大学数学系列教材

微积分学（第三版）

（下册）

华中科技大学数学系

高等教育出版社
Higher Education Press

大学数学系列教材

微积分学

（第三版）（下册）

华中科技大学数学系

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是在高等教育出版社2002年出版的《微积分学(修订版)》(下册,华中科技大学数学系编)的基础上,广泛吸取校内外教师的意见后修订而成的。全书分上、下两册出版。下册主要内容有:矢量代数与空间解析几何,多元函数微分学,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数,并且在书的最后提供了习题答案及人名与名词索引。

本着"通用、简明、便利、易读"的方针,本书对传统的微积分(即高等数学)课程的教学内容,采取精简、集中、类比、偏重、优化等一系列有效措施,设计成一个内容简明易懂、数学思想清晰、重点难点突出、注重应用能力培养的教学体系;实践证明这种处理方式能在有限的课时内提高教学效率,使学生能更快更好地理解与掌握微积分学知识。

本书适用于一般高等院校理工类各专业学生作为微积分学教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分学.下册/华中科技大学数学系.—3版.
—北京:高等教育出版社,2008.6
ISBN 978-7-04-023880-8

Ⅰ.微… Ⅱ.华… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第071672号

策划编辑 宋瑞才 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 张志奇
责任绘图 黄建英 **版式设计** 张 岚 **责任校对** 金 辉
责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印 刷	高等教育出版社印刷厂		
		版 次	1997年8月第1版
开 本	880×1230 1/32		2008年6月第3版
印 张	9.25	印 次	2008年6月第1次印刷
字 数	260 000	定 价	16.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 23880-00

郑重声明

目　　录

第八章

矢量代数与空间解析几何

本书上册所介绍的"一元函数微积分学",是建立在平面解析几何的基础上.本书下册转向"多元函数微积分学"的讨论,为此,空间解析几何的知识是不可缺少的.鉴于矢量用于表达几何与分析概念都具有特殊的便利,而且已成为现代科学中的通用工具,本章着重介绍矢量代数的基本内容,并且将其应用于空间解析几何问题的研究.

§8.1 空间直角坐标系

空间解析几何的出发点,是建立空间中的点与三元有序数组之间的联系,这主要通过引进空间直角坐标系来实现.

在空间中取定点 O,过点 O 作三条相互垂直的数轴:x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)与 z 轴(竖轴),它们统称为坐标轴,称点 O 为坐标原点.规定 x 轴、y 轴与 z 轴的正向构成**右手系**(当右手握拳的方向是从 x 轴的正向到 y 轴的正向时,右手大拇指的指向是 z 轴的正向),如图 8—1 所示.将这样的空间直角坐标系记作 $Oxyz$.

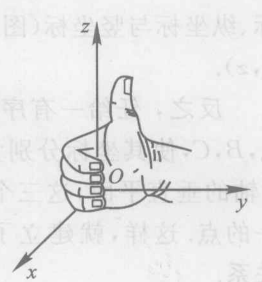

图 8—1

以下总假定已取定空间直角坐标系 $Oxyz$.

由 x 轴、y 轴确定的平面称为 xy 坐标平面,简称 xy 平面;yz 平面与 zx 平面的意义仿此.三坐标平面两两相互垂直,且将空间分成八个部分,每个部分称为**卦限**.位于 xy 平面上的一、二、三、四象限上方(假定 z 轴朝上)的四个卦限依次称为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限,与之相对的 xy

平面下方的四个卦限依次称为Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限，如图 8－2 所示.

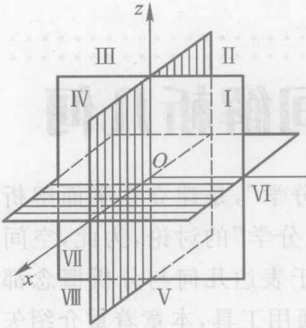

图 8－2

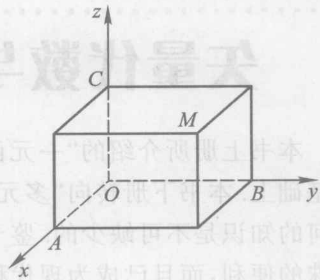

图 8－3

任给空间一点 M，过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴与 z 轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 A、B、C，这三点在各坐标轴上的坐标分别为 x,y,z. 这样，点 M 唯一确定了一个三元有序数组 (x,y,z)，称之为点 M 在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标，依次称 x,y,z 为 M 的横坐标、纵坐标与竖坐标（图 8－3）. 将点 M 记为 $M(x,y,z)$，或简写为 (x,y,z).

