金太阳系列丛书

丛书主编　陈东旭

热点重点难点专题透析

——新课标高考第二轮复习用书（B版）

数学

江西金太阳教育研究所　编

江西高校出版社

新课标

前 言

本套书为2008年高考第二轮复习专用.它根据教学实际,以专题归类的形式把高中各科主干知识的内容明晰化、条理化、概念化、规律化.专题关注高考热点、重点、难点,"讲"、"练"结合,使同学们能针对不足,逐点突破,对自已的薄弱部分进行补充,同时在训练中熟记考试内容,掌握应试技巧,提高综合素质.

本册为数学分册,突出知识的综合与交汇,致力于解题方法与技巧的归纳、点拨与提高.设有高考热点、思想方法与2008年高考强化训练三大板块,共有十三个专题.前几个专题设置"考点聚焦"、"金题研习"、"08前瞻"、"跟踪集训"四个栏目;后四个专题突出培养考生的数学思想方法与解法训练,与前九个专题的体例有所不同,第三板块是强化训练.

【考点聚焦】 揭示涉及本专题内容的高考试题的特征与分值,展现这些试题中涉及的题型、解题方法、难度系数及由此体现出来的数学思想、数学方法,总结此类试题的总体解题思路等,从宏观上把握高考方向与题型特征.

【金题研习】 揭示涉及本专题内容的各个考点,展现考题的形式与命题特征,精选典型习题,通过对解题过程的剖析,点拨解题关键点、易错点、拓展与变形方向,分析寻找解题切入点和突破口的主要思路与思想方法,总结题型特点、解题方法及思路,形成规律,以求提高实际解题能力.

【08前瞻】 揭示涉及本专题内容的高考试题的命题趋势与方向,包括题型、难易度及与其他内容的交汇联系、涉及的数学思想与主要解题方法,从高考发展趋势上指导考生进行有效复习,具有较强的前瞻性.

【跟踪集训】 直接瞄准2008年高考,根据本专题内容命制与高考方向一致的练习试题,供考生在复习完本专题后自我检测,既具实战意义,同时也起到训练题型和提高解题速度的作用.

在编写过程中,我们本着对读者负责的态度,章章推敲,层层把关,但由于受时间的限制,书中疏漏之处在所难免,在此我们恳请广大读者和有关专家不吝指正,使本书能以其卓越的品质为广大考生的高考之路奠定坚实的基础.

此书是我所多名资深研究员与数十位高考专家、特级教师经过呕心沥血、精益求精的编写,为百万学子奉献的一部经典力作.在编写过程中,我们本着对读者负责的态度,章章推敲,层层把关,但由于受时间的限制,书中疏漏之处在所难免,在此我们恳请广大读者和有关专家不吝指正.相信在你我的共同努力下,使本书能以其卓越的品质为广大考生的高考之路奠定坚实的基础.相信它会给你人生最重要的渡口——高考——指点迷津,让你翩然登上理想的高等学府的神圣殿堂.

愿你——翻遍此书有益处,得分不枉费工夫.

愿你——乘风破浪高考时,心领秘招济学海.

编 者

金太阳系列丛书

以下学校参与本丛书的编写,在此鸣谢:

江苏	南师附中	金陵中学	丹阳中学	前黄高级中学
	常州高级中学	天一中学	南菁高级中学	苏州高级中学
	扬州中学	启东中学	南通中学	姜堰中学
	盐城中学	新海中学	淮阴中学	
山东	曲阜师大附中	山东省实验中学	烟台二中	牟平一中
	济宁一中	高密一中	肥城泰西中学	东营一中
	日照市第一中学	寿光市第一中学	临沂一中	莘县第一中学
广东	广州三中	执信中学	华师附中	华南理工大学附中
	省实验中学	深圳中学	汕头金山中学	惠州第一中学
	高州中学			
海南	海南中学	海南华侨中学	文昌中学	嘉积中学
	海口市第一中学	农垦中学	琼山中学	海口市实验中学
	文昌市华侨中学	海口市第四中学	三亚市港务局中学	海南农垦实验中学
	东方市海南铁路中学	乐东中学	乐东黄流中学	
宁夏	银川高中	银川第一中学	银川第二中学	西吉一中
	贺兰一中			

高考二轮复习期心理问题指导

一、学会缓减心理压力

高三阶段，同学们进入到紧张的复习备考状态，你追我赶，激烈的竞争带来了巨大的压力。心理研究发现，保持适度的心理压力有利于学习效率的提高；但压力过大，会造成紧张、急躁心理。所以，同学们必须学会调节自身的心理压力。

首先，同学们应当认识到，随着高考的临近，抓紧时间复习、积极备考是正常的，正如军队临战前要练兵、运动员比赛前要训练一样。有了这样的认识，就能把压力变为动力。

其次，要在老师的指导下制定自己的复习计划，做到以"我"为主，紧而不乱，不要盲目地跟着别人跑。要把平时当考时，考时当平时，尽量以平静的心态来复习备考。

再次，还要注意搞好团结。同学间既竞争，又友好，互相帮助，共同进步。在一种宽松友爱的氛围中复习，会收到更好的效果，高考中也能发挥出自己的最高水平。

二、正确看待信心问题

一些同学由于付出的努力短时间内看不到效果，就对自己的能力产生怀疑，这是没有树立正确的归因理念所致。精神分析专家阿德勒在《超越自卑》一书中说："事实上，每个人都是自卑的，只是程度不同而已。因为我们发现我们的现状都是可以进一步改善的。"从这个意义上来说，自卑也可以成为一个人进步的动力，人生正是在对自卑的不断超越中渐入佳境的。但是，持久的、过分的自卑感则容易造成心理疾患。在遭遇挫折时，建议同学们不妨尝试以下策略：

1.对自己有一个客观的、全面的评价。

2.善于将成功归结为自己的能力。

3.体验内心的喜悦感和成就感，要相信之所以失败是由于自己努力不够或无效努力。

4.制定阶段性目标，在不断达到目标的过程中体验成就感。

5.增强自信心。

6.乐观、平静地对待挫折，因为挫折对于成功同样是必要的。

三、如何缓解学业焦虑

1.学业焦虑往往体现在对考分的过分看重，说到底是对自己未来前途的焦虑。之所以如此，原因有三：一是由于群体效应，将分数作为衡量自己能力的唯一指标；二是不自觉地将获取高学历等同于自己的人生价值；三是渴望自我实现与现实学业成绩的不理想而导致的认知不协调。只有减轻心理负担与学习负担，才能减轻精神上和学习上的压力，才能健康愉快地成长。为了缓解和消除学业焦虑，同学们可以尝试以下几种方法：

(1)选择适合自己的目标动机水平，过强或过弱的动机水平都容易产生失败体验而导致心理压力。

(2)未来对于每一个人来说都是一个未知数，不要过多地担忧将来的事情，而应将自己的精力和时间投入到现实的生活和学习中去。

(3)考前作好知识准备以及应付考试突发事件的心理准备，有备才能无患。

(4)不妨采用"极限思维法"，想象你所焦虑的事件可能的最坏结果，你会发现现状还是值得乐观的。

2.学习动力不足也常常令学生苦恼。一方面同学们都有提高成绩的需要，而另一方面，又容易产生浮躁、厌烦情绪，导致学习无动力或动力不足。学习动机分内在(具有持久性)和外在(具有短暂性)两种，学习者只有"知学"、"好学"并且"乐学"，从价值上给自己的学习以较高的评价，才会产生持久的学习动机。当然，学习的外在动机也是必要的，只有二者和谐作用，才会相辅相成，相得益彰。

四、如何克服精力分散

中学生在学习中常常会出现注意力不集中、精力分散、"走神"等现象。造成注意力分散的原因可能有以下几点：因单调刺激而引起的厌倦感，如学习繁重、枯燥；否定注意对象的价值导致意志努力失败或放弃努力；由精神疲劳而引起的疲劳效应。

"注意紧张状态"理论提出学习单元时间的概念。由于个性差异，每个人的学习单元时间可能不尽相同，有人认为一个人的最佳学习单元时间约为25分钟，通俗地讲，一个学习单元时间即是一个注意紧张状态，学习者应避免在一个既定学习单元时间内分心。

可以尝试以下克服注意力分散的三步控制法：

第一步，当出现某种滞涩情绪时，同学们应敏感地意识到，并提醒自己不能成为情绪的俘虏。

第二步，尽快着手按已定的复习计划学习。

第三步，继续学习，直到完成。

明白了上述道理，同学们就能够克服在一个学习单元时间内注意力分散的不良习惯，从而提高学习的效率。

目录

第一部分　高考热点重点与难点

第二部分　数学思想方法

第三部分　2008年高考强化训练

第一部分　高考热点重点与难点

第一专题　高考集合、简易逻辑和不等式题型分析与预测

考点聚焦

从2007年高考全国卷及各地自主命题试卷，结合近几年的高考试题看，对集合、简易逻辑和不等式内容的考查主要涉及以下几方面：

(1)集合的基本概念和运算；

(2)命题的四种形式及充要条件；

(3)特称命题与全称命题及其否定；

(4)映射及其与函数的关系；

(5)不等式的性质、证明和解法.

集合的初步知识与简易逻辑知识是掌握和使用数学语言的基础，是每年高考必考的知识点之一.有关集合的试题，往往体现集合的概念、运算、语言及简单的应用；有关充要条件、命题真假、对特称命题与全称命题及其否定的试题，主要是对概念有准确的记忆和深层次的理解.它们多以选择题、填空题为主，难度不大，但也有考查充要条件的论证或先寻求充要条件再加以证明的能力题，也有关于集合问题的解答题(如2007年北京卷(理)20题).

