二十一世纪普通高等教育系列教材

高等数学

GAODENGSHUXUE

主编 贾彩军

CUCP 中国传媒大学出版社

二十一世纪普通高等教育系列教材

高等数学

GAODENGSHUXUE

江苏工业学院图书馆
藏书章

主编 贾彩军

中国传媒大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/贾彩军等主编．—北京：中国传媒大学出版社，2008.5

21世纪高职高专规划教材

ISBN 978-7-81127-263-5

Ⅰ．高…　Ⅱ．贾…　Ⅲ．高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第066414号

高等数学

主　　编	贾彩军
责任编辑	沈德煊
责任印制	曹　辉
出 版 人	蔡　翔
出版发行	中国传媒大学出版社(原北京广播学院出版社) 北京市朝阳区定福庄东街1号　邮编　100024 电话：010-65450532　65450528　传真：010-65779405 http://www.cucp.com.cn
经　　销	新华书店总店北京发行所
印　　刷	北京市通县华龙印刷厂
开　　本	787×1092mm　1/16
印　　张	22.75
版　　次	2008年6月第1版　2008年6月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-81127-263-5　　**定　　价**：38.00元

版权所有　　翻印必究　　印装错误　　负责调换

前 言
FOREWORD

为了适应高职高专教育的需要，培养和造就更多的实用型、复合型、创新型人才，根据教育部《高职高专教育专业人才培养目标及规格》和《高职高专教育高等数学课程教学的基本要求》之规定，我们在认真总结高职高专教育数学教学改革的基础上，结合对国际国内同类教材的发展趋势的分析，通过申报、推荐和招标，遴选了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强且长期从事职业教育数学的教师编写了本教材。

本教材在编写过程中，充分吸收了高职高专教学实践的经验，力求贯彻“以应用为目的，必需够用为度”的原则，力求体现基础性、实用性和发展性的和谐统一。具体表现在：一是尊重科学，注重教材自身系统性、逻辑性。对难度较大的基础理论部分，注意讲清概念，减少理论证明，注意学生分析问题、解决问题能力的培养。二是注重理论联系实际，加强与实际应用联系较多的基础知识。三是着重加强数学思想的培养，即学习怎样用数学思想去解决实际问题。

本教材的特点是：

1. 淡化深奥的数学理论，加强对学生的数学思想及方法的培养，突出基础知识和基本技能的培养，通俗易懂，便于教学，也便于学生自学；

2. 充分考虑了高职高专学生的特点，较好地处理了初等数学与高等数学之间的过渡与衔接；

3. 为了提高学生的实践能力，在每章最后一节安排了数学实验，它在整个教材体系中起到了承上启下的作用。借助 Mathematica 数学软件解决相关

的问题，理论与实验前后呼应，既加强了数学理论知识的应用，又培养了学生的动手能力；

4. 每节后的习题针对性强，题量适度，难度适中。

本教材共分 8 章，分别是：函数、极限与连续；一元函数的微分学；一元函数的积分学；常微分方程；向量代数与空间解析几何；多元函数的微分学；重积分；无穷级数。书末附有简易积分表和总复习题答案与解析。通过本课程学习，学生将较系统地掌握必需的基础理论、基本知识和常用的运算方法，为学生学习后继课程和利用数学方法解决实际问题打下较为坚实的基础。通过各个教学环节，逐步培养学生的基本数学能力，即类比、分析、归纳、抽象、联想、逻辑推理、计算等能力；用数学知识建立数学模型及借助于数学软件求解数学模型的能力等。

尽管我们在这本教材的特色建设方面做出了很多的努力，但由于能力和水平所限，加之教学改革中一些问题还有待探索，不当之处仍在所难免，恳请批评指正。同时向支持本书编写和出版的各界同仁表示衷心地感谢。