反之，任给一有序数组 (x,y,z)，在 x 轴、y 轴与 z 轴上分别取点 A,B,C，使其坐标分别为 x,y,z，然后通过 A,B,C 分别作 x 轴、y 轴、z 轴的垂直平面，这三个平面的交点 M 就是以 (x,y,z) 为其坐标的唯一的点. 这样，就建立了空间的点与三元有序数组之间的一一对应关系.

坐标面与坐标轴上的点，其坐标各有一定特征. 例如，xy 平面上的点的坐标形如 $(x,y,0)$；x 轴上的点的坐标形如 $(x,0,0)$. 原点的坐标为 $(0,0,0)$.

给定点 $M(x,y,z)$，点 M 关于 xy 平面的对称点为 $(x,y,-z)$；点 M 关于 x 轴的对称点为 $(x,-y,-z)$；点 M 关于原点的对称点为 $(-x,-y,-z)$. 点 M 在 xy 平面上的投影为点 $(x,y,0)$；点 M 在 x

轴上的投影为点$(x,0,0)$(一点在一平面(直线)上的投影是由该点向该平面(直线)所引垂线之垂足).其余情况类推.

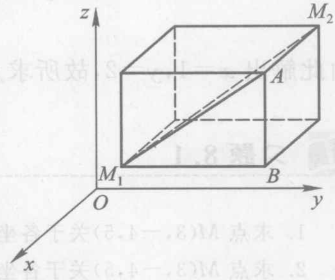

图 8—4

给定两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$与$M_2(x_2,y_2,z_2)$,以d记此两点之间的距离,即$d=|M_1M_2|$,现推出d的计算公式.过M_1、M_2各作三个分别垂直于三坐标轴的平面,这六个平面围成一个以M_1M_2为对角线的长方体(图 8—4).分别对直角三角形M_1AM_2与M_1BA用勾股定理得

$$d^2=|AM_2|^2+|M_1A|^2=|AM_2|^2+|M_1B|^2+|BA|^2.$$

因

$$|AM_2|=|x_2-x_1|,|M_1B|=|y_2-y_1|,|BA|=|z_2-z_1|,$$

故得

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1}$$

特别地,点$M(x,y,z)$与原点$O(0,0,0)$之间的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{2}$$

例 1 试证以点$A(4,1,9)$,$B(10,-1,6)$与$C(2,4,3)$为顶点的三角形为等腰直角三角形.

证 依公式(1)有

$$|AB|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49;$$
$$|BC|^2=(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2=98;$$
$$|CA|^2=(4-2)^2+(1-4)^2+(9-3)^2=49.$$

可见$|AB|=|CA|$,$|AB|^2+|CA|^2=|BC|^2$,这表明$\triangle ABC$是等腰直角三角形.

例 2 在xy平面上求一点M,使M与点$A(1,2,1)$,$B(2,2,0)$,$C(1,3,0)$的距离相等.

解 设M的坐标为$(x,y,0)$,则等式$|MA|=|MB|=|MC|$相

当于

$$(x-1)^2+(y-2)^2+1=(x-2)^2+(y-2)^2$$
$$=(x-1)^2+(y-3)^2.$$

由此解出 $x=1,y=2$，故所求点为 $M(1,2,0)$.

习题 8.1

1. 求点 $M(3,-4,5)$关于各坐标面的对称点的坐标.
2. 求点 $M(3,-4,5)$关于各坐标轴的对称点的坐标.
3. 求点 $A(4,-3,5)$到坐标原点及各坐标轴的距离.
4. 在 z 轴上求一点，使它到点 $M(-4,1,7)$和 $N(3,5,-2)$的距离相等.
5. 在 yz 面上求一点，使它到点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$和$C(0,5,1)$的距离相等.

§8.2 矢量及其线性运算

8.2.1 矢量概念

在物理学以及其他应用科学中有两类性质的量. 一类量只有大小没有方向，如质量、距离、温度、角速度等；另一类量既有大小又有方向，如力、速度、位移、力矩等. 前一类量称为**数量**(也叫**纯量**或者**标量**)；后一类量称为**矢量**(也叫**向量**)，这种“有方向的量”广泛出现在各个领域，其重要性并不亚于数量.

在数学上，常用有向线段来表示矢量. 对空间中任意两点 A,B，称从起点 A 到终点 B 的有向线段为一个矢量，记作$\overrightarrow{AB}$，或记为单个黑体字母 $\boldsymbol{a}$(图 8—5). 箭头所指方向为矢量的方向；称线段 AB 的长度为矢量$\overrightarrow{AB}$的模，记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$；若矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模为零，则称 $\boldsymbol{a}$ 为零矢量(可认为零矢量的方向是任意的)，记作 $\mathbf{0}$；若矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 1，则称其为

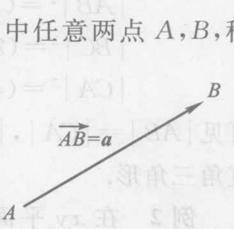

图 8—5

单位矢量；称矢量$\overrightarrow{BA}$为矢量$\overrightarrow{AB}$的负矢量，写作$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

给定矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{a}$ 经平行移动后可与 $\boldsymbol{b}$ 重合（即起点与起点重合，终点与终点重合），则规定 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 在这个意义上，矢量并无固定的起点，因此称为**自由矢量**，有时为了讨论问题方便，需将矢量的起点固定，固定了起点的矢量称为**固定矢量**. 本书中所研究的矢量皆为自由矢量.

