高职高专“十一五”规划教材

应用数学基础

孙 妍 王 芳 主编

化学工业出版社

高职高专“十一五”规划教材

应用数学基础

孙 妍 王 芳 主 编
马刚英 苗 慧 副主编

化学工业出版社
·北京·

本书是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写的。全书始终贯彻"以应用为目的、以够用为度"的精神，在编排上注重突出数学课程循序渐进、由浅入深的特点。

本书主要内容有：函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分与定积分、常微分方程、拉普拉斯变换、无穷级数、空间向量与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、线性代数初步、概率论与数理统计。

本书可作为高职高专工科及经济类专业基础课教材，也可作为成人教育或专升本教材。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础/孙妍，王芳主编．—北京：化学工业出版社，2008.7

高职高专"十一五"规划教材

ISBN 978-7-122-03364-2

Ⅰ．应…　Ⅱ．①孙…②王…　Ⅲ．应用数学-高等学校：技术学院-教材　Ⅳ．O29

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第107778号

责任编辑：于　卉　陆雄鹰　　　文字编辑：昝景岩

责任校对：顾淑云　　　装帧设计：关　飞

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm　1/16　印张23　字数601千字　2008年9月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：39.80元

前　言

随着高等职业技术教育的发展，教学过程中需要适合高等教育特点，突出“以应用为目的，以够用为度”的原则，加强对学生应用意识及兴趣能力的培养，开发学生的数学思维的高等数学教材。为此，我们根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写了这本教材。

本书的编写原则是注重实际应用，注意淡化数学理论推导，强化数学实践能力培养。内容选取以必需、够用为度；处理方法尽量做到立意创新。内容编排按照由浅入深、由易到难、由具体到抽象，循序渐进的原则进行。力求做到概念清楚，条理清晰，便于读者理解和掌握，同时也注意对读者基本运算能力的培养。

本书具有以下特点：

1. 本书采用模块式编写，因而适用面比较宽，各校可以根据学生特点和专业需要选取若干模块组织教学。

2. 本书以强化数学知识的应用为目的，将有重要应用的“元素法”贯穿于微分学、积分学和微分方程之中。对于极限问题，只要求读者掌握极限的思想方法，并将极限作为工具运用于整个微积分学之中。因此，这部分内容大都采用直观描述的方法。希望读者能够应用极限的思想，研究工程技术上的实际问题。

3. 为了加强应用意识，对欲讨论的问题，多数以生产、生活中的实例引入，展示数学应用的广泛性，也使读者初步掌握建立数学模型的方法。

4. 线性代数一般说来是比较抽象的。本书采用比较直观的方法定义高阶行列式，讨论矩阵的逆和秩、线性方程组的解法，使得这部分内容易学易记易理解，便于读者掌握。

参加本书编写的有：洪欢（第一章）、苗慧（第二章）、王芳（第三、五、九、十章）、王欣阵（第四章）、孙妍（第六、七、八、十二章）、黄孙琴（第十一章）、马刚英（第十二章）。本书由孙妍、王芳任主编，马刚英、苗慧任副主编。

在本书的编写过程中，得到了浙江长征职业技术学院领导和基础部刘东主任的大力支持以及高等数学教研室主任丁士荣老师的帮助，得到了化学工业出版社的热情关怀与指导，在此一并致谢。

由于编者水平所限，加之时间仓促，书中不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2008 年 5 月

目　录

第 1 章　函数　极限　连续

初等数学的研究对象基本上是不变的量，其方法是加、减、乘、除；而高等数学则以变量和函数为研究对象，主要研究方法是极限的方法．本章将主要介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质．

1.1　函数

1.1.1　函数的概念与分段函数

1.1.1.1　函数的概念

（1）常量与变量

我们在观察各种自然现象或研究实际问题的时候，常常会遇到各种不同的量，这些量一般可分为两种：有一些量在我们所考察的过程中不发生变化，也就是保持一定的数值，这种量称为常量；还有一些量在这一过程中会发生变化，也就是可以取不同的数值，这种量称为变量．比如，自由落体的下降时间和下降距离是变量，而落体的质量是常量．