不等式是中学数学的重点内容，也是学习高等数学的基础知识和重要工具，一直是高考的重点和热点.在历年的高考试题中都占有相当的比重.纵观历年高考试题，涉及不等式内容的试题大致分为以下几类：不等式的证明；解不等式(组)；取值范围问题；应用问题.选择题、填空题不仅考查不等式的基础知识、基本方法、基本技能，而且注重考查逻辑思维能力、运算能力和分析问题、解决问题的能力.解答题常以函数、方程、数列及其交叉部分的知识为背景，并与高等数学及其思想方法相衔接，立意新颖、抽象程度高，既体现高观点、低设问、深入浅出的基础性，又显蕴含知识多、思维跨度大、能力要求高的综合性和灵活性.关于不等式的证明，比较灵活，偶然性大，现在的高考不会单独命制不等式证明的试题，而是把它与函数、数列等问题相结合命制成综合的压轴题，重在考查逻辑思维能力.常考常用的不等式证明方法主要是比较法、综合法、分析法、放缩法、数学归纳法.

突出重点，综合考查，在知识与方法的交汇点处设计命题，是高考命题的重要特点.集合经常作为工具广泛应用于函数、方程、不等式、三角函数和曲线等知识中，将不等式的知识和方法与函数、方程、数列、三角函数、解析几何、立体几何以及实际应用问题等有机结合进行综合考查，强调知识的内在联系与综合，加大数学思想方法的考查力度，充分体现由知识立意向能力立意转变的命题原则和改革方向.

金题研习

A　客观题

集合问题通常以函数的定义域和值域、方程的根、不等式的解集为切入点，以求交集、并集、补集为表现形式，题型为一道选择题，分值为5分，解决办法主要用文氏图和数轴法；简易逻辑问题重点考查命题的四种形式、充要条件、逻辑联结词及特称命题与全称命题及其否定，通常以其它章节知识点为载体，主要用定义求解，题型为一道选择题，分值为5分；不等式问题分性质、解法和均值不等式及线性规划的应用，其中一元二次不等式仍是主要表现形式，不等式与函数单调性的结合是命题的重点，题型为一道选择题或填空题，分值为5分.

考点1：元素与集合间的关系、集合的运算

【例1】(1)设P、Q为两个非空实数集合，定义集合$P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$，若$P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则$P+Q$中元素的个数是________.

(2)已知集合$M=\{x|\frac{x}{(x-1)^3}\geqslant 0\}$，$N=\{y|y=3x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，则$M\cap N$等于　　(　　)

(A)$\varnothing$.　　(B)$\{x|x\geqslant 1\}$.

(C)$\{x|x>1\}$.　　(D)$\{x|x\geqslant 1$或$x<0\}$.

【分析】(1)利用集合中元素的互异性和确定性解题.(2)由不等式和二次函数知识先求出M、N，再求交集.

【解析】(1)$a+b$可以得1,2,6,3,4,8,6,7,11,

由互异性得有8个元素.

(2)$M=\{x|x>1$或$x\leqslant 0\}$，$N=\{y|y\geqslant 1\}$，故$M\cap N=\{x|x>1\}$.

【答案】(1)8　(2)C

考点2：逻辑联结词与四种命题、充要条件

【例2】(1)已知a、$b\in\mathbf{R}$，则下列选项中不是$ab(a-b)>0$成立的充分条件是　　(　　)

(A)$a<0<b$.　　(B)$b<a<0$.

(C)$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.　　(D)$a>b>0$.

(2)若命题p：对任意$x\in\mathbf{R}$，不等式$-2x^2-4x+a<0$恒成立；q：关于x的不等式$x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$的解集非空，则$p$是$\neg q$的________条件.

【分析】(1)找出a、b的正负及其大小关系.(2)命题p成立，需$\Delta<0$，q成立，需$\Delta\geqslant 0$，要注意$\neg q$.

【解析】(1)$ab(a-b)>0\Leftrightarrow\begin{cases}ab>0,\\a-b>0\end{cases}$或$\begin{cases}ab<0,\\a-b<0\end{cases}\Leftrightarrow a>b$

>0 或 $b<a<0$(前者)或 $a<0<b$(后者).$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}\Leftrightarrow\frac{b-a}{ab}>0$ $\Leftrightarrow ab(a-b)<0$,选 C.

(2)对 p:需 $\Delta=16+4\cdot 2a<0$,$a<-2$.

对 q:需 $\Delta=(2a+1)^2-4(a^2+2)\geqslant 0$,$a\geqslant\frac{7}{4}$.

故 p 是 $\neg q$ 的充分而不必要条件.

【答案】(1)C　(2)充分而不必要

考点 3:一元二次不等式与绝对值不等式、指数对数不等式

【例 3】(1)若 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid 2\leqslant 2^{2-x}<8\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}\mid |\log_2 x|>1\}$,则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$的元素个数为[2007 年·安徽]　(　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

(2)已知 $P=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$,$Q=\{x\mid |x|<a\}$,若 $Q\subseteq P$,则实数 a 的取值范围是　(　　)

(A)$a\leqslant 1$.　　(B)$a\leqslant 3$.

(C)$0<a\leqslant 1$.　　(D)$0<a\leqslant 3$.

【分析】(1)由指数、对数函数的单调性,分别求出 A、B.(2)由于 $Q\subseteq P$,因此 $Q=\varnothing$ 也满足,应对 a 讨论.

【解析】(1)由 $2\leqslant 2^{2-x}<8$,得 $1\leqslant 2-x<3$,即 $-1<x\leqslant 1$,又 $x\in\mathbf{Z}$,所以 $A=\{0,1\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}\mid |\log_2 x|>1\}=\{x\in\mathbf{R}\mid \log_2 x<-1$ 或 $\log_2 x>1\}=\{x\in\mathbf{R}\mid 0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>2\}$.

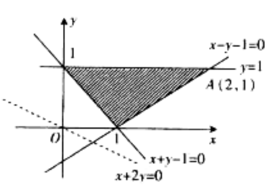
$\therefore \complement_{\mathbf{R}}B=\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant 0$ 或 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\}$,因此 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$的元素个数为 2.

(2)由于 $P=\{x\mid x^2-2x-3<0\}=\{x\mid -1<x<3\}$,当 $a\leqslant 0$ 时,$Q=\varnothing$,$Q\subseteq P$;当 $a>0$ 时,$Q=\{x\mid -a<x<a\}$,要使 $Q\subseteq P$,只须 $-a\geqslant -1$ 且 $a\leqslant 3$,即 $a\leqslant 1$,故实数 a 的取值范围是 $a\leqslant 1$.

【答案】(1)C　(2)A

考点 4:线性规划

【例 4】已知实数 x、y 满足 $\begin{cases}y\leqslant 1\\ y\geqslant |x-1|\end{cases}$,则 $x+2y$ 的最大值是________.



【分析】首先把不等式组转化为线性约束条件,在平面直角坐标系中画出对应的平面区域,再根据目标函数的几何意义即可求出最大值.

【解析】约束条件可以化为 $\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 1,\\ x-y-1\leqslant 0,\\ x+y-1\geqslant 0,\end{cases}$

作出可行域如图所示的阴影部分,作直线 $l_0:x+2y=0$,平移直线 l_0 可知,当直线过点 $A(2,1)$时,$x+2y$ 取得最大值 4.

【答案】4

考点 5:比较函数值的大小

【例 5】设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$满足以下条件:(1)对任意 $x\in\mathbf{R}$,$f(x)+f(-x)=0$;(2)对任意 $x_1,x_2\in[1,a]$,当 $x_2>x_1$ 时,有 $f(x_2)>f(x_1)>0$,有下列各式:

①$f(a)>f(0)$;②$f(\frac{1+a}{2})>f(\sqrt{a})$;③$f(\frac{2a-1}{a})>f(a)$;④$f(\frac{1-3a}{1+a})>f(-a)$.

其中所有正确不等式的序号是________.

【分析】由已知条件可判断 $f(x)$为奇函数,且在$[1,a]$上是增函数,只要比较自变量的大小即可判定.

【解析】由 $f(x)+f(-x)=0$,得 $f(-x)=-f(x)$,因此 $f(x)$为奇函数.$\therefore f(0)=0$.又 $x_1,x_2\in[1,a]$,当 $x_2>x_1$ 时有$f(x_2)>f(x_1)>0$ 知 $f(x)$在$[1,a]$上是增函数,且 $f(a)>0$.

$\therefore f(a)>0=f(0)$,故①成立;

由 $a>1$,知 $a>\frac{1+a}{2}>\sqrt{a}>1$,$\therefore f(\frac{1+a}{2})>f(\sqrt{a})$,故②成立;

又$(2a-1)-a=a-1>0$,$\therefore\frac{2a-1}{a}>1$,而$\frac{2a-1}{a}-a=\frac{2a-1-a^2}{a}=\frac{-(a-1)^2}{a}<0$,

$\therefore\frac{2a-1}{a}<a$,于是 $f(\frac{2a-1}{a})<f(a)$,故③不成立;

依题意,$f(\frac{1-3a}{1+a})=-f(\frac{3a-1}{1+a})$,$f(-a)=-f(a)$,$(3a-1)-(1+a)=2(a-1)>0$,

$\therefore\frac{3a-1}{1+a}>1$,$\frac{3a-1}{1+a}-a=\frac{-a^2+2a-1}{1+a}=-\frac{(a-1)^2}{1+a}<0$,

$\therefore\frac{3a-1}{1+a}<a$,于是 $f(\frac{3a-1}{1+a})<f(a)$,

即 $f(\frac{1-3a}{1+a})>f(-a)$,故④成立.所以应填①②④.

【答案】①②④

考点 6:函数与不等式的交汇

【例 6】定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx(a,b\in\mathbf{R})$在 $x=-1$ 处取得极值,且 $f(x)$的曲线在点 $P(1,f(1))$处的切线平行于直线 $y=8x$,则 $a+b=$________,不等式 $f(x)\geqslant\frac{1}{4}x$ 的解集为________.

【分析】运用导数方法,根据题意可得 a、b 的方程组,解出 a、b,再解高次不等式.

【解析】$f'(x)=3x^2+2ax+b$,

由 $f(x)$在 $x=-1$ 处取得极值,得 $f'(-1)=0$,

即 $3-2a+b=0$.　①

由 $f(x)$在 P 处的切线平行于直线 $y=8x$,

得 $f'(1)=8$,即 $2a+b-5=0$.　②

解①②得 $a=2$,$b=1$,$\therefore a+b=3$.

