

大学数学系列教材

微积分学

(第三版)

华中科技大学数学系

(下册)



高等教育出版社
Higher Education Press

大学数学系列教材

微积分学

(第三版) (下册)

华中科技大学数学系



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是在高等教育出版社2002年出版的《微积分学(修订版)》(下册,华中科技大学数学系编)的基础上,广泛吸取校内外教师的意见后修订而成的。全书分上、下两册出版。下册主要内容有:矢量代数与空间解析几何,多元函数微分学,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数,并且在书的最后提供了习题答案及人名与名词索引。

本着“通用、简明、便利、易读”的方针,本书对传统的微积分(即高等数学)课程的教学内容,采取精简、集中、类比、偏重、优化等一系列有效措施,设计成一个内容简明易懂、数学思想清晰、重点难点突出、注重应用能力培养的教学体系;实践证明这种处理方式能在有限的课时内提高教学效率,使学生能更快更好地理解与掌握微积分学知识。

本书适用于一般高等院校理工类各专业学生作为微积分学教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分学.下册/华中科技大学数学系.—3版.
—北京:高等教育出版社,2008.6
ISBN 978-7-04-023880-8

I.微… II.华… III.微积分—高等学校—
教材 IV.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第071672号

策划编辑 宋瑞才 责任编辑 崔梅萍 封面设计 张志奇
责任绘图 黄建英 版式设计 张岚 责任校对 金辉
责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网址	http://www.hep.edu.cn
总机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
			http://www.landaco.com.cn
经销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印刷	高等教育出版社印刷厂		
开本	880×1230 1/32	版次	1997年8月第1版
印张	9.25	印次	2008年6月第3版
字数	260 000	定 价	2008年6月第1次印刷 16.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。
版权所有 侵权必究
物料号 23880-00

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

反盗版举报传真：(010) 82086060

E-mail: dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮编：100120

购书请拨打电话：(010)58581118

目 录

第八章 矢量代数与空间解析几何	1
§ 8.1 空间直角坐标系	1
§ 8.2 矢量及其线性运算	4
8.2.1 矢量概念	4
8.2.2 矢量的线性运算	5
8.2.3 矢量的坐标	8
8.2.4 矢量的方向余弦	10
§ 8.3 矢量间的积	11
8.3.1 数量积	11
8.3.2 矢量积	13
8.3.3 混合积	16
§ 8.4 平面与直线	19
8.4.1 平面方程	19
8.4.2 直线方程	21
8.4.3 关于平面与直线的基本问题	23
§ 8.5 曲面与曲线	34
8.5.1 曲面	34
8.5.2 空间曲线	38
8.5.3 二次曲面	42
第九章 多元函数微分学	49
§ 9.1 多元函数	49
9.1.1 区域	49
9.1.2 多元函数的概念	52
9.1.3 极限与连续性	54
§ 9.2 偏导数与全微分	58

9.2.1	偏导数的定义与计算	58
9.2.2	高阶偏导数	62
9.2.3	全微分	63
9.2.4	复合函数微分法	67
9.2.5	隐函数微分法	72
§ 9.3	方向导数与梯度	80
9.3.1	方向导数	80
9.3.2	梯度	83
§ 9.4	微分学的几何应用	85
9.4.1	曲线的切线与法平面	85
9.4.2	曲面的切平面与法线	88
§ 9.5	极值	92
9.5.1	自由极值	92
9.5.2	条件极值	95
9.5.3	应用问题	99
9.5.4	Taylor 公式	102
第十章	重积分	107
§ 10.1	二重积分的定义与性质	107
10.1.1	体积问题与质量问题	107
10.1.2	二重积分的定义	108
10.1.3	二重积分的性质	110
§ 10.2	二重积分的计算	111
10.2.1	化为逐次积分	112
10.2.2	极坐标代换	117
* 10.2.3	一般变量代换	122
§ 10.3	三重积分	129
10.3.1	三重积分的定义	129
10.3.2	化为逐次积分	130
10.3.3	柱面坐标与球面坐标代换	135
§ 10.4	重积分的应用	142
10.4.1	几何应用	142
10.4.2	物理应用	147