注：一个量是常量还是变量依赖于所考察的过程．比如，一个学生所在班级的学生数量，在本学期内一般是常量，而从长远来看，则是变量．

通常用字母 a,b,c 表示常量，用字母 x,y,z 表示变量．变量的变化范围叫做变量的变动区域，有一类变量可以取介于两个实数之间的任意实数，称为连续变量，连续变量的变动区域常用区间表示．

为了便于以后的学习，我们引入一种特殊的区间——邻域的概念．

定义 1.1.1　以 a 为中心的任一开区间称为点 a 的 δ 邻域．如，当 $\delta>0$ 时，$(a-\delta,a+\delta)$ 就是 a 的一个邻域，称为 a 的 δ 邻域，记为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}$$

点 a 称为这个邻域的中心，δ 称为这个邻域的半径，如图 1-1-1.

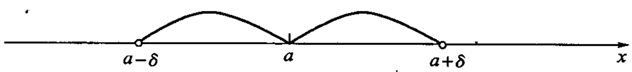

图 1-1-1

除去 a 的 δ 邻域的中心 a，称为 a 的去心 δ 邻域，如图 1-1-2，记为 $\hat{U}(a,\delta)$，即

$$\hat{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$$

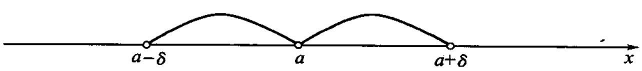

图 1-1-2

集合$\{x|0<x-a<\delta\}$称为a的δ右邻域，集合$\{x|-\delta<x-a<0\}$称为a的δ左邻域.

(2) 函数的概念

在同一现象所碰到的各种变量中，通常并不都是独立变化的，它们之间存在着依赖关系. 我们考察几个具体例子.

【例 1】 自由落体运动

设落体下落的时间为t，下降距离为s. 根据自由落体公式得

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中g为重力加速度. 这个公式指出了自由落体运动中，落体的下降距离s和时间t的依赖关系.

假定物体着地的时刻为$t=T$，那么当t取$[0,T]$上任一值时，由上式就可以确定下降距离s的相应数值.

【例 2】 生产某种产品的固定成本为3000元，每生产一件产品，成本增加60元，那么该种产品的总成本C和产量Q的关系可由下式给出：

$$C=3000+60Q$$

当产量Q取任何一个合理值时，总成本C有确定的数值与之对应.

在上面两个例子中，我们抽去所考虑的量的实际意义，可以发现它们都表达了两个变量之间的相依关系，根据这种相依关系，当其中一个变量取其变化范围内任一数值时，另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.1.2 设x和y是两个变量，当变量x在非空数集D内任取一数值时，变量y依照某一规则f总有一个确定的数值与之对应，则称变量y为变量x的函数，记作$y=f(x)$.

这里，x称为自变量，y称为因变量或函数. 集合D称为函数的定义域，相应的y值的集合则称为函数的值域. f是函数符号，它表示y与x的对应规则.

注：① 记号f和$f(x)$的含义是有区别的，前者表示自变量x和因变量y之间的对应法则，而后者表示与自变量x对应的函数值. 但为了叙述方便，习惯上常用记号“$f(x)$，$x\in D$”或“$y=f(x)$，$x\in D$”来表示定义在D上的函数，这时应理解为由它所确定的函数f.

② 函数$y=f(x)$中表示对应关系的记号f也可改用其他字母，例如“F”、“φ”等. 此时函数就记作$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$.

③ 函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定，如例1中定义域就是$[0,T]$，而例2中定义域为$D=\{n|n\in Z,n\geqslant 0\}$；另一种是抽去函数的事件背景，而只研究函数表达式，其定义域就是使表达式有意义的一切函数.

【例 3】 求下列函数的定义域

(1) $f(x)=\dfrac{3}{5x^2+2x}$；

(2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$；

(3) $f(x)=\lg(4x-3)$；

(4) $f(x)=\arcsin(2x-3)$；

(5) $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$.

解 (1) 在分式$\dfrac{3}{5x^2+2x}$中，分母不能为零，所以$5x^2+2x\neq 0$，解得$x\neq-\dfrac{2}{5}$，且$x\neq 0$，即定义域为$\left(-\infty,-\dfrac{2}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{5},0\right)\cup(0,+\infty)$.