于是 $f(x)=x^3+2x^2+x$,$f(x)\geqslant\frac{1}{4}x$,

即 $x^3+2x^2+\frac{3}{4}x\geqslant 0$,

$\therefore x(2x+3)(2x+1)\geqslant 0$,

解得 $-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant -\frac{1}{2}$ 或 $x\geqslant 0$.

故 $f(x)\geqslant\frac{1}{4}x$ 的解集为$\{x\mid -\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant -\frac{1}{2}$ 或 $x\geqslant 0\}$.

【答案】3　$\{x\mid -\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant -\frac{1}{2}$ 或 $x\geqslant 0\}$

B　主观题

本专题内容近几年高考已不再单独命制主观题，而不等式的求解和证明问题则常与数列和函数问题结合出现.

题型一：命题与充要条件

有关命题的真假、充要条件的试题，多与集合、函数、不等式等知识综合，主要是对数学概念有准确的记忆和深层次的理解，常用等价转化思路、分类讨论思想和数形结合思想方法等.

【例 7】已知命题 $p:A=\{y|\frac{y+2}{y-5}\geqslant\frac{1}{2}\}$；命题 $q:B=\{y|y=ax^2-6x+4a$，其中 $a\neq0,x\in\mathbf{R}\}$. 若 p 是 q 的必要不充分条件，求实数 a 的取值范围.

【分析】由 p 是 q 的必要不充分条件，可知 $B\subsetneqq A$，而 B 表示二次函数的值域，应对 a 予以讨论.

【解析】由 $\frac{y+2}{y-5}\geqslant\frac{1}{2}$，得 $\frac{y+9}{y-5}\geqslant0$，解得 $y\leqslant-9$ 或 $y>5$，$\therefore A=\{y|y\leqslant-9$ 或 $y>5\}$.

又 p 是 q 的必要不充分条件，则 $B\subsetneqq A$.

由 $y=ax^2-6x+4a=a(x-\frac{3}{a})^2+4a-\frac{9}{a}$ 知：

当 $a>0$ 时，$B=\{y|y\geqslant4a-\frac{9}{a}\}$，要使 $B\subsetneqq A$，只要 $4a-\frac{9}{a}>5$，即 $4a^2-5a-9>0$，解得 $a>\frac{9}{4}$ 或 $a<-1$（舍去）；

当 $a<0$ 时，$B=\{y|y\leqslant4a-\frac{9}{a}\}$，要使 $B\subsetneqq A$，只要 $4a-\frac{9}{a}\leqslant-9$，即 $4a^2+9a-9\geqslant0$，解得 $a\leqslant-3$ 或 $a\geqslant\frac{3}{4}$（舍去）.

故满足条件的实数 a 的取值范围是 $a\leqslant-3$ 或 $a>\frac{9}{4}$.

【点评】通过集合的包含关系来判断条件与结论间的逻辑关系是常用的方法. 一般地，设 p 包含的对象组成集合 A，q 包含的对象组成集合 B，则：若 $A\subsetneqq B$，则 p 是 q 的充分而不必要条件；若 $A\supsetneqq B$，则 p 是 q 的必要而不充分条件；若 $A=B$，则 p、q 互为充要条件；若 $A\not\subseteq B$ 且 $B\not\subseteq A$，则 p、q 互为既不充分也不必要条件.

题型二：有关不等式的解法

解不等式的关键是等价转化，要掌握解不等式的转化方法：分式不等式转化为整式不等式；无理不等式转化为有理不等式；含绝对值的不等式转化为不含绝对值的不等式；指数、对数不等式转化为代数不等式；抽象函数的不等式在确定其单调性的前提下去掉函数符号转化为代数不等式；对含有参数的不等式应分类讨论.

1.基本不等式的解法

【例 8】已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{ax+b}$（a、b 为常数），且方程 $f(x)-x+12=0$ 有两个实根 $x_1=3$，$x_2=4$.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)设 $k>1$，解关于 x 的不等式：$f(x)<\frac{(k+1)x-k}{2-x}$.

【分析】先通过方程求出 a、b，再讨论 k 的不同取值确定不等式的解集.

【解析】(1)将 $x_1=3$，$x_2=4$ 分别代入方程 $\frac{x^2}{ax+b}-x+12=0$.

得 $\begin{cases}\frac{9}{3a+b}=-9,\\ \frac{16}{4a+b}=-8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=2,\end{cases}$

所以 $f(x)=\frac{x^2}{2-x}(x\neq2)$.

(2)不等式即为 $\frac{x^2}{2-x}<\frac{(k+1)x-k}{2-x}$，可化为 $\frac{x^2-(k+1)x+k}{2-x}<0$，

即 $(x-2)(x-1)(x-k)>0$.

①当 $1<k<2$ 时，解集为 $(1,k)\cup(2,+\infty)$；

②当 $k=2$ 时，不等式为 $(x-2)^2(x-1)>0$，

解集为 $(1,2)\cup(2,+\infty)$；

③当 $k>2$ 时，解集为 $(1,2)\cup(k,+\infty)$.

【点评】解分式不等式通常先移项使不等式右边为零，化为整式不等式；解高次不等式常用数轴标根法；解含参数的不等式对参数讨论时要做到不重不漏.

2.简单指数对数不等式的解法

【例 9】解不等式 $\log_2(x+\frac{1}{x}+6)\leqslant3$.

【分析】利用对数函数的单调性解之.

【解析】$\because\log_2(x+\frac{1}{x}+6)\leqslant3=\log_2 8$，

$\therefore0<x+\frac{1}{x}+6\leqslant8$.

$\therefore\begin{cases}x+\frac{1}{x}\leqslant2,\\ x+\frac{1}{x}+6>0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}\frac{x^2-2x+1}{x}\leqslant0,\\ \frac{x^2+6x+1}{x}>0,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x(x-1)^2\leqslant0,\\ x\neq0,\\ x(x^2+6x+1)>0.\end{cases}$

解得 $x\in(-3-2\sqrt{2},-3+2\sqrt{2})\cup\{1\}$.

故原不等式的解集为 $\{x|-3-2\sqrt{2}<x<-3+2\sqrt{2}$ 或 $x=1\}$.

【点评】新教材对指数、对数不等式降低了要求，近几年也没有更多涉及，但是考纲中并没有明确指出这两种不等式的解法不考. 所以，对这两种不等式的解法不宜拓宽、加深，应从函数的角度去认识和解决它们，特别是利用函数的单调性去掉幂的形式或对数符号，其中去掉对数符号应保证真数大于零.

3.抽象函数不等式的解法

【例 10】设 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的减函数，且对一切正数 a、b，都有 $f(\frac{a}{b})=f(a)-f(b)$.

(1)求 $f(1)$ 的值；

(2)若 $f(4)=1$，解不等式 $f(x+6)-f(\frac{1}{x})>2$.

【分析】(1)令 $a=b=1$，可求得 $f(1)$. (2)由已知关系式把不等式变换、转化为关于 x 的代数不等式，但要注意函数的定义域.

【解析】(1)令 $a=b=1$，则 $f(1)=f(1)-f(1)=0$.

(2)$\because f(4)=1$，则 $f(x+6)-f(\frac{1}{x})>2f(4)$. ①

$\therefore f(\frac{x+6}{\frac{1}{x}})-f(4)>f(4)$，即 $f[\frac{x(x+6)}{4}]>f(4)$.

又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，于是①等价于

$$\begin{cases}\frac{1}{x}>0,\\ x+6>0,\\ \frac{x(x+6)}{4}<4,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x>0,\\ x>-6,\\ x^2+6x-16<0.\end{cases}\text{解得 } 0<x<2.$$

【点评】抽象函数问题通常是指没有给出函数的具体解析式，只给出了其他一些条件、性质的函数问题. 若题目中给出了抽象函数满足的关系式，应将所给的关系式看作是给定的运算法则，对某些变量进行适当的赋值，并且变量的赋值或变量及数值的分解与组合都应尽量与已知式或所给关系式及所求的结果相关联；或者通过函数的性质模拟出函数的图象，借助于形，探求解决问题的途径或直接得出答案；或者找出抽象函数的"原型"函数，通过它求解或探索解决问题的思路.

题型三：有关参数的取值范围

这类问题往往与函数、方程、导数等知识综合在一起，一般有三种情况，即求参数的取值范围、使含参数的不等式恒成立、恰成立和能成立. 函数与方程思想是解决这类问题的关键. 这是因为不等式、函数、方程三者密不可分，相互联系，又相互转化，只要用函数思想作指导，不仅会优化解题过程，而且能迅速获得解题的途径.

【例 11】已知函数 $f(x)=x^2+x-2$.

(1)若 $f(x)>a$ 在 $[1,3]$ 上有解，求实数 a 的取值范围；

(2)若 $f(x)>a$ 在 $[1,3]$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

【分析】(1) $f(x)>a$ 在 $[1,3]$ 上有解，只要 $a<[f(x)]_{\max}$ 即可；

(2) $f(x)>a$ 在 $[1,3]$ 上恒成立，必须 $a<[f(x)]_{\min}$.

【解析】(1) $f(x)=x^2+x-2=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}$，又 $x\in[1,3]$，

$\therefore f(x)$ 在 $[1,3]$ 上有最大值 $f(3)=10$，$\therefore a<10$.

(2) $f(x)=x^2+x-2$ 在 $[1,3]$ 上有最小值 $f(1)=0$. $\therefore a<0$.

【点评】一般地，$y=f(x)$ 在闭区间上有以下结论(a 为常数)：(1) $a<f(x)$ 有解 $\Leftrightarrow a<[f(x)]_{\max}$；(2) $a>f(x)$ 有解 $\Leftrightarrow a>[f(x)]_{\min}$；(3) $a<f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a<[f(x)]_{\min}$；(4) $a>f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a>[f(x)]_{\max}$.

【例 12】已知两个函数 $f(x)=8x^2+16x-k$，$g(x)=2x^3+5x^2+4x$，其中 k 为实数.

(1)对任意 $x\in[-3,3]$，都有 $f(x)\leqslant g(x)$ 成立，求 k 的取值范围；

(2)存在 $x\in[-3,3]$，使 $f(x)\leqslant g(x)$，求 k 的取值范围；

(3)对任意 $x_1,x_2\in[-3,3]$，都有 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$，求 k 的取值范围.