第十一章 曲线积分与曲面积分	153
§ 11.1 第一型曲线积分	153
11.1.1 定义与性质	153
11.1.2 化为定积分	155
§ 11.2 第二型曲线积分	161
11.2.1 定义与性质	161
11.2.2 化为定积分	163
11.2.3 Green 公式	166
11.2.4 平面曲线积分与路径无关的条件	172
11.2.5 二元函数的全微分求积	176
11.2.6 全微分方程	180
§ 11.3 第一型曲面积分	185
11.3.1 定义与性质	185
11.3.2 化为二重积分	186
§ 11.4 第二型曲面积分	191
11.4.1 定义与性质	191
11.4.2 化为二重积分	194
§ 11.5 Gauss 公式与 Stokes 公式	199
11.5.1 散度与旋度	199
11.5.2 Gauss 公式	202
11.5.3 Stokes 公式	207
11.5.4 场论初步	210
第十二章 无穷级数	218
§ 12.1 数项级数	218
12.1.1 级数的概念与性质	218
12.1.2 正项级数	221
12.1.3 变号级数	227
§ 12.2 函数项级数	233
12.2.1 一致收敛性	233
12.2.2 和函数的分析性质	236
§ 12.3 幂级数	238

12.3.1	收敛区间与收敛半径	239
12.3.2	展开函数为幂级数	243
12.3.3	级数求和	249
§ 12.4	Fourier 级数	254
12.4.1	Fourier 级数及其收敛性	254
12.4.2	展开函数为 Fourier 级数	256
12.4.3	Fourier 级数的其他形式	261
	习题答案	270
	人名索引	283
	名词索引	284

第八章

向量代数与空间解析几何

本书上册所介绍的“一元函数微积分学”，是建立在平面解析几何的基础上. 本书下册转向“多元函数微积分学”的讨论，为此，空间解析几何的知识是不可缺少的. 鉴于矢量用于表达几何与分析概念都具有特殊的便利，而且已成为现代科学中的通用工具，本章着重介绍矢量代数的基本内容，并且将其应用于空间解析几何问题的研究.

§ 8.1 空间直角坐标系

空间解析几何的出发点，是建立空间中的点与三元有序数组之间的联系，这主要通过引进空间直角坐标系来实现.

在空间中取定点 O ，过点 O 作三条相互垂直的数轴： x 轴（横轴）、 y 轴（纵轴）与 z 轴（竖轴），它们统称为坐标轴，称点 O 为坐标原点. 规定 x 轴、 y 轴与 z 轴的正向构成右手系（当右手握拳的方向是从 x 轴的正向到 y 轴的正向时，右手大拇指的指向是 z 轴的正向），如图 8-1 所示. 将这样的空间直角坐标系记作 $Oxyz$.

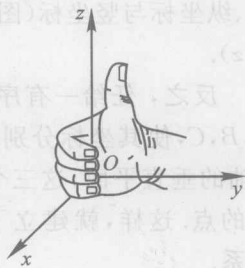


图 8-1

以下总假定已取定空间直角坐标系 $Oxyz$.

由 x 轴、 y 轴确定的平面称为 xy 坐标平面，简称 xy 平面； yz 平面与 xz 平面的意义仿此. 三坐标平面两两相互垂直，且将空间分成八个部分，每个部分称为卦限. 位于 xy 平面上的一、二、三、四象限上方（假定 z 轴朝上）的四个卦限依次称为 I、II、III、IV 卦限，与之相对的 xy