编　者

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

《高等数学》

编委会

主　编　贾彩军　万忠保

副主编　张发荣　王锐利　周健君

编　者　贾彩军　万忠保　张发荣
王锐利　周健君　何　彬
赵营峰

主　审　梁盛泉

CONTENTS 目录

第1章 函数 极限 连续

函数是对现实世界中各种变量之间相互依赖关系的一种抽象描述，它是高等数学研究的主要对象．极限理论是高等数学的基础，它是这门课程的基本推理工具，连续则是函数的一个重要特性，本章将介绍函数，极限与连续的基本知识，为以后的学习奠定必要的基础．

§1.1 函数

§1.1.1 一元函数的概念

定义1 设有两个变量 x 与 y，当变量 x 在某一给定的数集 D 中任意取定一值时，另一个变量 y 就按某一确定的法则 f 有一个确定的值与 x 的这个值相对应，那么变量 y 称为变量 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$．数集 D 称为函数 $f(x)$ 的**定义域**，记作 $D(f)$ 或 D．数集

$$R(f)=\left\{y \mid y=f(x), x\in D\right\}$$

称为函数 $f(x)$ 的**值域**，简记为 R_f．

在函数的研究中，若涉及的变量只有两个，即一个自变量和一个因变量，我们称这种函数为一元函数，上面给出的就是一元函数的定义．

一元函数关系描述的是两个变量在变化过程中的相互依赖关系．当需研究变量 y 随变量 x 变化而变化的规律时，我们以 x 作为自变量，以 y 作为因变量．反之，当需研究变量 x 随变量 y 变化而变化的规律时，我们以 y 作为自变量，而以 x 作为因变量．

在应用中，我们说函数关系 $y=f(x)$ 已被建立，是指函数的定义域与对应法则均已确定，在具体问题里，函数 $y=f(x)$ 的定义域由问题本身所决定；当函数 $y=f(x)$ 无实际问题背景而仅是一解析式时，其定义域是使函数有意义的一切 x 的全体，如：圆的面积 A

与其半径 r 之间的关系是 $A=\pi r^2$，这个函数的定义域是 $(0,+\infty)$，而 $y=\pi r^2$ 仅作为一解析式时，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

设有函数 $y=f(x)$，定义域为 $D(f)$，若 $x_0\in D(f)$，我们说函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处有定义，称 $f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**，函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值也记为 $f(x)|_{x=x_0}$、$y|_{x=x_0}$ 等.

为直观地研究函数 $y=f(x)$ 随自变量变化而变化的规律，我们常通过平面直角坐标系 xOy 来讨论动点 (x,y) 的运动轨迹，它称为函数 $y=f(x)$ 的图形，易知，这种图形与任意平行于 y 轴的直线的交点最多有一个.

例 1 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}+\ln(x^2-4)$ 的定义域.

解 函数 $f(x)$ 定义域中的 x 应满足

$$\begin{cases}x-3>0\\x^2-4>0\end{cases}$$

解不等式组，得

$$x>3$$

所以，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(3,+\infty)$.

例 2 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-\ln|x|}$ 的定义域.

解 函数 $f(x)$ 定义域中的 x 应满足 $\ln|x|\neq 1$ 且 $x\neq 0$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-\mathrm{e})\cup(-\mathrm{e},0)\cup(0,\mathrm{e})\cup(\mathrm{e},+\infty)$.

例 3 设 $f(x)=x^2+x+1, x\in R$. 求(1) $f(-2)$、$f(2x)$ 与 $f(-x)$；(2) $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，其中 x_0 及 Δx 为 R 中的实数.