【分析】设 $F(x)=g(x)-f(x)$，运用导数的知识和方法.

【解析】设 $F(x)=g(x)-f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$.

(1)对任意 $x\in[-3,3]$，都有 $f(x)\leqslant g(x)$ 成立，转化为 $x\in[-3,3]$ 时，$F(x)\geqslant0$ 恒成立. 故 $[F(x)]_{\min}\geqslant0$.

令 $F'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=2$.

$\therefore F(x)$ 在 $[-3,-1]$ 和 $[2,3]$ 上是增函数，在 $[-1,2]$ 上是减函数，由 $F(-1)=7+k$，$F(2)=k-20$，$F(-3)=k-45$，$F(3)=k-9$. 故 $[F(x)]_{\min}=k-45$，由 $k-45\geqslant0$，得 $k\geqslant45$.

(2)存在 $x\in[-3,3]$，使 $f(x)\leqslant g(x)$ 成立，即 $F(x)\geqslant0$ 在 $[-3,3]$ 内有解，故 $[F(x)]_{\max}\geqslant0$.

由(1)知 $[F(x)]_{\max}=k+7$. 于是 $k+7\geqslant0$ 得 $k\geqslant-7$.

(3)该问与(1)虽然都是不等式恒成立问题，但有很大的区别，对任意 $x_1,x_2\in[-3,3]$ 都有 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$ 成立，不等式的左右两端函数的自变量不同，x_1、x_2 的取值在 $[-3,3]$ 上具有任意性，因而要使原不等式恒成立的充要条件是 $[f(x)]_{\max}\leqslant[g(x)]_{\min}$，$x\in[-3,3]$. 由 $g'(x)=6x^2+10x+4=0$，得 $x=-\frac{2}{3}$ 或 $x=-1$.

易知 $[g(x)]_{\min}=g(-3)=-21$. 又 $f(x)=8(x+1)^2-8-k$，$x\in[-3,3]$，故 $[f(x)]_{\max}=f(3)=120-k$，由 $120-k\leqslant-21$，得 $k\geqslant141$.

【点评】本题的三个小题，表面形式非常相似，究其本质却大相径庭，应认真审题，深入思考，准确使用其成立的充要条件. 解决不等式恒成立和有解问题的基本策略常常是构造辅助函数，借助函数的单调性、最值、图象求解. 基本方法包括：分类讨论、数形结合、参数分离、变换主元等等.

题型四：有关不等式的证明

不等式的证明主要体现在不等式与函数、方程、数列、三角、解析几何等的综合性问题中，结合运用不等式的性质及证明不等式的技巧，同时发挥导数的工具作用，从而多层次、多角度、多视点地检测学生的数学素养和学习的潜能. 在不等式的证明中，要注意比较法、综合法、分析法、放缩法、数学归纳法、函数单调性法和构造函数法等的使用，同时渗透函数与方程、分类与整合、化归与转化等思想方法.

1. 有关"三个二次"的问题

【例 13】设 $f(x)=3ax^2+2bx+c$，若 $a+b+c=0$，$f(0)>0$，$f(1)>0$，求证：

(1) $a>0$ 且 $-2<\frac{b}{a}<-1$；

(2)方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有两个实根.

【分析】利用二次函数的图象特征和单调性，以及一元二次方程实根的分布情况与相应的函数图象的关系.

【解析】(1) $\because f(0)>0$，$f(1)>0$，$\therefore c>0$，$3a+2b+c>0$.

由条件 $a+b+c=0$ 消去 b，得 $a>c>0$.

由条件 $a+b+c=0$ 消去 c，得 $a+b<0$，$2a+b>0$，

故 $-2<\frac{b}{a}<-1$.

(2)抛物线 $f(x)=3ax^2+2bx+c$ 的顶点坐标为 $(-\frac{b}{3a},\frac{3ac-b^2}{3a})$，在 $-2<\frac{b}{a}<-1$ 的两边乘 $-\frac{1}{3}$，

得 $\frac{1}{3}<-\frac{b}{3a}<\frac{2}{3}$.

又因为 $f(0)>0$，$f(1)>0$，

而 $f(-\frac{b}{3a})=-\frac{a^2+c^2-ac}{3a}<0$，

所以方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,-\frac{b}{3a})$ 与 $(-\frac{b}{3a},1)$ 内分别有一实根.

故方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有两个实根.

【点评】一元二次方程、一元二次不等式与二次函数的相互转化反映了函数、方程、不等式之间的关系，要深刻理解并

能灵活运用这种相互转化的方法解决有关的问题.

[illegible]与不等式的联系

【例 14】设函数 $f(x)=ax^3-2bx^2+cx+4d(a,b,c,d\in\mathbf{R})$ 的图象关于原点对称，且当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $-\frac{2}{3}$.

(1)求 a、b、c、d 的值；

(2)当 $x\in[-1,1]$ 时，图象上是否存在两点，使得过此两点处的切线互相垂直？试证明你的结论；

(3)若 $x_1,x_2\in[-1,1]$，求证：$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{4}{3}$.

【分析】本题是关于函数图象的切线以及函数与不等式的联系问题，这类问题一方面要考虑函数的导数与切线的联系，另一方面要考虑不等式有关性质的应用及函数的单调性与不等式的联系.

【解析】(1)$\because f(x)$ 为奇函数，$\therefore b=d=0$.

则 $f(x)=ax^3+cx$，$f'(x)=3ax^2+c$.

由题意知 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $-\frac{2}{3}$，

则 $f'(1)=3a+c=0$，$f(1)=a+c=-\frac{2}{3}$，

解得 $a=\frac{1}{3}$，$c=-1$，即 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$.

(2)当 $x\in[-1,1]$ 时，图象上不存在两点，使得过此两点处的切线互相垂直.

假如存在点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 使得过此两点处的切线互相垂直，则由 $f'(x)=x^2-1$ 知两点处的切线斜率分别为 $k_1=x_1^2-1$，$k_2=x_2^2-1$，且 $(x_1^2-1)(x_2^2-1)=-1$.

又 $x_1,x_2\in[-1,1]$，

$\therefore x_1^2-1\leqslant0$，$x_2^2-1\leqslant0$. 从而与 $(x_1^2-1)(x_2^2-1)\geqslant0$ 矛盾，所以假设不成立.

(3)$\because f'(x)=x^2-1$，令 $f'(x)=x^2-1=0$，

得 $x=\pm1$.

当 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)<0$.

所以，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是减函数，

且 $f(x)_{\max}=f(-1)=\frac{2}{3}$，$f(x)_{\min}=f(1)=-\frac{2}{3}$；

$\therefore$ 在 $[-1,1]$ 上，$|f(x)|\leqslant\frac{2}{3}$.

则当 $x_1,x_2\in[-1,1]$ 时，

$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)|+|f(x_2)|\leqslant\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$，

$\therefore|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{4}{3}$.

【点评】本题考查的重点是导数的概念和计算、切线的概念和方程、不等式的基本性质和证明. 以导数为工具研究函数的变化率，为解决函数极值问题提供了一条有效的途径. 将新课程新增加的内容（导数）和一些传统内容（不等式证明）有机地结合在一起设问，这是一种新颖的命题模式.

[illegible]的大小

【例 15】定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4)=f(x)$，当 $2\leqslant x\leqslant6$ 时，$f(x)=(\frac{1}{2})^{|x-a|}+b$，$f(4)=31$.

(1)求 a、b 的值；

(2)比较 $f(\log_3 a)$ 与 $f(\log_3 b)$ 的大小.

【分析】(1)由已知有 $f(6)=f(2)$，又 $f(4)=31$，可求得 a、b；(2)由指数函数的单调性判断，注意 $f(x)$ 的周期性.

【解析】(1)$\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上满足 $f(x+4)=f(x)$，

$\therefore f(2)=f(6)$，即 $(\frac{1}{2})^{|2-a|}+b=(\frac{1}{2})^{|6-a|}+b$，

$\therefore|2-a|=|6-a|$，解得 $a=4$.

又 $\because f(4)=31$，即 $(\frac{1}{2})^{|4-4|}+b=31$，$\therefore b=30$.

(2)由(1)可知 $f(x)=(\frac{1}{2})^{|x-4|}+30$，$x\in[2,6]$.

$\because 1<\log_3 4<2$，$\therefore 5<\log_3 4+4<6$，

于是 $f(\log_3 a)=f(\log_3 4)=f(\log_3 4+4)$

$=(\frac{1}{2})^{|\log_3 4+4-4|}+30=(\frac{1}{2})^{\log_3 4}+30$.

而 $3<\log_3 30<4$，

$\therefore f(\log_3 b)=f(\log_3 30)=(\frac{1}{2})^{|\log_3 30-4|}+30$

$=(\frac{1}{2})^{4-\log_3 30}+30=(\frac{1}{2})^{\log_3\frac{81}{30}}+30$，

由于 $\log_3\frac{81}{30}<\log_3 4$，$\therefore(\frac{1}{2})^{\log_3 4}+30<(\frac{1}{2})^{\log_3\frac{81}{30}}+30$，

即 $f(\log_3 a)<f(\log_3 b)$.

【点评】比较函数值的大小通常是利用函数的单调性判断，关键是确定自变量在函数的同一单调区间内的大小，往往结合均值不等式，函数的最值，有时还可以运用函数的图象求解或探索解题途径.

题型五：线性规划应用题

线性规划的重要应用是求最值问题，在实际应用题中主要有物资调运问题、人力安排问题、生产销售问题等. 要正确解答这类问题首先要重视对文字含义的理解，合理使用列表等方法把问题进行简化.

【例 16】本公司计划 2008 年在甲、乙两个电视台做总时间不超过 300 分钟的广告，广告总费用不超过 9 万元，甲、乙电视台的广告收费标准分别为 500 元/分钟和 200 元/分钟，规定甲、乙两个电视台为该公司所做的每分钟广告，能给公司带来的收益分别为 0.3 万元和 0.2 万元. 问该公司如何分配在甲、乙两个电视台的广告时间，才能使公司的收益最大，最大收益是多少万元？

【分析】首先根据条件建立广告时间的约束条件及公司收益对应的目标函数，通过线性规划的方法求出最大值即可.