平面向方的四个卦限依次称为V、VI、VII、VIII卦限，如图8-2所示。

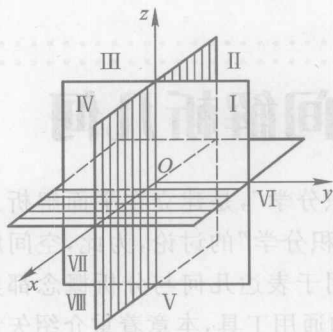


图 8-2

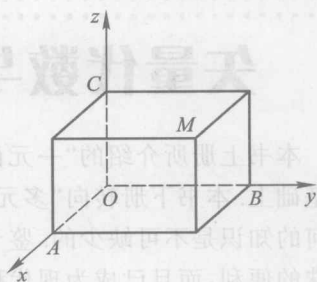


图 8-3

任给空间一点 M ，过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴与 z 轴，它们与 x 轴、 y 轴、 z 轴的交点依次为 A 、 B 、 C ，这三点在各坐标轴上的坐标分别为 x 、 y 、 z 。这样，点 M 唯一确定了一个三元有序数组 (x, y, z) ，称之为点 M 在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标，依次称 x 、 y 、 z 为 M 的横坐标、纵坐标与竖坐标(图 8-3)。将点 M 记为 $M(x, y, z)$ ，或简写为 (x, y, z) 。

反之，任给一有序数组 (x, y, z) ，在 x 轴、 y 轴与 z 轴上分别取点 A 、 B 、 C ，使其坐标分别为 x 、 y 、 z ，然后通过 A 、 B 、 C 分别作 x 轴、 y 轴、 z 轴的垂直平面，这三个平面的交点 M 就是以 (x, y, z) 为其坐标的唯一的点。这样，就建立了空间的点与三元有序数组之间的一一对应关系。

坐标面与坐标轴上的点，其坐标各有一定特征。例如， xy 平面上的点的坐标形如 $(x, y, 0)$ ； x 轴上的点的坐标形如 $(x, 0, 0)$ 。原点的坐标为 $(0, 0, 0)$ 。

给定点 $M(x, y, z)$ ，点 M 关于 xy 平面的对称点为 $(x, y, -z)$ ；点 M 关于 x 轴的对称点为 $(x, -y, -z)$ ；点 M 关于原点的对称点为 $(-x, -y, -z)$ 。点 M 在 xy 平面上的投影为点 $(x, y, 0)$ ；点 M 在 x

轴上的投影为点 $(x, 0, 0)$ (一点在一平面(直线)上的投影是由该点向该平面(直线)所引垂线之垂足). 其余情况类推.

给定两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 以 d 记此两点之间的距离, 即 $d = |M_1M_2|$, 现推出 d 的计算公式. 过 M_1, M_2 各作三个分别垂直于三坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 8-4). 分别对直角三角形 M_1AM_2 与 M_1BA 用勾股定理得

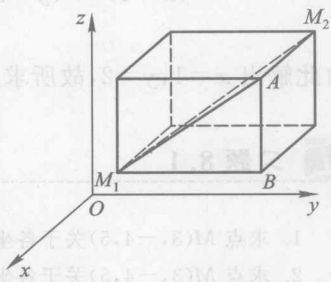


图 8-4

$$d^2 = |AM_2|^2 + |M_1A|^2 = |AM_2|^2 + |M_1B|^2 + |BA|^2.$$

因

$$|AM_2| = |x_2 - x_1|, |M_1B| = |y_2 - y_1|, |BA| = |z_2 - z_1|,$$

故得

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1)$$

特别地, 点 $M(x, y, z)$ 与原点 $O(0, 0, 0)$ 之间的距离为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2)$$

例 1 试证以点 $A(4, 1, 9), B(10, -1, 6)$ 与 $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形为等腰直角三角形.

证 依公式(1)有

$$|AB|^2 = (10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2 = 49;$$

$$|BC|^2 = (2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2 = 98;$$

$$|CA|^2 = (4-2)^2 + (1-4)^2 + (9-3)^2 = 49.$$

可见 $|AB| = |CA|$, $|AB|^2 + |CA|^2 = |BC|^2$, 这表明 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

例 2 在 xy 平面上求一点 M , 使 M 与点 $A(1, 2, 1), B(2, 2, 0), C(1, 3, 0)$ 的距离相等.

解 设 M 的坐标为 $(x, y, 0)$, 则等式 $|MA| = |MB| = |MC|$ 相

当于

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(y-2)^2+1 &= (x-2)^2+(y-2)^2 \\ &= (x-1)^2+(y-3)^2.\end{aligned}$$

由此解出 $x=1, y=2$, 故所求点为 $M(1, 2, 0)$.