解 (1)将 -2 代入 $f(x)$ 得

$$f(-2)=(-2)^2+(-2)+1=3,$$

同理有

$$f(2x)=(2x)^2+2x+1=4x^2+2x+1,$$

$$f(-x)=(-x)^2+(-x)+1=x^2-x+1;$$

(2)在 $f(x)$ 中用 $x_0+\Delta x$ 代入 x 得

$$\begin{aligned}f(x_0+\Delta x)&=(x_0+\Delta x)^2+x_0+\Delta x+1\\&=x_0^2+x_0+1+2x_0\Delta x+\Delta x^2+\Delta x,\end{aligned}$$

用 x_0 代 x 得

$$f(x_0)=x_0^2+x_0+1,$$

所以有

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x^2+(2x_0+1)\Delta x.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

§1.1.2 函数的基本特性

对于不同的函数 $f(x)$，它们可能具有不同的特性，常遇到的有如下四种.

一、奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 I 关于原点对称，若对于一切的 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**，既非偶函数，也非奇函数的函数称为非奇非偶函数，常数 0 为唯一的既奇又偶的函数.

奇偶函数运算后的奇偶性具有如下规律(运算有意义的话)：

两个偶函数的和、积、商仍为偶函数；

两个奇函数的和是奇函数；

两个奇函数的积、商是偶函数；

一个偶函数与一个奇函数的积与商是奇函数；

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

二、周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，若存在正数 T，使得对于一切实数 x，都有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的**周期**.

若 $f(x)$ 为周期函数，则 $f(x)$ 的周期有无穷个，因为若 T 为 $f(x)$ 的一个周期，那么 $-T$、$\pm 2T$、$\pm 3T\cdots$ 都是 $f(x)$ 周期，若在这些周期中，存在一个最小正数 T，我们称它为 $f(x)$ 的最小正周期，简称周期，如：$y=\sin x$ 周期 2π，$y=\cos\dfrac{x}{2}$ 周期为 4π.

三、单调性

设 $y=f(x)$ 定义域为 I，若对于 I 中任意的 x_1、x_2，$x_1<x_2$，都有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上**单调递增**；若

$$f(x_1)\geqslant f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上**单调递减**.

若在上述不等式中将等号去掉，这时称单调是严格的，递增称为严格递增，递减称为严格递减，如 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 内是严格递增函数，$y=e^{-x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格递减函数，而 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 内严格递减，在 $[0,+\infty)$ 内严格递增.

递增函数的图形沿 x 轴正方向保持上升趋势(图 1－1(a))，递减函数的图形沿 x 轴正方向保持下降趋势(图 1－1(b)).

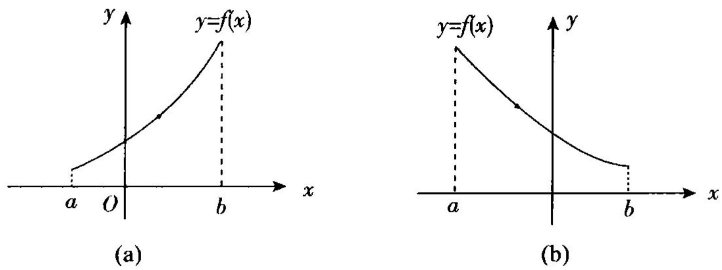

图 1—1

四、有界性

设函数 $y=f(x)$ 定义于 I 上，若存在正数 M，使对于一切的 $x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称 $f(x)$ 在 I 上是**有界函数**，或称 $f(x)$ 在 I 上有界，若不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 在 I 上无界，例如 $y=\sin x$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界函数，因为 $|\sin x|\leqslant 1$，所以，存在正数 $M=1$，使当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，有 $|\sin x|\leqslant M=1$.

例 4 证明 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界，而在 $(a,+\infty)(a>0)$ 上有界.

证 用反证法，设 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界，即存在正数 M，使对于一切的 $x\in(0,+\infty)$ 使对于一切的 $x\in(0,+\infty)$，都有

$$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M,$$

可以证明这是不可能的，因为取 $x_0=\dfrac{1}{M+1}$ 时，显然 $x_0\in(0,+\infty)$，而 $\left|\dfrac{1}{x}\right|=M+1>M$，所以，$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界.