【解析】设公司在甲电视台和乙电视台做广告的时间分别为 x 分钟和 y 分钟，总收益为 z 元，由题意得

$$\begin{cases}x+y\leqslant300,\\500x+200y\leqslant90000,\\x\geqslant0,y\geqslant0.\end{cases}$$

目标函数为 $z=3000x+2000y$.

二元一次不等式组等价于 $\begin{cases}x+y\leqslant300,\\5x+2y\leqslant900,\\x\geqslant0,y\geqslant0.\end{cases}$

作出二元一次不等式组所表示的平面区域，即可行域.

如图：

作直线 l：$3000x+2000y=0$，

即 $3x+2y=0$.

平移直线 l，从图中可知，当直线 l 过 M 点时，目标函数

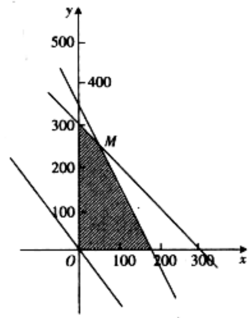
取得最大值.

联立$\begin{cases}x+y=300,\\5x+2y=900.\end{cases}$

解得 $x=100$，
$y=200$.

∴点 M 的坐标为(100，200).

∴$z_{max}=3000x+2000y=700000$(元)



答:该公司在甲电视台做100分钟广告,在乙电视台做200分钟广告,公司的收益最大,最大收益是70万元.

【点评】用线性规划解决实际问题的关键是建立线性约束条件和目标函数,作图时要找准关键点坐标,特别是直线的交点,这些都是取得最值的可能位置.对于一些实际问题有时候还需要考虑整数解问题,这类问题相对比较复杂,可以根据实际情况通过讨论进行取舍.

08 前瞻

1.集合问题高考一般还是以选择题、填空题的形式出现,常涉及集合的范围、元素的个数等,主要考查对集合概念的理解和集合的运算,以及对集合语言的理解与应用.由于中学数学里主要研究数集和点集,所以常与函数、不等式、曲线、平面区域等知识结合.应当指出的是2007年北京卷以集合问题作为压轴题.

2.简易逻辑与四种命题主要出现在选择题、填空题中,常见有判断复合命题的真假、四种命题.充要条件是数学中的一个重要概念,选择题、填空题中常见有充要条件的判定、寻求充分、必要条件.由于它与其他内容有着密切的联系,如函数、数列、三角、向量、不等式、解析几何、立体几何等都可能涉及,也要注意运用复合命题的真假求参数范围、证明充要条件的解答题.

3.映射多在选择题、填空题中,以映射的概念为主,包括象、原象、映射的个数等.

4.不等式是中学数学的重要内容,可以渗透到中学数学的各个章节,是解决其他数学问题的有力工具,再加上它在实际问题中的广泛应用,决定了它是永不衰退的考试热点.

选择题、填空题以不等式的性质、解基本不等式、运用均值不等式求最值等为主,也可以是实际应用问题.

解答题多与函数、数列、解析几何等知识综合,有关不等式的证明常涉及函数的单调性、数列求和等,有一定的难度.对于函数、数列、不等式等内容交汇处的较为活跃的知识点,一些与自然对数和指数函数的不等式恒成立与有解问题,将新增内容与传统知识有机融合,不仅考查函数、不等式等有关传统知识和方法,而且考查导数等新增内容的掌握和灵活运用,渗透化归转化,分类讨论,数形结合等数学思想方法,体现能力立意的原则,带有时代特征,突出高考试题与时俱进的改革方向,越来越受到命题者的青睐,因此应予以高度关注.

跟踪集训

一、选择题

1.下列语句是特称命题的是　(　　)

(A)整数 n 是2和3的倍数.
(B)偶函数的图象关于 y 轴对称.
(C)存在整数 n,使 n 能被11整除.
(D)$\forall x\in M, P(x)$.

2.设 A、B 是非空集合,定义 $A*B=\{x|x\in(A\cup B)$ 但 $x\notin(A\cap B)\}$.已知 $A=\{x|y=\sqrt{2x-x^2}\}$，$B=\{y|y=2^x(x>0)\}$,则 $A*B$ 等于　(　　)

(A)$[0,1]\cup(2,+\infty)$.　(B)$[0,1)\cup(2,+\infty)$.
(C)$[0,1]$.　(D)$[0,2]$.

3.已知映射 $f:A\to B$,其中 $A=B=\mathbf{R}$,对应法则 $f:x\to y=-x^2+2x$.对于实数 $k\in B$ 在集合 A 中存在两个不同的原象,则 k 的取值范围是　(　　)

(A)$k>1$.　(B)$k\leqslant1$.　(C)$k\geqslant1$.　(D)$k<1$.

4.在 $\mathbf{R}$ 上定义运算⊗:$x\otimes y=\dfrac{x}{2-y}$,若关于 x 的不等式 $(x-a)\otimes(x+1-a)>0$ 的解集是集合 $\{x|-2\leqslant x\leqslant2, x\in\mathbf{R}\}$ 的子集,则实数 a 的取值范围是　(　　)

(A)$-2\leqslant a\leqslant2$.　(B)$-1\leqslant a\leqslant1$.
(C)$-2\leqslant a\leqslant1$.　(D)$1\leqslant a\leqslant2$.

5.第一象限内有一动点 P 在过点 $A(3,2)$ 且方向向量 $\boldsymbol{n}=(-1,2)$ 的直线 l 上运动,则 $\log_2x+\log_2y$ 的最大值为　(　　)

(A)1.　(B)2.
(C)3.　(D)$2\log_27-3$.

6.下列命题的否定是真命题的有　(　　)

①p:$\Delta<0$ 时方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 无实根;②p:存在一个整数 b 使函数 $f(x)=x^2+bx+1$ 在 $[0,+\infty)$ 上不是单调函数;③p:$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x^2+x+1\geqslant0$ 不成立.

(A)0个.　(B)1个.　(C)2个.　(D)3个.

7.已知实数 $a>1$,命题 p:函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x+a)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$;命题 q:$|x|<1$ 是 $x<a$ 的充分不必要条件,则　(　　)

(A)p 或 q 为真命题.　(B)p 且 q 为假命题.
(C)$\neg p$ 且 q 为真命题.　(D)$\neg p$ 或 $\neg q$ 为真命题.

8.若方程 $2ax^2-x-1=0$ 在 $x\in(0,1)$ 内恰有一解,则 a 的取值范围是　(　　)

(A)$a<-1$.　(B)$a>1$.
(C)$-1<a<1$.　(D)$0\leqslant a<1$.

9.设集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant16\}$，$B=\{(x,y)|x^2+(y-2)^2\leqslant a-1\}$ 且 $A\cap B=B$.则实数 a 的取值范围是　(　　)

(A)$a\leqslant1$.　(B)$a\geqslant5$.
(C)$1\leqslant a\leqslant5$.　(D)$a\leqslant5$.

10.对于 $x\in\mathbf{R}$,不等式 $2x^2-a\sqrt{x^2+1}+3>0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是　(　　)

(A)$a<2\sqrt{2}$.　(B)$a\leqslant2\sqrt{2}$.　(C)$a<3$.　(D)$a\leqslant3$.

11.若 $f(x)$，$g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数,$h(x)=f(x)+g(x)$,则"$f(x)$,$g(x)$ 均为偶函数"是"$h(x)$ 为偶函数"的　(　　)

(A)充要条件.

(B)充分而不必要条件.
(C)必要而不充分条件.
(D)既不充分也不必要条件.

12. 设 x_1、x_2 是函数 $f(x)=e^x$ 定义域内的两个变量，且 $x_1<x_2$，若 $\alpha=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，则下列不等式恒成立的是（　　）

(A) $|f(\alpha)-f(x_1)|>|f(x_2)-f(\alpha)|$.
(B) $|f(\alpha)-f(x_1)|<|f(x_2)-f(\alpha)|$.
(C) $|f(\alpha)-f(x_1)|=|f(x_2)-f(\alpha)|$.
(D) $f(x_1)\cdot f(x_2)>f^2(\alpha)$.

二、填空题

13. 已知在整数集合内，关于 x 的不等式 $2^{x^2-1}<2^{2x-2a}$ 的解集为 $\{1\}$，则实数 a 的取值范围是________.

14. 设命题 p：$|2x-3|>9$；命题 q：$x^2-2ax-3a^2>0$. 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，则实数 a 的取值范围是____.

15. 在坐标平面内，不等式组 $\begin{cases}y\geqslant x-1,\\ y\leqslant -3|x|+1\end{cases}$ 所表示的平面区域的面积是________.

16. 已知开口向上的二次函数 $f(x)$，对一切实数 x 都有 $f(2-x)=f(2+x)$ 成立. 设向量 $\boldsymbol{a}=(|x+2|+|2x-1|,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，则不等式 $f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})>f(5)$ 的解集为________.

三、解答题

17. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\log_3(x^2-2x-15)>2\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,(\frac{1}{2})^{x^2-mx-2m^2}>1\}$. 若 $B\cap(\complement_{\mathbf{R}}A)=B$，求实数 m 的取值范围.

18. 已知命题 p：方程 $a^2x^2+ax-2=0$ 在 $[-1,1]$ 上有解；命题 q：只有一个实数 x 满足不等式 $x^2+2ax+2a\leqslant 0$，若命题“p 或 q”是假命题，求 a 的取值范围.

19. 已知 $f(x)=\begin{cases}-x^2+10 & (x>0),\\ x^2-10 & (x<0).\end{cases}$

(1)解不等式 $1\leqslant f(x)\leqslant 6$；
(2)设 $mn<0$，$m+n>0$，判断 $f(m)+f(n)$ 能否小于 0.

20. 对于函数 $f(x)$，若 $f(x)=x$，则称 x 为 $f(x)$ 的“不动点”；若 $f[f(x)]=x$，则称 x 为 $f(x)$ 的“稳定点”. 函数 $f(x)$ 的“不动点”和“稳定点”的集合分别记为 A 和 B，即 $A=\{x|f(x)=x\}$，$B=\{x|f[f(x)]=x\}$.