习题 8.1

1. 求点 $M(3, -4, 5)$ 关于各坐标面的对称点的坐标.
2. 求点 $M(3, -4, 5)$ 关于各坐标轴的对称点的坐标.
3. 求点 $A(4, -3, 5)$ 到坐标原点及各坐标轴的距离.
4. 在 z 轴上求一点, 使它到点 $M(-4, 1, 7)$ 和 $N(3, 5, -2)$ 的距离相等.
5. 在 yz 面上求一点, 使它到点 $A(3, 1, 2), B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 的距离相等.

§ 8.2 矢量及其线性运算

8.2.1 矢量概念

在物理学以及其他应用科学中有两类性质的量. 一类量只有大小没有方向, 如质量、距离、温度、角速度等; 另一类量既有大小又有方向, 如力、速度、位移、力矩等. 前一类量称为数量(也叫纯量或者标量); 后一类量称为矢量(也叫向量), 这种“有方向的量”广泛出现在各个领域, 其重要性并不亚于数量.

在数学上, 常用有向线段来表示矢量. 对空间中任意两点 A, B , 称从起点 A 到终点 B 的有向线段为一个矢量, 记作 \vec{AB} , 或记为单个黑体字母 \mathbf{a} (图 8-5). 箭头所指方向为矢量的方向; 称线段 AB 的长度为矢量 \vec{AB} 的模, 记作 $|\vec{AB}|$ 或 $|\mathbf{a}|$; 若矢量 \mathbf{a} 的模为零, 则称 \mathbf{a} 为零矢量(可认为零矢量的方向是任意的), 记作 $\mathbf{0}$; 若矢量 \mathbf{a} 的模为 1, 则称其为

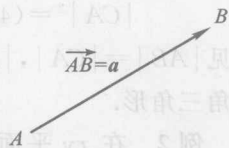


图 8-5

单位矢量;称矢量 \overrightarrow{BA} 为矢量 \overrightarrow{AB} 的负矢量,写作 $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

给定矢量 a, b ,若 a 经平行移动后可与 b 重合(即起点与起点重合,终点与终点重合),则规定 $a=b$.在这个意义上,矢量并无固定的起点,因此称为自由矢量,有时为了讨论问题方便,需将矢量的起点固定,固定了起点的矢量称为固定矢量.本书中所研究的矢量皆为自由矢量.

任给矢量 a ,必有唯一点 M ,使得 $a = \overrightarrow{OM}$ (O 是坐标原点).反之,任给空间中一点 M , M 确定唯一矢量 \overrightarrow{OM} ,称为点 M 的矢径.这样,通过点 M 与矢量 \overrightarrow{OM} 的对应,得到空间中点的全体与矢量的全体之间的一一对应.这种对应对于矢量的研究与应用非常重要.

给定矢量 $a = \overrightarrow{OA}, b = \overrightarrow{OB}$,若 O, A, B 三点共线,则说矢量 a 与 b 共线(或平行),且当 A, B 在点 O 之同侧时,则说 a 与 b 同向;当 A, B 在点 O 之异侧时,则说 a 与 b 反向.注意零矢量与任何矢量共线.

8.2.2 矢量的线性运算

一、矢量的加法和减法

力或速度的合成是依“平行四边形法则”施行的,矢量的加法是这类合成的一种抽象.

定义 1 给定矢量 $a = \overrightarrow{OA}, b = \overrightarrow{OB}$,若 a 与 b 不共线,则以 OA, OB 为邻边作平行四边形 $OACB$ (图 8-6),称矢量 $c = \overrightarrow{OC}$ 为矢量 a, b 的和,记作 $c = a + b$.若 a 与 b 共线且同向,则规定 $c = a + b$ 是一个与 a, b 同向的矢量,且 $|c| = |a| + |b|$;若 a 与 b 共线但反向且 $|a| \geq |b|$,则规定 $c = a + b$ 是一个与 a 同向的矢量且 $|c| = |a| - |b|$.

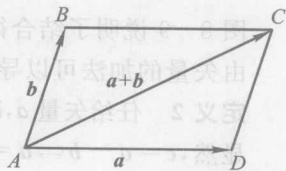


图 8-6

不难理解,如上定义的 $a+b$ 与原点 O 的选择无关,这种求和法则称为平行四边形法则.