当 $x\in(a,+\infty)(a>0)$ 时，$x>a>0$，从而有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|=\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{a}$，故可取 $M=\dfrac{1}{a}$，则当 $x\in(a,+\infty)$ 时，恒有

$$\left|\frac{1}{x}\right|<M.$$

这就证明了 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(a,+\infty)(a>0)$ 上是有界函数.

§1.1.3 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，值域为 A，若对于任意的 x_1、$x_2\in I$，$x_1\neq x_2$，都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，这也就是说，对于任意的 $y\in A$，在 I 中只有唯一的 x，使 $f(x)=y$，这样就存在着从 A 到 I 的一个对应法则 φ，使 $x=\varphi(y)$，即 x 是 y 的函数，这个函数称为函数

$y=f(x)$ 的**反函数**，常将这个反函数记为 $x=f^{-1}(y)$，它的定义域是 A，值域为 I.

习惯上，我们把 x 作为自变量，把 y 作为因变量，因此常把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

在直角坐标系 xOy 中，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 表示的是同一图形，而 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形则是关于直线 $y=x$ 对称的.

例 5 证明：当 $x\geqslant 1$ 时，函数 $y=\frac{1}{x}+x$ 的反函数存在，并求反函数及其定义域.

解 容易看出，函数 $y=\frac{1}{x}+x$ 在 $[1,+\infty)$ 上的值域为 $[2,+\infty)$，从方程 $\frac{1}{x}+x=y$ 中解出 x，得

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}.$$

由于 $x\geqslant 1$，故根号前应取正号（为什么？），从而有

$$x=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}.$$

这说明：对于 $y\in[2,+\infty)$，恰有唯一的 $x=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$ 与之对应，因而函数 $y=\frac{1}{x}+x$ 在 $[1,+\infty)$ 内存在反函数，且反函数为

$$y=\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}.$$

其定义域为 $[2,+\infty)$.

设 I 与 A 分别是 $y=f(x)$ 的定义域与值域，$y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$，则有

$$f^{-1}(f(x))=x,\ x\in I;$$

$$f(f^{-1}(x))=x,\ x\in A.$$

§1.1.4 基本初等函数及图形

下列五类函数统称为基本初等函数：幂函数 $y=x^a$；指数函数 $y=a^x\,(a>0$，且 $a\neq 1)$；对数函数 $y=\log_a x\,(a>0$，且 $a\neq 1)$；三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$，它们的图形如图 1－2、1－3 所示.