(2) 在偶次根式中，被开方式必须大于等于零，所以有 $9-x^2 \geqslant 0$，解得 $-3\leqslant x\leqslant 3$，又因为分母不能为零，所以 $-3<x<3$，即定义域为 $(-3,3)$.

(3) 在对数式中，真数必须大于零，所以有 $4x-3>0$，解得 $x>\frac{3}{4}$，即定义域为 $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$.

(4) 反正弦或反余弦函数中式子的绝对值必须小于等于1，所以 $-1\leqslant 2x-3\leqslant 1$，解得 $1\leqslant x\leqslant 2$，即定义域为 $[1,2]$.

(5) 该函数为偶次根式和对数式的代数和，此时函数的定义域应为这两部分定义域的交集，即为满足不等式组

$$\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant 0\\ x-2>0\end{cases}$$

的 x 值的全体．解此不等式组，得其定义域为 $(2,3]$.

当自变量 x 在其定义域内取定某确定值 x_0 时，因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$ 求出的对应值 y_0 叫做当 $x=x_0$ 时的函数值，记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

【例 4】 已知 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，求：$f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(-x)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$，$f(x+1)$，$f(x^2)$.

解 $f(0)=\frac{1-0}{1+0}=1$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$，

$$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x}，f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1},$$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{-x}{2+x}，f(x^2)=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

从函数的定义可以看出，构成函数的要素是定义域 D 及对应法则 f．如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的．

【例 5】 研究 $y=x$ 与 $y=\frac{x^2}{x}$ 是否为同一函数．

解 $y=x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而 $y=\frac{x^2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 因此，虽然这两个函数在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的值是相同的，但由于它们的定义域不同，因而不是同一函数．

【例 6】 研究 $y=|1-x|$ 与 $y=\sqrt{(1-x)^2}$ 是否为同一函数．

解 $y=|1-x|$ 与 $y=\sqrt{(1-x)^2}$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，并且对于 $(-\infty,+\infty)$ 中的任意一个 x，对应的函数值都相等，因此两者是同一函数．

常用的函数表示法有解析法（又称公式法）、表格法和图形法，现用下面三个例子说明．

① $y=\frac{\sqrt{3-x^2}}{(x-1)(x-2)}$.

这是一个用解析法表示的函数．这个函数的定义域是 $(-\sqrt{3},1)\cup(1,\sqrt{3})$. 在这个集合中的每一个 x，都可以通过公式计算得到函数 y 的相应值.

② 某商店一年中各月份毛线的销售量（单位：10^2kg）的关系如表 1-1-1 所示．

表 1-1-1

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量 y	82	91	45	45	9	6	7	15	84	161	145	123

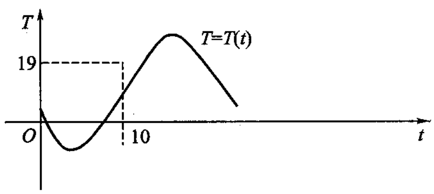

图 1-1-3

这是用表格表示的函数．当自变量 x 取 1～12 之间的任一整数时，从表格中可以找到 y 的对应值．

③ 图 1-1-3 是气象站用自动温度记录仪记录下来的某地一昼夜气温变化曲线．

这是用图形表示的函数．气温 T 和时间 t 的函数关系是由曲线给出的，当 t 取 0～24 中的任意一个数时，在曲线上都能找到确定的 T 与之对应．如，当 $t=10$ 时，气温 $T=19$℃．

1.1.1.2 分段函数

把定义域分为若干部分，每一部分表达式不同的函数称为分段函数．例如绝对值函数可以表示成

$$y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

这就是一个分段函数．

【例 7】 设函数

$$y=f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>0 \\ 2 & x=0 \\ 3x & x<0 \end{cases}$$

当 x 取$(0,+\infty)$内的值时，y 的值由表达式 $y=x^2+1$ 来计算；当 $x=0$ 时，$y=2$；当 x 取$(-\infty,0)$内的值时，y 的值由表达式 $y=3x$ 来计算．如 $f(2)=2^2+1=5$，$f(-1)=3\times(-1)=-3$，如图 1-1-4 所示．