由矢量求和的平行四边形法则,我们容易得到矢量求和的三角形法则:

将矢量 a, b 首尾相接,则由起点到终点的矢量 $c = \overrightarrow{OC}$ 为矢量 a, b

的和(图 8-7), 即 $c = a + b$.

进一步, 三角形法则可推广为如下的矢量求和的多边形法则(图 8-8):

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \cdots + \vec{EF} = \vec{AF}. \quad (1)$$

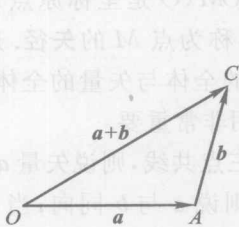


图 8-7

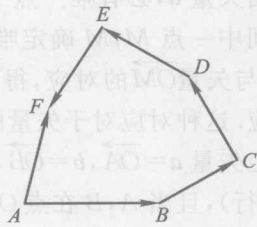


图 8-8

容易验证, 矢量加法满足如下性质:

- (i) 交换律: $a + b = b + a$.
- (ii) 结合律: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- (iii) $a + 0 = a, a + (-a) = 0$.

图 8-9 说明了结合律的正确性.

由矢量的加法可以导出矢量的减法:

定义 2 任给矢量 a, b , 定义 $a - b = a + (-b)$, 称 $a - b$ 为 a 与 b 之差.

显然, $c = a - b \Leftrightarrow a = b + c$, 由此得出 $a - b$ 的几何意义(如图 8-10 所示).

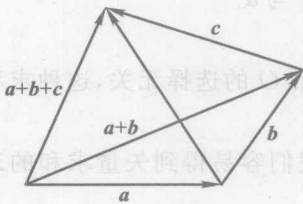


图 8-9

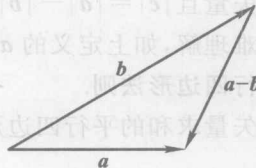


图 8-10

二、矢量的数乘

定义 3 给定数量 λ 与矢量 a , 定义 λ 与 a 的乘积为一矢量, 记作 λa , 其模为 $|\lambda| |a|$; 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同向; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 反向; 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda a = \mathbf{0}$.

以上定义的运算称为矢量的数乘. 矢量的加法、减法以及数乘运算合称为矢量的线性运算.

容易验证, 矢量数乘满足如下性质:

(iv) 结合律: $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a) = \mu(\lambda a)$.

(v) 分配律: $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$; $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

(vi) $1a = a$; $(-1)a = -a$; $0a = \mathbf{0}$.

分配律 $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ 的正确性可由图 8-11 看出.

任给非零矢量 a , 记 a^0 (或 e_a) 为与 a 同向的单位矢量, 显然有

$$a = |a|a^0 \quad \text{或} \quad a^0 = a/|a|. \quad (2)$$

公式 $a = |a|a^0$ 的意义很重要, 因为它同时表示了矢量 a 的两个要素: 模和方向.

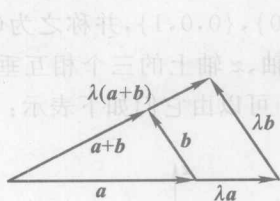


图 8-11

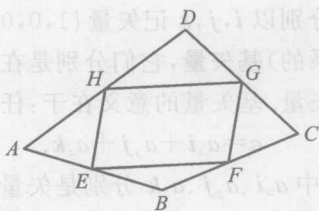


图 8-12

矢量的线性运算可用来解某些几何问题, 试看一个简单例子.

例 1 设 $ABCD$ 是一空间四边形, 四边中点依次为 E, F, G, H (图 8-12), 证明四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

证 为了证明边 EF 与 HG 平行且相等, 这相当于证 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$. 由定义 3 及题设条件有

$$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

于是

$$\vec{EF} = \vec{EB} + \vec{BF} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}\vec{AC}.$$

同理 $\vec{HG} = \frac{1}{2}\vec{AC}$, 因此 $\vec{EF} = \vec{HG}$, 同理可证 $\vec{EH} = \vec{FG}$. 所以四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

8.2.3 矢量的坐标

前面已经指出, 在空间坐标系 $Oxyz$ 中, 每个矢量 a 均有唯一确定的点 M 与之对应, 使得 $a = \vec{OM}$. 为了更好地描写矢量, 我们将点的坐标规定为矢量的坐标. 准确说来就是:

定义 4 任给点 $M(x, y, z)$, 设 $a = \vec{OM}$, 则称 x, y, z 为矢量 a (对给定坐标系) 的坐标, 记作 $a = \{x, y, z\}$.