(1)求证：$A\subseteq B$；
(2)若 $f(x)=ax^2-1(a,x\in\mathbf{R})$，且 $A=B\neq\varnothing$，求 a 的取值范围.

21. 设函数 $f(x)=x^2+b\ln(x+1)$，其中 $b\neq 0$.

(1)当 $b>\frac{1}{2}$ 时，判断函数 $f(x)$ 在定义域上的单调性；
(2)证明：对任意的正整数 n，不等式 $\ln(\frac{1}{n}+1)>\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}$ 恒成立.

22. 已知函数 $f(x)=x^3-9x^2\cos\alpha+48x\cos\beta+18\sin^2\alpha$，$g(x)=f'(x)$，且对任意的实数 t，均有 $g(1+e^{-|t|})\geqslant 0$，$g(3+\sin t)\leqslant 0$.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；
(2)若对任意的 $m\in[-26,6]$ 恒有 $f(x)\geqslant x^3-mx-11$，求 x 的取值范围.

第二专题 高考函数与导数题型分析与预测

考 点 聚 焦

函数是高中数学的重要内容,是进一步学习高等数学知识的基础,是历年高考命题的重点. 高考对函数(包括导数)问题的考查主要涉及函数、导数的基本概念;函数的图象与性质(单调性、奇偶性、周期性、对称性、最值等);以函数为背景的方程、不等式问题;以函数为模型(运用导数解决)的应用问题.

函数问题中蕴含着丰富的数学思想与方法:函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想、转化与化归思想等;以及待定系数法、配方法、换元法、构造法等数学方法. 近几年全国各地高考都对函数进行重点考查,题型有选择题、填空题和解答题,分值约占卷面总分的 11%～20%,考查内容全面、设计新颖、形式多样、综合性强. 考题设计的特点是:稳中求变、变中求新,从传统的套用定义、简单地使用性质,发展到挖掘概念本质、创设问题情境、灵活运用性质. 重点考查学生的逻辑推理、运算、分析与解决问题的能力.

导数是初等数学与高等数学的重要衔接点,是高考的热点,高考对导数的考查定位于作为解决初等数学问题的工具出现,仍会以导数的应用为主,如利用导数处理函数的极值、最值、单调性及曲线的切线等问题. 分值约占卷面总分的 10%～15%. 从题型上看主要有以下几个特点:

①以填空、选择题考查导数的概念,求函数的单调区间、极值与最值,属于中档题;

②解答题主要考查利用导数为工具解决函数、方程、数列、不等式、解析几何及应用等问题,有中档题,也有难题.

金 题 研 习

A 客观题

高考中本专题对客观题的考查以基础知识为主,主要考查的内容有:函数的解析式、定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性、对称性和函数的图象、导数的基本概念、求函数的单调区间、极值与最值以及函数应用题等,通常有 2～3 道题.

考点 1:映射

【例 1】已知集合 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{-1,0,1\}$,满足条件 $f(3)=f(1)+f(2)$ 的映射 $f:A\to B$ 的个数是 ( )

(A)2. (B)4. (C)6. (D)7.

【分析】本题考查对映射概念的理解.

【解析】若 $f(3)=0$,则可以 $f(1)=0$,$f(2)=0$;$f(1)=1$,$f(2)=-1$;$f(1)=-1$,$f(2)=1$,共 3 个映射.

若 $f(3)=1$,则可以 $f(1)=1$,$f(2)=0$;$f(1)=0$,$f(2)=1$,共 2 个映射.

若 $f(3)=-1$,则可以 $f(1)=-1$,$f(2)=0$;$f(1)=0$,$f(2)=-1$,共 2 个映射.

所以总共有 7 个映射.

【答案】D

考点 2:函数的基本概念

1.函数的定义域与值域

【例 2】已知函数 $f(x)=\lg\dfrac{2+x}{2-x}$,$g(x)=\ln(ax^2+2x+a)$. 若函数 $y=f(\dfrac{x}{2})+f(\dfrac{2}{x})$ 的定义域为 A,使函数 $g(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ 的实数 a 的取值集合为 B,则 $A\cup B$ 等于 ( )

(A)$(-4,4)$. (B)$(-2,2)$.

(C)$(-2,-1)\cup[0,2)$. (D)$(-4,-1)\cup[0,4)$.

【解析】由 $\dfrac{2+x}{2-x}>0$ 得 $-2<x<2$.

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$.

$\therefore\begin{cases}-2<\dfrac{x}{2}<2,\\-2<\dfrac{2}{x}<2,\end{cases}$ 解得 $-4<x<-1$ 或 $1<x<4$.

$\therefore A=(-4,-1)\cup(1,4)$.

要使 $g(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$,即要满足 $a=0$ 或 $\begin{cases}a>0,\\\Delta=4-4a^2\geqslant 0,\end{cases}$

解得 $0\leqslant a\leqslant 1$. $\therefore B=[0,1]$.

故 $A\cup B=(-4,-1)\cup[0,4)$.

【答案】D

2.函数的解析式

【例 3】把下面不完整的命题补充完整,并使之成为真命题.

若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于______对称,则函数 $g(x)=$______.(注:填上你认为可以成为真命题的一种情形即可,不必考虑所有可能的情形)

【分析】这是一开放性题,答案不唯一,主要考查由函数对称问题求解析式.

【解析】设 $g(x)$ 上任一点 $P(x,y)$,其关于 x 轴的对称点为 $P_0(x_0,y_0)$.

则有 $\begin{cases}x_0=x,\\y_0=-y,\end{cases}$ 代入 $f(x)=3+\log_2 x$ 中,得 $-y=3+\log_2 x$.

整理得 $y=-3-\log_2 x$,即 $g(x)=-3-\log_2 x$.

【答案】①x 轴 $-3-\log_2 x$ ②y 轴 $3+\log_2(-x)$
③原点 $-3-\log_2(-x)$ ④直线 $y=x$ 2^{x-3}

考点 3:函数的性质与图象

主要考查函数的单调性、奇偶性、周期性、对称性、最值

等知识点，有时同时涉及几个性质，要注意抓住性质的定义与有关结论解题.

【例 4】已知定义在 R 上的函数 $y=f(x)$ 同时满足下列三个条件：①对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+2)=-f(x)$；②对于任意的 $x_1,x_2\in[0,2]$，且 $x_1\neq x_2$ 时，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$；③函数 $y=f(x+2)$ 的图象关于 y 轴对称.则下列结论中正确的是　(　　)

(A) $f(4.5)<f(6.5)<f(7)$.
(B) $f(4.5)<f(7)<f(6.5)$.
(C) $f(7)<f(4.5)<f(6.5)$.
(D) $f(7)<f(6.5)<f(4.5)$.

【分析】由条件①可推出 $f(x)$ 的周期，由②可得到函数为增函数，再根据对称性可得答案.

【解析】由①知 $f(x+4)=f(x)$，可得 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数；由②知 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增；由③知 $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称.结合上述结论，知 $f(4.5)=f(0.5)$，$f(7)=f(3)=f(1)$，$f(6.5)=f(2.5)=f(1.5)$，且 $f(0.5)<f(1)<f(1.5)$.

【答案】B

考点 4：函数与方程

体会函数的零点与方程的根之间的联系，初步形成用函数的观点处理问题的能力.

【例 5】二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(x\in\mathbf{R})$ 的部分对应值如下表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	6	m	-4	-6	-6	-4	n	5

不求 a,b,c 的值，可以判断方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根所在的区间是　(　　)

(A) $(-3,-1)$ 和 $(2,4)$.　(B) $(-3,-1)$ 和 $(-1,1)$.
(C) $(-1,1)$ 和 $(1,2)$.　(D) $(-\infty,-3)$ 和 $(4,+\infty)$.

【解析】方程的根就是二次函数的零点.由所给表格容易判断选 A.

【答案】A

考点 5：导数的概念与应用

主要考查函数在某一点处的导数值、导数的几何意义、导函数的概念以及导数的应用.

【例 6】函数 $y=x\sin x+\cos x$ 在下列哪个区间内是减函数　(　　)

(A) $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$.　(B) $(\pi,2\pi)$.
(C) $(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3})$.　(D) $(2\pi,3\pi)$.

【分析】先求出函数的导数，再代入答案验证.

【解析】$y'=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$，由 $y'<0$ 结合答案知 $\cos x<0$.

【答案】A

【例 7】某日中午 12 时整，甲船自 A 处以 16 km/h 的速度向正东行驶，乙船自 A 的正北18 km处以24 km/h的速度向正南行驶，则当日 12 时 30 分时两船之间距离对时间的变化率是________km/h.

【分析】先要审清题意，建立两船之间距离对时间的函数关系，再利用导数来解决问题.

【解析】设经过 t 小时，两船之间的距离为 S km，则

$S=\sqrt{(18-24t)^2+(16t)^2}$.

求得 $S'=\frac{-48(18-24t)+2\times 256t}{2\sqrt{(18-24t)^2+(16t)^2}}$，

$\therefore S'|_{t=\frac{1}{2}}=\frac{-48\times 6+256}{2\sqrt{6^2+8^2}}=-1.6$.

【答案】-1.6

考点 6：函数的综合应用

【例 8】如果函数 $f(x)=a^x(a^x-3a^2-1)(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是增函数，那么实数 a 的取值范围是　(　　)

(A) $(0,\frac{2}{3}]$.　(B) $[\frac{\sqrt{3}}{3},1)$.
(C) $(1,\sqrt{3}]$.　(D) $[\frac{3}{2},+\infty)$.

【分析】由函数在区间 $[0,+\infty)$ 上递增，利用单调性的定义及导数的知识可以解决.

【解析】(法一)(复合函数单调性判定方法)

令 $t=a^x$，则 $t>0$，

$y=t^2-(3a^2+1)t=(t-\frac{3a^2+1}{2})^2-\frac{(3a^2+1)^2}{4}$，

它表示开口向上，对称轴为 $t_0=\frac{3a^2+1}{2}$ 的抛物线的一部分.