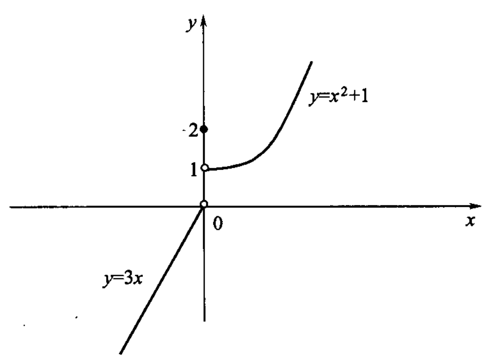

图 1-1-4

【例 8】 设函数 $f(x)=\begin{cases} \cos x & -4\leqslant x<2 \\ 1 & 2\leqslant x<3 \\ 4x+1 & x\geqslant 3 \end{cases}$

求 $f(-\pi)$，$f(2)$，$f(3.5)$及函数的定义域．

解 因为$-\pi\in[-4,2)$，所以 $f(-\pi)=\cos(-\pi)=-1$；

因为 $2\in[2,3)$，所以 $f(2)=1$；

因为 $3.5\in[3,+\infty)$，所以 $f(3.5)=4\times 3.5+1=15$；

函数 $f(x)$的定义域为$[-4,+\infty)$.

1.1.2 函数的几种特性

(1) 函数的单调性

定义 1.1.3 设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，如果对于(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$时，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$在(a,b)内是单调增加（或单调减少）的．

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数．如图 1-1-5 和图 1-1-6 所示．

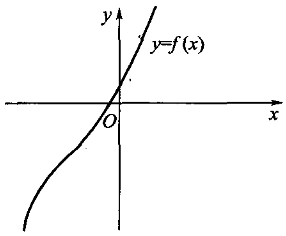

图 1-1-5

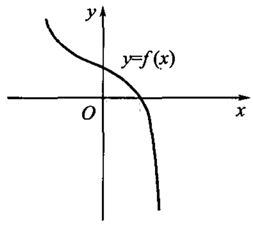

图 1-1-6

【例 9】 验证函数 $y=x-2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的．

证 在区间$(-\infty,+\infty)$内任取两点 $x_1<x_2$，于是
$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-2)-(x_2-2)=x_1-x_2<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $y=x-2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的．

(2) 函数的奇偶性

定义 1.1.4 设函数 $y=f(x)$在集合 D 上有定义，如果对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$ [或 $f(-x)=-f(x)$]，则称 $f(x)$为偶函数（或奇函数）.

由定义可知，对任意的 $x\in D$，必有$-x\in D$，否则，$f(-x)$没有意义．因此函数具有奇偶性时，其定义域必定是关于原点对称的．

偶函数的图形是关于 y 轴对称的，如图 1-1-7；奇函数的图形是关于原点对称的，如图 1-1-8.

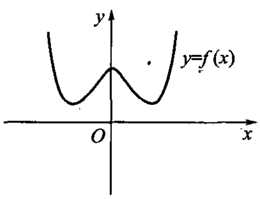

图 1-1-7

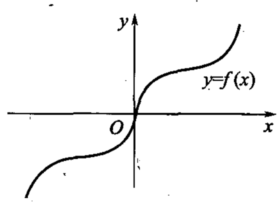

图 1-1-8

【例 10】 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=3x^4-5x^2+7$；

(2) $f(x)=2x^2+\sin x$；

(3) $f(x)=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^x)$ $(a>0,a\neq1)$.

解 (1) 因为
$$f(-x)=3(-x)^4-5(-x)^2+7=3x^4-5x^2+7=f(x)$$
所以 $f(x)=3x^4-5x^2+7$ 是偶函数．

(2) 因为 $f(-x)=2(-x)^2+\sin(-x)=2x^2-\sin x\neq f(x)$，
同样可以得到 $f(-x)\neq-f(x)$，所以 $f(x)=2x^2+\sin x$ 既非奇函数，也非偶函数．

(3) 因为
$$f(-x)=\frac{1}{2}(a^{-(-x)}-a^{-x})=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})$$
$$=-\frac{1}{2}(a^{-x}-a^x)=-f(x)$$

所以 $f(x)=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^{x})$是奇函数.