为了方便起见, 对任给矢量 a , 有时将定义 4 中的 x, y, z 分别记成 a_x, a_y, a_z . 于是有坐标表示式

$$a = \{a_x, a_y, a_z\}. \quad (3)$$

分别以 i, j, k 记矢量 $\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}$, 并称之为 (给定坐标系的) 基矢量, 它们分别是在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的三个相互垂直的单位矢量. 基矢量的意义在于: 任一矢量 a 可以由它们如下表示:

$$a = a_x i + a_y j + a_z k. \quad (4)$$

式(4)中 $a_x i, a_y j, a_z k$ 分别是矢量 a 在 x, y, z 轴上的分矢量, 图 8-13 说明了式(4)的几何意义.

利用分解式(4)及矢量线性运算的性质(i)~(vi), 容易得出矢量线性运算的以下坐标表示式:

$$\begin{aligned} a \pm b &= \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}, \\ \lambda a &= \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}. \end{aligned} \quad (5)$$

公式(5)表明, 矢量的线性运算归结为其坐标的相应运算.

例 2 给定点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 与 $B(x_2, y_2, z_2)$, 求矢量 \vec{AB} 的坐标.

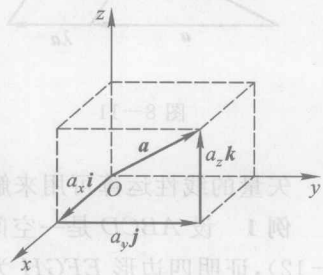


图 8-13

解 首先注意 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, 然后用公式(5)得

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2, y_2, z_2\} - \{x_1, y_1, z_1\} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

例3 设 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 为已知两点, 线段 AB 上的点 C 将 AB 分成有定比 $AC/CB = \lambda (\lambda \neq -1)$ 的两段, 求点 C 的坐标.

解 由定义4, 只需求矢量 \overrightarrow{OC} 的坐标. 因为 \overrightarrow{AC} 与 \overrightarrow{CB} 在一直线上(图8-14), 所以由题设有

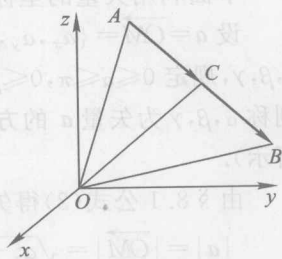


图8-14

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \lambda \overrightarrow{CB}, \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \lambda \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} = (1 + \lambda) \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

另一方面, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{CB}$, 于是

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OB} - \frac{1}{1 + \lambda} \overrightarrow{AB} \\ &= \{x_2, y_2, z_2\} - \left\{ \frac{x_2 - x_1}{1 + \lambda}, \frac{y_2 - y_1}{1 + \lambda}, \frac{z_2 - z_1}{1 + \lambda} \right\} \\ &= \left\{ \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right\}, \end{aligned}$$

所以点 C 的坐标为 $\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right)$, 这就是定比分点公式.

利用数乘与矢量的坐标, 可对“共线”这一几何关系给出一种代数刻画.

定理1 设 a, b 是两个非零矢量, 则 a 与 b 共线 \Leftrightarrow 存在实数 λ 使

$$a = \lambda b \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

证 若 a 与 b 共线, 则 $a^0 = \pm b^0$ (同向时取正号, 反向时取负号), 于是由式(2)有

$$a = |a| a^0 = \pm |a| b^0 = \pm (|a|/|b|) b = \lambda b,$$

其中 $\lambda = \pm (|a|/|b|)$. 反之, 若 $a = \lambda b$, 则直接由定义3看出 a 与 b 共线. 其次, 借助于公式(5)易见 $a = \lambda b \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$. \square