(1)当 $a>1$ 时，$x\in[0,+\infty)$，$t\in[1,+\infty)$，又 $t=a^x$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，

则 $t_0=\frac{3a^2+1}{2}\leqslant 1$，解得 $-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，这与 $a>1$ 矛盾；

(2)当 $0<a<1$ 时，$t\in(0,1]$，又 $t=a^x$ 在 $[0,+\infty)$ 上为减函数，

则 $t_0=\frac{3a^2+1}{2}\geqslant 1$，解得 $\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant a<1$.选 B.

(法二)(导数法) $f'(x)=a^x(2a^x-3a^2-1)\ln a$，则 $f'(x)\geqslant 0$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立.

(1)当 $a>1$ 时，$\ln a>0$，

$\therefore 2a^x-3a^2-1\geqslant 0$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，

则 $3a^2\leqslant 2a^x-1$，$\therefore a^2\leqslant\frac{1}{3}$，与 $a>1$ 矛盾；

(2)当 $0<a<1$ 时，$\ln a<0$，

$\therefore 2a^x-3a^2-1\leqslant 0$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，

则 $3a^2\geqslant 2a^x-1$，$\therefore\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant a<1$.选 B.

(法三)(特值法)由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，则必有 $f(0)<f(1)$，

$\therefore -3a^2<a(a-3a^2-1)$，解得 $\frac{1}{3}<a<1$.选 B.

【答案】B

【例 9】如图所示，单位圆中弧 AB 的长为 x，用函数 $f(x)$ 表示弧 AB 与弦 AB 所围成的弓形的面积的 2 倍，下列有关

函数 $f(x)$ 的命题，其中正确的是______.（将所有正确命题的序号填上）

①函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x-\sin x(x\in(0,2\pi))$；

②函数 $f(x)$ 是奇函数但不是周期函数；

③函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 与 $(\pi,2\pi)$ 上都是增函数；

④函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上递增，在 $(\pi,2\pi)$ 上递减；

⑤函数 $f(x)$ 的图象关于点 (π,π) 对称.

【分析】本题创设问题情境，开放性地考查函数的解析式、定义域及性质，关键是得到函数的解析式与定义域.

【解析】由条件知当 $0<x<\pi$ 时，$f(x)=2(\frac{1}{2}x-S_{\triangle AOB})=x-\sin x$；

当 $\pi\leqslant x<2\pi$ 时，$f(x)=2(\frac{1}{2}x+S_{\triangle AOB})=x+\sin(2\pi-x)=x-\sin x$.

即 $f(x)=x-\sin x(x\in(0,2\pi))$；①对.

函数 $f(x)=x-\sin x(x\in(0,2\pi))$ 是非奇非偶函数且不是周期函数；②错.

对函数 $f(x)=x-\sin x(x\in(0,2\pi))$ 求导，$f'(x)=1-\cos x>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 与 $(\pi,2\pi)$ 上都是增函数；③对，④错.

设点 $P(x,y)$ 在 $y=f(x)$ 的图象上，则 $P(x,y)$ 关于点 (π,π) 的对称点为 $Q(2\pi-x,2\pi-f(x))$.

又 $(2\pi-x)-\sin(2\pi-x)=2\pi-(x-\sin x)=2\pi-f(x)$，则点 Q 在 $y=f(x)$ 的图象上，⑤对.

【答案】①③⑤

B　主观题

高考主观题中，一般有一道函数题，考查的内容通常是函数的基本概念、函数的图象和性质、函数与数学其它知识的交汇（如导数、数列、不等式、解析几何等）函数应用题等.

题型一：函数的基本概念

函数的基本概念包括映射、函数的"三要素"、函数的图象等. 求函数的定义域与解析式是每年必考的内容，解题时要强化定义域优先的意识. 函数的图象是函数"形"的体现，解函数题要注意运用基本初等函数的图象.

【例 10】已知函数 $f(x)=\lg(x+\frac{a}{x}-2)$，其中 a 是大于零的常数.

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域；

(2)当 $a\in(1,4)$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上的最小值；

(3)若对于任意 $x\in[2,+\infty)$ 恒有 $f(x)>0$，试确定 a 的取值范围.

【分析】由对数的真数大于 0；通过分类讨论可求得定义域；求函数的最值可利用函数的单调性，对于函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a\neq0)$ 通常用导数考虑.

【解析】(1)由已知得 $x^2-2x+a>0$.

当 $a>1$ 时，$\Delta<0$.

$\therefore x^2-2x+a>0$ 恒成立，

$\therefore$ 只需 $x>0$.

当 $0<a\leqslant1$ 时，$0<1-\sqrt{1-a}<1+\sqrt{1-a}$，

则 $0<x<1-\sqrt{1-a}$ 或 $x>1+\sqrt{1-a}$.

综上：当 $a>1$ 时，函数的定义域为 $(0,+\infty)$；

当 $0<a\leqslant1$ 时，函数的定义域为

$(0,1-\sqrt{1-a})\cup(1+\sqrt{1-a},+\infty)$.

(2)当 $1<a<4$ 时，令 $g(x)=x+\frac{a}{x}$.

由 $g'(x)=1-\frac{a}{x^2}$，在区间 $[2,+\infty)$ 上恒有 $g'(x)>0$.

故 $g(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上是增函数.

易得 $f(x)_{\min}=\lg\frac{a}{2}$.

(3)当 $x\in[2,+\infty)$ 时，恒有 $f(x)>0$，

即 $x+\frac{a}{x}-2>1$，$a>-x^2+3x$ 对一切 $x\in[2,+\infty)$ 恒成立.

而 $-x^2+3x=-(x-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}$，

当 $x=2$ 时取得最大值 2.

$\therefore a>2$.

【点评】本小题为函数背景下的不等式问题，考查函数的定义域、最值以及恒成立问题.

题型二：函数的性质

【例 11】已知 $a>0$ 且 $a\neq1$，$f(\log_a x)=\frac{a}{a^2-1}(x-\frac{1}{x})$.

(1)求 $f(x)$ 的表达式；

(2)判断 $f(x)$ 的奇偶性与单调性；

(3)当 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$ 时，求满足 $f(1-m)+f(1-m^2)<0$ 的 m 的取值范围.

【分析】令 $t=\log_a x$，可求出 $f(t)$，再利用定义判断函数的奇偶性与单调性. 对于(3)，可利用(2)的结果"脱"去 f，但不能忽视函数的定义域.

【解析】(1)令 $t=\log_a x$，则 $x=a^t$，

$\therefore f(t)=\frac{a}{a^2-1}(a^t-a^{-t})$，

$\therefore f(x)=\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x})\ (x\in\mathbf{R})$.

(2) $\because x\in\mathbf{R}$，由 $f(-x)=-f(x)$ 知 $f(x)$ 为奇函数；

当 $a>1$ 时，$a^2-1>0$，a^x、$-a^{-x}$ 递增，

$\therefore f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数；

当 $0<a<1$ 时，$a^2-1<0$，a^x、$-a^{-x}$ 递减，

$\therefore f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

(3)由(2)知 $f(1-m)+f(1-m^2)<0$ 可化为 $f(1-m)<f(m^2-1)$，

即 $\begin{cases}1-m<m^2-1,\\-1<1-m<1,\\-1<m^2-1<1,\end{cases}$ 解得 $1<m<\sqrt{2}$.

【点评】求函数的解析式常用换元法. 判断函数的奇偶性

要先考虑函数的定义域．判断函数的单调性可用定义法与导数法，也可借助基本初等函数的单调性．解决抽象不等式要注意等价转换．

【例 12】设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f(2-x)=f(2+x)$，$f(7-x)=f(7+x)$，且在闭区间 $[0,7]$ 上，只有 $f(1)=f(3)=0$．

(1)试判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性；

(2)试求方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-2008,2008]$ 上的根的个数，并证明你的结论．

【分析】先由条件得出函数的周期，然后判断奇偶性；根据 $f(x)=0$ 在一个周期内的根的个数，再求出在闭区间 $[-2008,2008]$ 上的根的个数．

【解析】(1)在区间 $[0,7]$ 上，只有 $f(1)=f(3)=0$，故 $f(0)\neq0$．若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(0)=0$，矛盾．即 $f(x)$ 不是奇函数．

由 $f(2-x)=f(2+x)\Rightarrow f(x)=f(4-x)$，

$f(7-x)=f(7+x)\Rightarrow f(x)=f(14-x)$，

$\therefore f(4-x)=f(14-x)$，

$\therefore f(x)=f(x+10)$，

从而知函数 $y=f(x)$ 是以 $T=10$ 为周期的函数．

由题意，$f(-3)=f(7)\neq0$，即 $f(-3)\neq f(3)$，故 $f(x)$ 不是偶函数．

$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 是非奇非偶函数．

(2)若存在 $x_0\in(7,10)$ 使得 $f(x_0)=0$，则 $f(14-x_0)=f(x_0)=0$ 而 $14-x_0\in(4,7)$ 这与已知矛盾，

$\therefore f(x)=0$ 在区间 $(0,10)$ 有且只有两个解，并且 $f(0)\neq0$．

又 $y=f(x)$ 是以 $T=10$ 为周期的函数，故 $f(10k)\neq0$，$(k\in\mathbf{Z})$．

则在区间 $[-2000,2000]$ 上，

方程 $f(x)=0$ 共有 $\frac{4000}{10}\times2=800$ 个解．

在区间 $[2000,2008]$ 上，方程 $f(x)=0$ 有且只有两个解，即 $f(2001)=f(1)=0$，$f(2003)=f(3)=0$．

在区间 $[-2008,-2000]$ 上，方程 $f(x)=0$ 有且只有一个解，即 $f(-2007)=f(3)=0$．

综上所述，方程 $f(x)=0$ 在区间 $[-2008,2008]$ 上共有 803 个解．

【点评】本题综合考查了函数的对称性、周期性、奇偶性，然后根据函数的性质推断出方程 $f(x)=0$ 在区间 $[-2008,2008]$ 上根的个数．

【例 13】若抛物线 $y=-x^2+mx-1$ 和两端点为 $A(0,3)$、$B(3,0)$ 的线段 AB 有两个不同的交点，求 m 的取值范围．

【分析】抛物线和线段有两个不同的交点，等价于 $\begin{cases}y=-x^2+mx+1,\\y=-x+3(0\leqslant x\leqslant3)\end{cases}$ 有两个不同的解，进而转化为方程的根的分布问题．

