长短代表各序列值的大小。

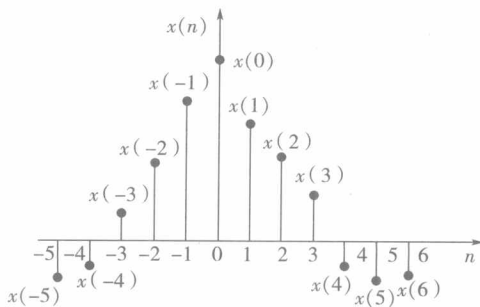


图 2.1.1 离散时间信号的波形

2.2.1 常用的典型序列

1. 单位抽样序列 $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

单位抽样序列也可以称为单位采样序列或单位脉冲序列,特点是仅在 $n = 0$ 时取值为 1,其他均为零。它类似于模拟信号和系统中的单位冲激函数 $\delta(t)$,但不同的是 $\delta(t)$ 在 $t = 0$ 时,取值无穷大, $t \neq 0$ 时取值为零,对时间 t 的积分为 1。单位抽样序列如图 2.1.2 所示。

2. 单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

单位阶跃序列如图 2.1.3 所示。它类似于模拟信号中的单位阶跃函数 $u(t)$ 。但 $u(t)$ 在 $t = 0$ 时常不给予定义,而 $u(n)$ 在 $n = 0$ 时定义为 $u(0) = 1$ 。

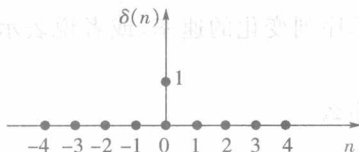


图 2.1.2 单位抽样序列

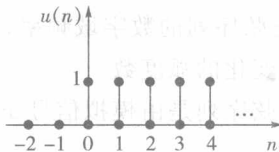


图 2.1.3 单位阶跃序列

$\delta(n)$ 与 $u(n)$ 之间的关系如下式所示:

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (2.1.3)$$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) \quad (2.1.4)$$

令 $n-k=m$,代入上式得到

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^n \delta(m) \quad (2.1.5)$$

3. 矩形序列 $R_N(n)$

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases} \quad (2.1.6)$$

如图 2.1.4 所示,其中 N 称为矩形序列的长度。矩形序列可用单位阶跃序列表示,如下式:

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N) \quad (2.1.7)$$

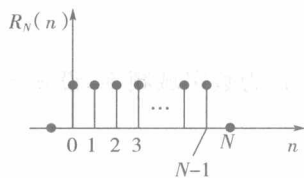


图 2.1.4 矩形序列

4. 实指数序列

$$x(n) = a^n u(n), a \text{ 为实数}$$

如果 $|a| < 1$, $x(n)$ 的幅度随 n 的增大而减小, 称 $x(n)$ 为收敛序列; 如果 $|a| > 1$, 则称为发散序列。其波形如图 2.1.5 所示。

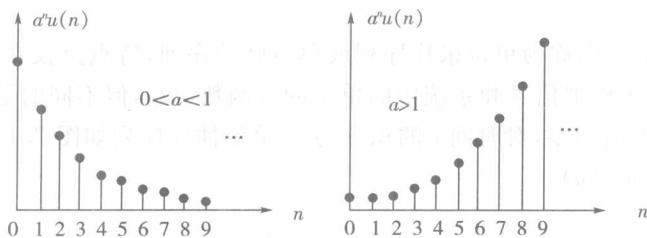


图 2.1.5 实指数序列

5. 正弦序列

$$x(n) = \sin(\omega n)$$

式中, ω 为正弦序列的数字域频率, 单位是弧度, 它表示序列变化的速率, 或者说表示相邻两个序列值之间变化的弧度数。

如果正弦序列是由模拟信号 $x_a(t)$ 采样得到的, 那么

$$x_a(t) = \sin(\Omega t)$$

$$x_a(t) |_{t=nT} = \sin(\Omega nT)$$

$$x(n) = \sin(\omega n)$$

因为在数值上, 序列值与采样信号值相等, 因此得到数字频率 ω 与模拟角频率 Ω 之间的关系为

$$\omega = \Omega T = \Omega / f_s \quad (2.1.8)$$

式中, T 是采样间隔时间, f_s 为采样频率 ($f_s = \frac{1}{T}$)。为区分 ω 与 Ω , 称 ω 为离散域的频率 (正弦序列的数字域频率), 而 Ω 为连续域的正弦频率。可以认为数字域频率是模拟角频率对采样频率的归一化频率。本书中均用 ω 表示数字域频率, Ω 和 f 分别表示模拟角频率和模拟频率。

6. 复指数序列

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_0)n}$$

式中, ω_0 为数字域频率, 设 $\sigma = 0$, 用极坐标和实部虚部表示如下式:

$$\begin{cases} x(n) = e^{j\omega_0 n} \\ x(n) = \cos(\omega_0 n) + j\sin(\omega_0 n) \end{cases}$$