(3) 函数的周期性

定义 1.1.5 对于函数 $y=f(x)$，如果存在非零常数 T，使 $f(x)=f(x+T)$恒成立，则称此函数为周期函数. T 称为周期.

若 T 为函数 $y=f(x)$的周期，则 $kT(k\in Z)$也是函数 $y=f(x)$的周期. 我们把满足 $f(x)=f(x+T)$的最小正数 T_0 称为最小正周期.

如正弦函数 $y=\sin x$，2π 就是它的一个周期，因此，4π 和 -4π 都是它的周期，而 2π 是它的最小正周期.

(4) 函数的有界性

定义 1.1.6 设函数 $y=f(x)$在集合 D 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在 D 上是有界的. 如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$在 D 上是无界的.

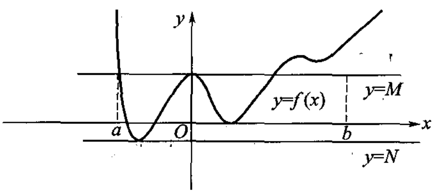

图 1-1-9

如图 1-1-9，函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有界的几何意义是：曲线 $y=f(x)$在区间(a,b)内被限制在两条平行于 x 轴的直线之间.

注：① 当一个函数 $y=f(x)$在 D 上有界时，正数 M 的取法是不唯一的. 如 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的，$|\sin x|\leqslant 1$，但也可以取 $M=2$，即 $|\sin x|<2$. 事实上，M 可以取大于等于 1 的一切实数.

② 有界性依赖于区间. 如函数 $f(x)=\frac{1}{x}$在区间 $(1,2)$ 内是有界的，而在开区间 $(0,1)$ 内是无上界的.

1.1.3 反函数

定义 1.1.7 设 $y=f(x)$是 x 的函数，其值域为 R，如果对于 R 中的每一个 y 值，都有一个确定的且满足 $y=f(x)$的 x 值与之对应，则得到一个定义在 R 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，我们称它为 $y=f(x)$的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$. 并称 $y=f(x)$为直接函数.

当然，如果 $x=f^{-1}(y)$是 $y=f(x)$的反函数，那么 $y=f(x)$也是 $x=f^{-1}(y)$的反函数，换句话说，它们是互为反函数的. 习惯上，总是用 x 表示自变量，而用 y 表示因变量，所以通常把 $x=f^{-1}(y)$改写为 $y=f^{-1}(x)$.

求反函数的过程可以分为两步：第一步从 $y=f(x)$解出 $x=f^{-1}(y)$；第二步交换字母 x 和 y.

【例 11】 求 $y=4x-1$ 的反函数.

解 由 $y=4x-1$ 得到 $x=\frac{y+1}{4}$，然后交换 x 和 y，得 $y=\frac{x+1}{4}$. 即 $y=\frac{x+1}{4}$是 $y=4x-1$ 的反函数.

函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称. 例 11 中的一对反函数的图形如图 1-1-10 所示.

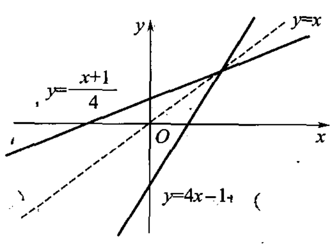

图 1-1-10

1.1.4 复合函数和初等函数

在中学里，我们已经学过六类基本初等函数，在这里，我们将系统地将它们列出来，并由此来定义复合函数和初等函数.

1.1.4.1 基本初等函数

(1) 常数函数 $y=c$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，它的图形是过点$(0,c)$平行于 x 轴的一条直线．它是偶函数．如图 1-1-11.