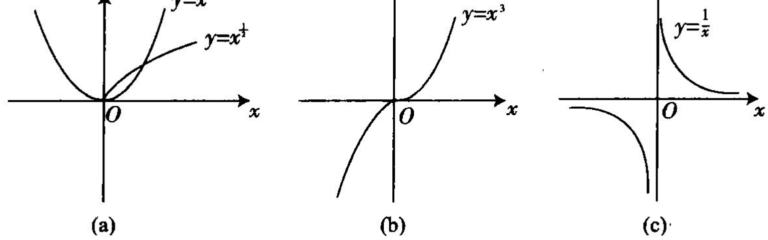

图 1－2

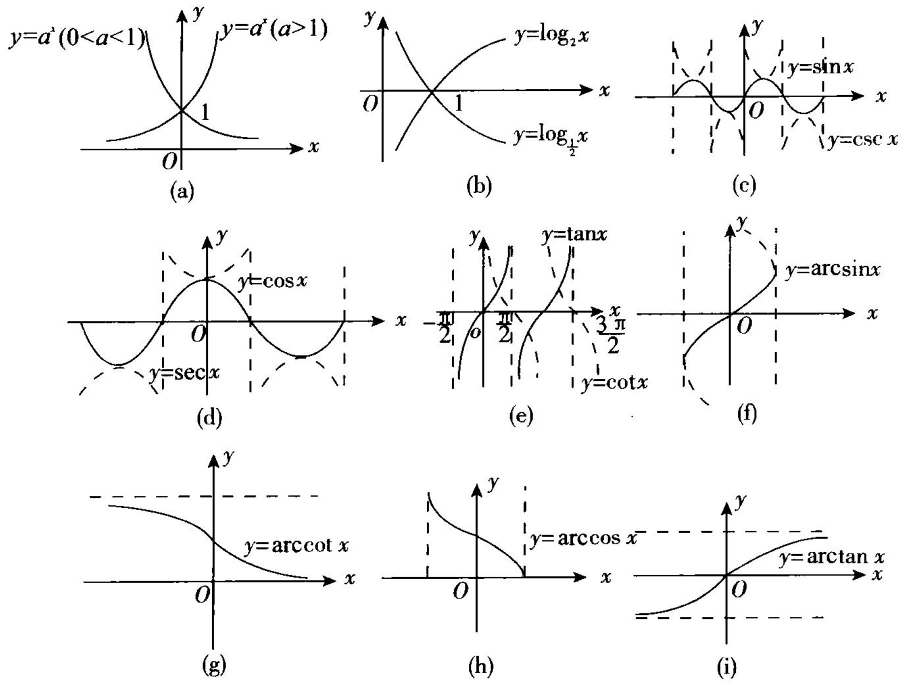

图 1－3

§1.1.5 复合函数与初等函数

一、复合函数

定义 2 设 y 是 u 的函数，即 $y=f(u)$，定义域为 U，而 u 又是 x 的函数，即 $u=\varphi(x)$，其定义域为 M，值域为 X. 且 $X\subseteq U$，那么对于 M 中的每一个 x 经过中间变量 u，相应地有唯一确定的一个 y 与之对应，记为 $y=f[\varphi(x)]$. 我们称其为函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 的**复合函数**.

例 6 求函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数：

(1) $y=\sqrt{u}$，$u=x^2-1$，

(2) $y=\lg u$，$u=\arcsin x$.

解 (1)将 $u=x^2-1$ 代入 $y=\sqrt{u}$ 中得所求复合函数为 $y=\sqrt{x^2-1}$，其定义域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，它是 $u=x^2-1$ 的定义域的一部分.

(2)将 $u=\arcsin x$ 代入 $y=\lg u$ 中得所求复合函数为 $y=\lg\arcsin x$，其定义域 $(0,1]$.

例 7 设 $f(x)=y=\sqrt{1-x^2}$，$\varphi(x)=\cos x$，求 $f[\varphi(x)]$ 和 $\varphi[f(x)]$.

解 $f[\varphi(x)]$ 即为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合，而 $f(u)=\sqrt{1-u^2}$，$u=\cos x$，于是有

$$f[\varphi(x)]=\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|.$$

一般地，在求 $f[\varphi(x)]$ 时，只需将 $f(x)$ 中的 x 用 $\varphi(x)$ 代入即得，同理我们有

$$\varphi[f(x)]=\cos\sqrt{1-x^2}.$$

例 8　$f(x)=\sqrt{1-x^2}$,求 $f[f(x)]$.

解　因 $f(x)$的定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,1]$,因此,$f[f(x)]$是有意义的,将 $f(x)$中的 x 用 $f(x)$代入,得

$$f[f(x)]=\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}.$$

注意:若将上面的复合函数的结果写成$|x|$而不指明自变量 x 的变化范围是不对的,因为 $f[f(x)]$的定义域为$[-1,1]$,并非全体实数,上面的复合函数化简后应表示为

$$f[f(x)]=|x|\quad x\in[-1,1].$$

例 9　下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的,试写出它们的复合关系:

(1)$y=2^{\tan^2\ln x}$,(2)$y=\lg\arctan x^3$.