任给矢量 $\boldsymbol{a}$，必有唯一点 M，使得 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$（$O$ 是坐标原点）. 反之，任给空间中一点 M，M 确定唯一矢量$\overrightarrow{OM}$，称为点 M 的**矢径**. 这样，通过点 M 与矢量$\overrightarrow{OM}$的对应，得到空间中点的全体与矢量的全体之间的一一对应. 这种对应对于矢量的研究与应用非常重要.

给定矢量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，若 O,A,B 三点共线，则说矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线（或平行），且当 A,B 在点 O 之同侧时，则说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向；当 A,B 在点 O 之异侧时，则说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向. 注意零矢量与任何矢量共线.

8.2.2　矢量的线性运算

一、矢量的加法和减法

力或速度的合成是依“平行四边形法则”施行的，矢量的加法是这类合成的一种抽象.

定义 1　给定矢量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则以 OA，OB 为邻边作平行四边形 $OACB$（图 8－6），称矢量 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$为矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线且同向，则规定 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是一个与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向的矢量，且 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线但反向且 $|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$，则规定 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是一个与 $\boldsymbol{a}$ 同向的矢量且 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$.

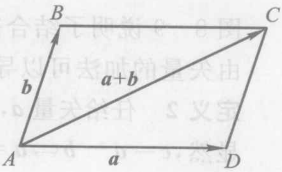

图 8－6

不难理解，如上定义的 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与原点 O 的选择无关，这种求和法则称为**平行四边形法则**.

由矢量求和的平行四边形法则，我们容易得到矢量求和的**三角形法则**：

将矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 首尾相接，则由起点到终点的矢量 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$为矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$

的和(图 8—7),即

$$c=a+b.$$

进一步,三角形法则可推广为如下的矢量求和的**多边形法则**(图 8—8):

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\cdots+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}. \quad (1)$$

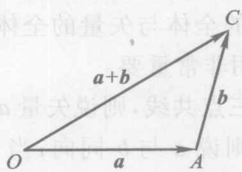

图 8—7

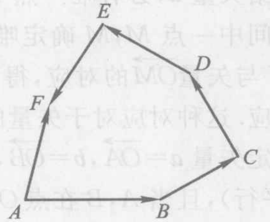

图 8—8

容易验证,矢量加法满足如下性质:

(i) 交换律:$a+b=b+a$.

(ii) 结合律:$(a+b)+c=a+(b+c)$.

(iii) $a+0=a, a+(-a)=0$.

图 8—9 说明了结合律的正确性.

由矢量的加法可以导出矢量的减法:

定义 2 任给矢量 a,b,定义 $a-b=a+(-b)$,称 $a-b$ 为 a 与 b 之差.

显然,$c=a-b \Leftrightarrow a=b+c$,由此得出 $a-b$ 的几何意义(如图 8—10 所示).

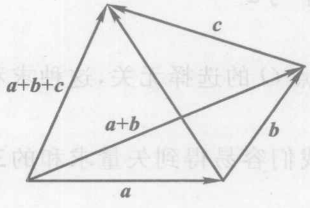

图 8—9

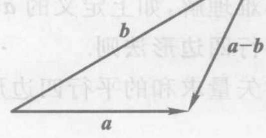

图 8—10

二、矢量的数乘

定义 3 给定数量 λ 与矢量 $\boldsymbol{a}$，定义 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积为一矢量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，其模为 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$；当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

以上定义的运算称为**矢量的数乘**. 矢量的加法、减法以及数乘运算合称为矢量的**线性运算**.

容易验证，矢量数乘满足如下性质：

(iv) 结合律：$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$.

(v) 分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

(vi) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$；$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 的正确性可由图 8—11 看出.

任给非零矢量 $\boldsymbol{a}$，记 $\boldsymbol{a}^0$（或 $\boldsymbol{e}_a$）为与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位矢量，显然有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 \quad \text{或} \quad \boldsymbol{a}^0=\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|. \tag{2}$$

公式 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$ 的意义很重要，因为它同时表示了矢量 $\boldsymbol{a}$ 的两个要素：模和方向.