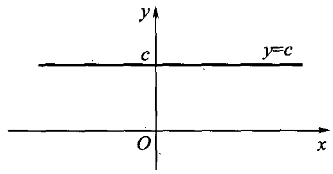

图 1-1-11

(2) 幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数）

幂函数的情况比较复杂，为了便于比较，我们只讨论 $x\geqslant 0$ 的情形．$x<0$ 的情形可以在具体问题中由奇偶性得出．

当 $\alpha>0$ 时，函数的图形通过原点$(0,0)$和点$(1,1)$，在$(0,+\infty)$内单调增加且无界，如图 1-1-12.

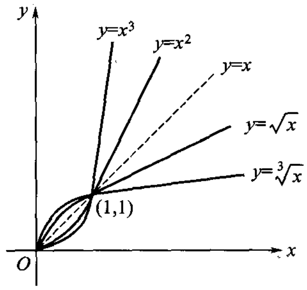

图 1-1-12

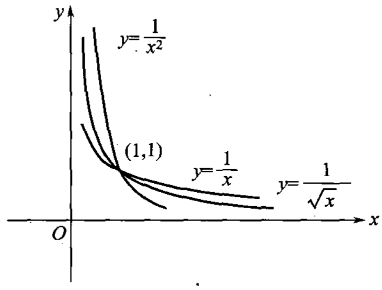

图 1-1-13

当 $\alpha<0$ 时，图形不过原点，但仍通过点$(1,1)$，在$(0,+\infty)$内单调减少且无界，曲线以 x 轴和 y 轴为渐近线，如图 1-1-13.

(3) 指数函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，它的图形全部在 x 轴上方，且通过点$(0,1)$.

当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界，曲线以 x 轴负半轴为渐近线；

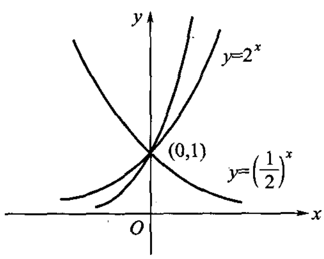

图 1-1-14

当 $0<a<1$ 时，函数单调减少且无界，曲线以 x 轴正半轴为渐近线，如图 1-1-14.

读者要特别注意指数函数和幂函数的区别：在幂函数中，自变量 x 在底数位置，指数是常数；而在指数函数中，自变量 x 在指数位置，底数是常数．

(4) 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$

它的定义域是$(0,+\infty)$，图形全部在 y 轴右方，值域是$(-\infty,+\infty)$．无论 a 取何值，曲线都通过点$(1,0)$.

当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界，曲线以 y 轴负半轴为渐近线；

当 $0<a<1$ 时，函数单调减少且无界，曲线以 y 轴正半轴为渐近线，如图 1-1-15.

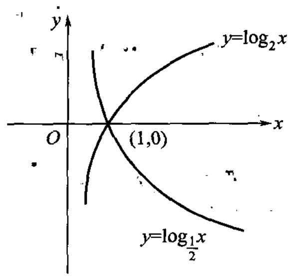

图 1-1-15

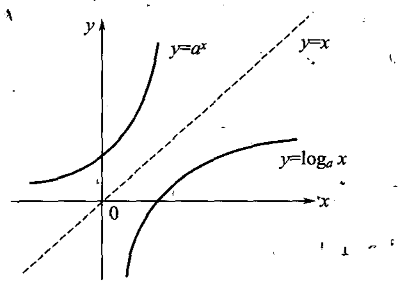

图 1-1-16

对数函数 $y=\log_a x$ 和指数函数 $y=a^x$ 互为反函数，它们的图形关于 $y=x$ 对称，如图 1-1-16.

以无理数 e=2.718 281 8…为底的对数函数 $y=\log_e x$ 叫做自然对数函数，简记作 $y=\ln x$.

(5) 三角函数

在微积分中，三角函数的自变量 x 采用弧度制，角度和弧度之间的关系可利用公式

$$\pi \text{ 弧度}=180°$$

来换算.

函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，奇函数，以 2π 为周期，有界. 如图 1-1-17.