解　(1)从最外层开始,首先是一个指数函数,记 $y=2^u$,而 $u=\tan^2\ln x$,它的最外层是一个幂函数,记 $v=\tan t$,而 $t=\ln x$. 所以,函数 $y=2^{\tan^2\ln x}$ 的复合关系是 $y=2^u$,$u=v^2$,$v=\tan t$,$t=\ln x$.

(2)函数 $y=\lg\arctan x^3$ 的复合关系是

$$y=\lg u,u=\arctan v,v=x^3.$$

二、初等函数

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合,并可用一个解析式表示的函数叫做**初等函数**.

例如:$y=x\sin^2\tan x-\sec x$,$y=\cos(e^{-x}+1)$,$y=\log_2\tan x+3^x\cos x^2$ 等都是初等函数.

必须指出,初等函数是能用一个解析式表示的,这个解析式是一些基本初等函数的有限次复合和有限次的四则运算所构成的,下列函数不是初等函数.

(1)$f(x)=\begin{cases}e^x & x\leqslant 0\\ x+\sin x & x>0\end{cases}$　因为该函数没用一个解析式表示.

(2)取整函数 $y=[x]=n,n\leqslant x<n+1,n\in Z$.

三、双曲函数

在工程技术中,常会遇到一类叫做双曲函数的初等函数,它们的定义如下:

双曲正弦函数:$\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2},x\in(-\infty,+\infty)$;

双曲余弦函数:$\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2},x\in(-\infty,+\infty)$;

双曲正切函数:$\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},x\in(-\infty,+\infty)$;

双曲余切函数:$\operatorname{cth}x=\dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

易知，$\mathrm{sh}x$、$\mathrm{th}x$、$\mathrm{cth}x$ 为奇函数，$\mathrm{ch}x$ 为偶函数，双曲函数的图形如图 1—4.

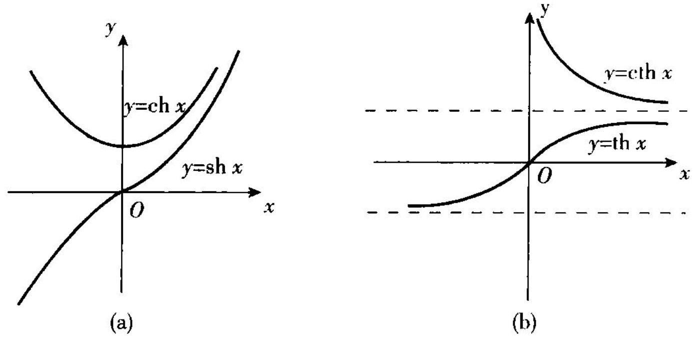

图 1—4

§1.1.6 分段函数

在实际应用中，我们常会遇到这样一类函数：它们不能用一个解析式表示，即在定义域不同范围内具有不同的表达式，这样的函数叫做**分段函数**，如前面介绍的取整函数就是分段函数，下面再看几个分段函数的例子.

例 10 符号函数

$$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

它的图形如图 1—5.

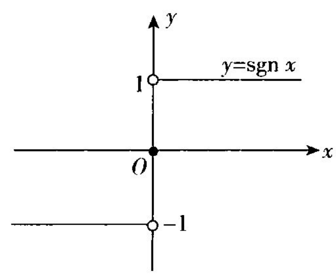

图 1—5

例 11 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x<0\\ e^x, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ e^2(3-x), & 2<x\leqslant 3\end{cases}$

求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(3)$，并画出函数 $f(x)$ 的图形.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,3]$，它在 $-\infty<x<0$，$0\leqslant x\leqslant 2$ 及 $2<x\leqslant 3$ 三个区间上有不同的表达式. 在计算 $f(x)$ 的函数值时，根据 x 所在的区间，将 x 代入相应的函数表达式，于是有

$f(-1)=(-1)^2+(-1)+1=1$，

$f(0)=e^0=1$，$f(1)=e^1=e$，$f(3)=e^2(3-3)=0$.

$f(x)$ 的图形如图 1—6.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com