由于 n 取整数, 下面等式成立:

$$e^{j(\omega_0 + 2\pi M)n} = e^{j\omega_0 n}, M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

这表明复指数序列具有以 2π 为周期的周期性, 在以后的研究中, 频率域只考虑一个周期就够了。

7. 周期序列

如果对所有 n 存在一个最小的正整数 N , 使下面等式成立:

$$x(n) = x(n + N), \quad -\infty < n < \infty \quad (2.1.9)$$

则称序列 $x(n)$ 为周期性序列, 周期为 N , 注意 N 要取整数。例如:

$$x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

上式中, 数字频率是 $\pi/4$, 由于 n 取整数, 可以写成下式:

$$x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{4}(n + 8)\right)$$

上式表明 $\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ 是周期为 8 的周期序列, 也称正弦序列, 如图 2.1.6 所示。下面讨论一般正弦序列的周期性。

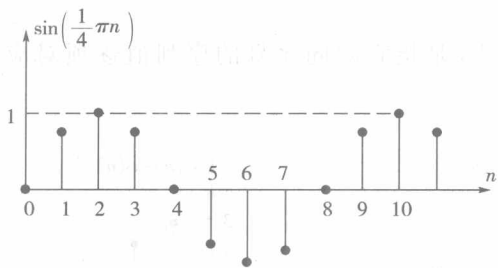


图 2.1.6 正弦序列

设

$$x(n) = A\sin(\omega_0 n + \varphi)$$

那么

$$x(n + N) = A\sin(\omega_0(n + N) + \varphi) = A\sin(\omega_0 n + \omega_0 N + \varphi)$$

若 $\omega_0 N = 2\pi k$, k 为整数时, 则

$$x(n + N) = x(n)$$

这时正弦序列就是周期序列, 其周期为 $N = (2\pi/\omega_0)k$ 。

具体正弦序列有以下三种情况:

(1) 当 $2\pi/\omega_0$ 为整数时, $k = 1$, 正弦序列是以 $2\pi/\omega_0$ 为周期的周期序列。例如 $\sin(\pi/8)n$, $\omega_0 = \pi/8$, $2\pi/\omega_0 = 16$, 该正弦序列周期为 16。

(2) $2\pi/\omega_0$ 不是整数, 是一个有理数时, 设 $2\pi/\omega_0 = P/Q$, 式中 P, Q 是互为素数的整数, 取 $k = Q$, 那么 $N = P$, 则正弦序列是以 P 为周期的周期序列。例如 $\sin(4/5)\pi n$, $\omega_0 = (4/5)\pi$, $2\pi/\omega_0 = 5/2$, $k = 2$, 该正弦序列是以 5 为周期的周期序列。

(3) $2\pi/\omega_0$ 是无理数, 任何整数 k 都不能使 N 为正整数, 这时, 正弦序列不是周期序列。这和连续时间信号时是不一样的。

以上介绍了几种常用的典型序列, 对于任意序列, 常用单位抽样序列的移位加权和表示, 即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \quad (2.1.10)$$

式中

$$\delta(n-m) = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

这种任意序列的表示方法, 在信号分析中是一个有用的公式。

2.1.2 序列的运算

在数字信号处理中, 序列有下面几种运算, 它们是乘法、加法、移位、翻转及尺度变换。

1. 乘法和加法

序列之间的乘法和加法, 是指它的同序号的序列值逐项对应相乘和相加, 如图 2.1.7 所示。

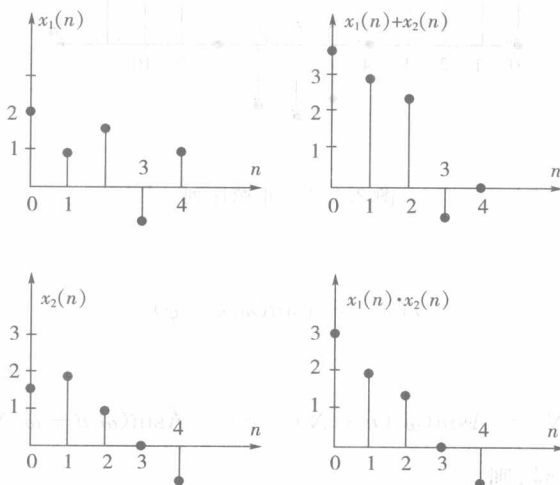


图 2.1.7 序列的加法和乘法

2. 移位、翻转及尺度变换

设序列 $x(n]$ 用图 2.1.8(a) 表示, 其移位序列 $x(n-n_0)$ (当 $n_0 = 2$ 时) 用图 2.1.8(b) 表示; 当 $n_0 > 0$ 时称为 $x(n)$ 的延序列; 当 $n_0 < 0$ 时, 称为 $x(n)$ 的超前序列。 $x(-n)$ 则是 $x(n)$ 的翻转序列, 用图 2.1.8(c) 表示。 $x(mn)$ 是 $x(n)$ 序列每隔 m 点取一点形成的, 相当于时间轴 n