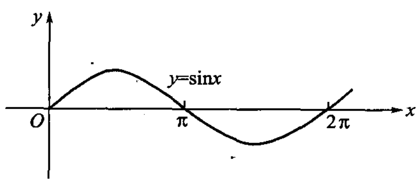

图 1-1-17

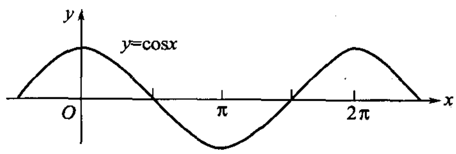

图 1-1-18

函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，偶函数，以 2π 为周期，有界. 如图 1-1-18.

函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，奇函数，以 π 为周期，在每一个连续区间内单调增加，以直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为渐近线. 如图 1-1-19.

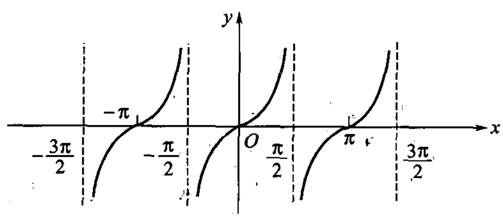

图 1-1-19

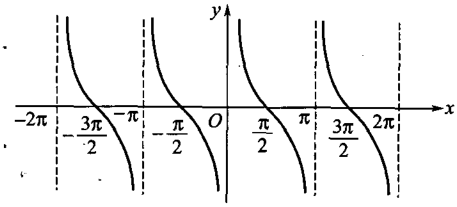

图 1-1-20

函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，奇函数，以 π 为周期，在每一个连续区间内单调减少，以直线 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为渐近线. 如图 1-1-20.

(6) 反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x$，定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，是单调增加的奇函数，有界，如图 1-1-21.

反余弦函数 $y=\arccos x$，定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$，是单调减少函数，有界，如图 1-1-22.

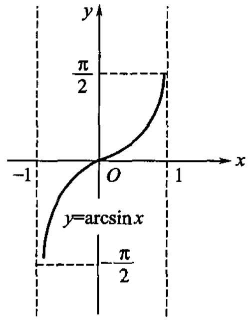

图 1-1-21

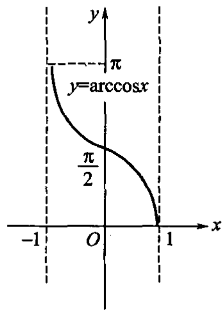

图 1-1-22

反正切函数 $y=\arctan x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，是单调增加的奇函数，有界，如图 1-1-23.

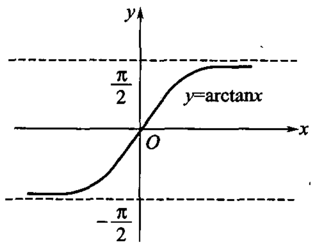

图 1-1-23

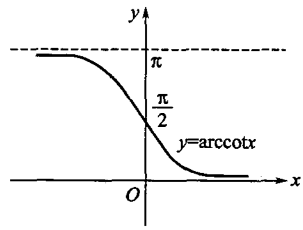

图 1-1-24

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$，是单调减少的函数，有界，如图 1-1-24.

1.1.4.2 复合函数

定义 1.1.8 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$. 如果 $u=\varphi(x)$的值域或其部分包含在 $y=f(u)$的定义域中，则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数，称为 x 的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)],$$

其中，x 是自变量，u 称作中间变量．

例如，$y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的；$y=\sqrt{1-x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$和 $u=1-x^2$ 复合而成的．

必须注意，不是任何两个函数都可以构成一个复合函数，例如 $y=\ln u$ 和 $u=x-\sqrt{x^2+1}$ 就不能构成复合函数，因为 $u=x-\sqrt{x^2+1}$的值域是 $u<0$，而 $y=\ln u$ 的定义域是 $u>0$，前者函数的值域完全没有被包含在后者函数的定义域中．只有当 $u=\varphi(x)$的值域与 $y=f(u)$的定义域的交集非空时，才可以复合．

复合函数不仅可以有一个中间变量，还可以有多个中间变量．

【例 12】 指出下列函数的复合过程

(1) $y=\sin(x^3+4)$；

(2) $y=5^{\sin x^2}$.

解 (1) 设 $u=x^3+4$，则 $y=\sin(x^3+4)$由 $y=\sin u$，$u=x^3+4$ 复合而成．