【解析】线段 AB 的方程为 $y=-x+3(0\leqslant x\leqslant3)$．

由 $\begin{cases}y=-x^2+mx-1,\\y=-x+3(0\leqslant x\leqslant3)\end{cases}$

消去 y 得 $x^2-(m+1)x+4=0(0\leqslant x\leqslant3)$．

$\because$ 抛物线与线段 AB 有两个不同的交点，

$\therefore x^2-(m+1)x+4=0$ 在 $[0,3]$ 内有两个不同的根．

设 $f(x)=x^2-(m+1)x+4$，则 $f(x)$ 的图象在 $[0,3]$ 内与 x 轴有两个不同的交点，

$$\therefore\begin{cases}\Delta=(m+1)^2-16>0,\\0<\frac{m+1}{2}<3,\\f(0)=4>0,\\f(3)=9-3(m+1)+4\geqslant0,\end{cases}$$

解得 $3<m\leqslant\frac{10}{3}$．

【点评】本题考查转化化归及数形结合的数学思想．三个"二次"问题是高考的重点与热点，要注意它们之间的联系以及与其它知识的综合．

题型三：函数与导数的应用

【例 14】已知函数 $f(x)=e^x-kx$，$x\in\mathbf{R}$．

(1)若 $k=e$，试确定函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若 $k>0$，且对于任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(|x|)>0$ 恒成立，试确定实数 k 的取值范围．

【分析】先求出函数的导数，再利用导数研究函数的性质，要注意分类讨论．

【解析】(1)由 $k=e$ 得 $f(x)=e^x-ex$，

所以 $f'(x)=e^x-e$．

由 $f'(x)>0$ 得 $x>1$，故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(1,+\infty)$，

由 $f'(x)<0$ 得 $x<1$，故 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,1)$．

(2)由 $f(|-x|)=f(|x|)$ 可知 $f(|x|)$ 是偶函数．

于是 $f(|x|)>0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立等价于 $f(x)>0$ 对任意 $x\geqslant0$ 成立．

由 $f'(x)=e^x-k=0$ 得 $x=\ln k$．

① 当 $k\in(0,1]$ 时，$f'(x)=e^x-k>1-k\geqslant0(x>0)$．

此时 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增．

故 $f(x)\geqslant f(0)=1>0$，符合题意．

② 当 $k\in(1,+\infty)$ 时，$\ln k>0$．

当 x 变化时 $f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,\ln k)$	$\ln k$	$(\ln k,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

由此可得，在 $[0,+\infty)$ 上，$f(x)\geqslant f(\ln k)=k-k\ln k$．

依题意，$k-k\ln k>0$，又 $k>1$，

$\therefore 1<k<e$．

综合①，②得，实数 k 的取值范围是 $0<k<e$．

【点评】本题考查了运用导数研究函数性质的方法，考查分类讨论、化归以及数形结合等数学思想方法，考查分析问题、解决问题的能力．

【例 15】已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx$ 在区间 $[-1,1)$，$(1,3]$ 内各有一个极值点．

(1)求 a^2-4b 的最大值；

(2)当 $a^2-4b=8$ 时，设函数 $y=f(x)$ 在点 $A(1,f(1))$ 处的切线为 l，若 l 在点 A 处穿过函数 $y=f(x)$ 的图象(即动点

在点 A 附近沿曲线 $y=f(x)$ 运动,经过点 A 时,从 l 的一侧进入另一侧),求函数 $f(x)$ 的表达式.

【分析】由条件知 $f'(x)$ 在 $[-1,1)$,$(1,3]$ 内分别有一个实根,从而得到关于 a、b 的不等式,进而求出 a^2-4b 的最大值;对于(2)要理解"切线 l 在点 A 处穿过函数 $y=f(x)$ 的图象"的含义.

【解析】(1)由题意知 $f'(x)=x^2+ax+b=0$ 在 $[-1,1)$,$(1,3]$ 内分别有一个实根,设两实根为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,则 $x_2-x_1=\sqrt{a^2-4b}$,且 $0<x_2-x_1\leqslant 4$.

则 $0<\sqrt{a^2-4b}\leqslant 4$,$0<a^2-4b\leqslant 16$,

且当 $x_1=-1,x_2=3$,即 $a=-2,b=-3$ 时等号成立,故 a^2-4b 的最大值是 16.

(2)(法一)由 $f'(1)=1+a+b$ 知 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线 l 的方程是 $y-f(1)=f'(1)(x-1)$,即 $y=(1+a+b)x-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}a$.

∵切线 l 在点 $A(1,f(x))$ 处穿过函数 $y=f(x)$ 的图象,

∴$g(x)=f(x)-[(1+a+b)x-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}a]$ 在 $x=1$ 两边附近的函数值异号,则 $x=1$ 不是 $g(x)$ 的极值点.

而 $g(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}ax^2+bx-(1+a+b)x+\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}a$,且 $g'(x)=x^2+ax+b-(1+a+b)=x^2+ax-a-1=(x-1)(x+1+a)$.

若 $1\neq -1-a$,则 $x=1$ 和 $x=-1-a$ 都是 $g(x)$ 的极值点.

∴ $1=-1-a$,即 $a=-2$,又由 $a^2-4b=8$,得

$b=-1$,故 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-x$.

(法二)同(法一)得

$g(x)=f(x)-[(1+a+b)x-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}a]$

$=\dfrac{1}{3}(x-1)[x^2+(1+\dfrac{3a}{2})x-(2+\dfrac{3}{2}a)]$.

又切线 l 在点 $A(1,f(1))$ 处穿过函数 $y=f(x)$ 的图象,

∴ $g(x)$ 在 $x=1$ 两边附近的函数值异号,于是存在 m_1,$m_2(m_1<1<m_2)$.

当 $m_1<x<1$ 时,$g(x)<0$,当 $1<x<m_2$ 时,$g(x)>0$;

或当 $m_1<x<1$ 时,$g(x)>0$,当 $1<x<m_2$ 时,$g(x)<0$.

设 $h(x)=x^2+(1+\dfrac{3a}{2})x-(2+\dfrac{3a}{2})$,则

当 $m_1<x<1$ 时,$h(x)>0$,当 $1<x<m_2$ 时,$h(x)>0$;

或当 $m_1<x<1$ 时,$h(x)<0$,当 $1<x<m_2$ 时,$h(x)<0$.

由 $h(1)=0$ 知 $x=1$ 是 $h(x)$ 的一个极值点,则 $h(1)=2\times 1+1+\dfrac{3a}{2}=0$.

∴$a=-2$,又由 $a^2-4b=8$,得 $b=-1$,

故 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-x$.

【点评】数学语言与符号语言的合理转换是解决数学问题的关键,要仔细去领会这两种语言的联系与区别.

2.常见函数模型的应用

【例 16】已知某商品的价格上涨 $x\%$,销售的数量就减少 $mx\%$,其中 m 为正常数.

(1)当 $m=\dfrac{1}{2}$ 时,该商品的价格上涨多少,就能使销售的总金额最大?

(2)如果适当地涨价,能使销售的总金额增加,求 m 的取值范围.

【分析】先审清题意,然后假设未知数,建立相应的函数模型,再求最值.

【解析】(1)设商品现在定价为 a 元,卖出的数量为 b.

由题意,当价格上涨 $x\%$ 时,销售总额为 $y=a(1+x\%)b(1-mx\%)$,

即 $y=\dfrac{ab}{10000}[-mx^2+100(1-m)x+10000]\left(0<x<\dfrac{100}{m}\right)$,

取 $m=\dfrac{1}{2}$ 得:$y=\dfrac{ab}{20000}[-(x-50)^2+22500]$,

当 $x=50$ 时,$y_{\max}=\dfrac{9}{8}ab$,

即该商品的价格上涨 50%时,销售的总金额最大.

(2)二次函数 $y=\dfrac{ab}{10000}[-mx^2+100(1-m)x+10000]$,在 $\left(-\infty,\dfrac{50(1-m)}{m}\right]$ 上递增,在 $\left[\dfrac{50(1-m)}{m},+\infty\right)$ 上递减.

适当地涨价能使销售的总金额增加,即在 $\left(0,\dfrac{100}{m}\right)$ 内存在一个区间,使函数在此区间上是增函数,所以 $\dfrac{50(1-m)}{m}>0$,解得 $0<m<1$.

即所求 m 的取值范围是 $(0,1)$.

【点评】商品的价格上涨时,销售的数量及销售的总金额随之变化,再利用二次函数的性质解题.

3.利用导数解实际应用题

【例 17】统计表明,某种型号的汽车在匀速行驶时每小时的耗油量 y(升)关于行驶速度 x(千米/小时)的函数解析式可以表示为:$y=\dfrac{1}{128000}x^3-\dfrac{3}{80}x+8(0<x\leqslant 120)$.已知甲、乙两地相距 100 千米.

(1)当汽车以 40 千米/小时的速度匀速行驶时,从甲地到乙地要耗油多少升?

(2)当汽车以多大的速度匀速行驶时,从甲地到乙地耗油最少?最少为多少升?

【分析】汽车的耗油量与行驶时间及速度有关,可根据题意建立耗油量与速度的函数关系,再利用导数来求最值.

【解析】(1)当 $x=40$ 时,汽车从甲地到乙地行驶了 $\dfrac{100}{40}=2.5$ 小时,

要耗油 $(\dfrac{1}{128000}\times 40^3-\dfrac{3}{80}\times 40+8)\times 2.5=17.5$(升).

(2)当速度为 x 千米/小时时,汽车从甲地到乙地行驶了 $\dfrac{100}{x}$ 小时,设耗油量为 $h(x)$ 升.

依题意得 $h(x)=(\dfrac{1}{128000}x^3-\dfrac{3}{80}x+8)\cdot\dfrac{100}{x}=\dfrac{1}{1280}x^2$