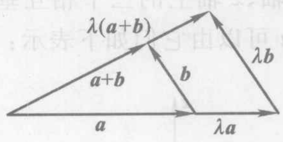

图 8—11

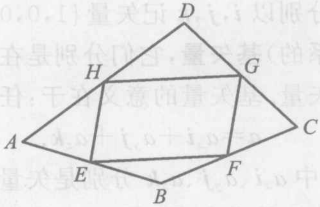

图 8—12

矢量的线性运算可用来解某些几何问题，试看一个简单例子.

例 1 设 $ABCD$ 是一空间四边形，四边中点依次为 E,F,G,H（图 8—12），证明四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

证 为了证明边 EF 与 HG 平行且相等，这相当于证 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$. 由定义 3 及题设条件有

$$\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

于是

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

同理$\overrightarrow{HG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，因此$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$，同理可证$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{FG}$. 所以四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

8.2.3 矢量的坐标

前面已经指出，在空间坐标系 $Oxyz$ 中，每个矢量 $\boldsymbol{a}$ 均有唯一确定的点 M 与之对应，使得 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$. 为了更好地描写矢量，我们将点的坐标规定为矢量的坐标. 准确说来就是：

定义 4 任给点 $M(x,y,z)$，设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$，则称 x,y,z 为矢量 $\boldsymbol{a}$（对给定坐标系）的坐标，记作 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$.

为了方便起见，对任给矢量 $\boldsymbol{a}$，有时将定义 4 中的 x,y,z 分别记成 a_x,a_y,a_z. 于是有坐标表示式

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}. \tag{3}$$

分别以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 记矢量$\{1,0,0\}$，$\{0,1,0\}$，$\{0,0,1\}$，并称之为（给定坐标系的）**基矢量**，它们分别是在 x 轴、y 轴、z 轴上的三个相互垂直的单位矢量. 基矢量的意义在于：任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以由它们如下表示：

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

式(4)中 $a_x\boldsymbol{i}$、$a_y\boldsymbol{j}$、$a_z\boldsymbol{k}$ 分别是矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 x、y、z 轴上的分矢量，图 8－13 说明了式(4)的几何意义.

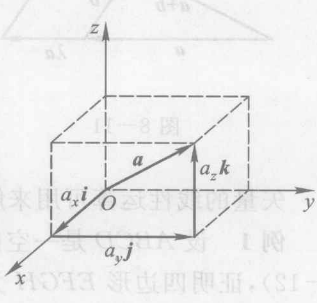

图 8－13

利用分解式(4)及矢量线性运算的性质(i)～(vi)，容易得出矢量线性运算的以下坐标表示式：

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\},$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}. \tag{5}$$

公式(5)表明，矢量的线性运算归结为其坐标的相应运算.

例 2 给定点 $A(x_1,y_1,z_1)$与 $B(x_2,y_2,z_2)$，求矢量$\overrightarrow{AB}$的坐标.

解 首先注意$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，然后用公式(5)得

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2,y_2,z_2\}-\{x_1,y_1,z_1\}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.$$

例 3 设 $A(x_1,y_1,z_1)$和 $B(x_2,y_2,z_2)$为已知两点，线段 AB 上的点 C 将 AB 分成有定比 $AC/CB=\lambda(\lambda\neq-1)$的两段，求点 C 的坐标.

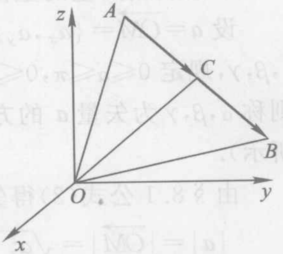

图 8－14

解 由定义 4，只需求矢量$\overrightarrow{OC}$的坐标.因为$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{CB}$在一直线上(图 8－14)，所以由题设有

$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB},$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\lambda\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}=(1+\lambda)\overrightarrow{CB}.$$

另一方面，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{CB}$，于是

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}$$

$$=\{x_2,y_2,z_2\}-\left\{\frac{x_2-x_1}{1+\lambda},\frac{y_2-y_1}{1+\lambda},\frac{z_2-z_1}{1+\lambda}\right\}$$

$$=\left\{\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right\},$$

所以点 C 的坐标为$\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$，这就是**定比分点公式**.

利用数乘与矢量的坐标，可对“共线”这一几何关系给出一种代数刻画.

定理 1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零矢量，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线$\Leftrightarrow$存在实数 λ 使

$$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

证 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}^0=\pm\boldsymbol{b}^0$(同向时取正号，反向时取负号)，于是由式(2)有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0=\pm|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}^0=\pm(|\boldsymbol{a}|/|\boldsymbol{b}|)\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{b},$$

其中 $\lambda=\pm(|\boldsymbol{a}|/|\boldsymbol{b}|)$. 反之，若 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则直接由定义 3 看出 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线. 其次，借助于公式(5)易见 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=\lambda$. □