應用有限元素法

Applied Finite Element Analysis

原著者：Larry J. Segerlind

譯述者：董　建　良

科技圖書股份有限公司

0302
1

應用有限元素法

Applied Finite Element Analysis

原著者：Larry J. Segerlind

譯述者：董　建　良

科技圖書股份有限公司

本 公 司 經 新 聞 局 核 准 登 記
登 記 證 局 版 台 業 字 第 1123 號

書　　名：應用有限元素法
原 著 者：Larry J. Segerlind
譯 述 者：董　建　良
發 行 人：趙　國　華
發 行 者：科 技 圖 書 股 份 有 限 公 司
台北市復興南路一段360號7樓之三
電　話：7056781・7073230
郵 政 劃 撥 帳 號 15697

七 十 年十二月初版
七十二年十二月二版
特價新台幣140元

序

有限元素法，是用來解析工程上與物理上的數學問題的一種有力數字程式。它的應用範圍，從飛機或汽車的結構骨架分析，一直到複雜的熱系統分析，諸如核子原動力廠、流體流經導管、堰填，或地基分析。其它的應用範圍尚包括（但不限於）壓縮氣體流動、靜電、潤滑問題、與振動系統的分析等。

本書介紹有限元素法，應用到連續型態的問題上。其目的是提供基本概念與其實施的瞭解。更多的資料，則包括在大學四年級或研究生的主要課程裡。

本書．是針對應用有限元素法的個人而寫；即對特殊物理問題的數值求解。故其內容將有助於工程師、物理學者，與正在學習這基本觀念的數學者。不必預備有限元素法的預備知識。

這裏所提的資料，是許多研究者工作成果的集合，所以我不敢聲稱對其大部分是我的創作。但我相信，本書提出的次序，畢然不同於其它的書。資料的排列，是根據我教工程師研究課程時的經驗，而這些工程師應用此法，是在傳統的固體力學範圍以外。大部分這些工程師的主要希望是解決物理問題。所以，本書是朝向方法的應用上着力。無疑地，有限元素法的數學基礎是重要的。但我相信，個人可在其覺得如何實行這方法與他能求得的結果型態後，才去研究。

本書包含 180 個問題。大部分可用來解答。雖然許多是屬於第十八章列出的電算機程式的修改，或屬於實際問題的電算機解答。

第十八章提出的電算機程式，是唯一的特徵。特地寫出作爲教學之用，並與本書所討論的應用範圍，聯合使用。這些程式，在其能解的類型題目非常特殊。它們的主要優點是，限制輸入所需的數據。這樣減少了用以解釋如何使用它們的教學時間。所有應用程式使用元素數據與由格子產生程式所產生的數據一致。第十八章亦提出了格子產生程式。

當然我需要感謝許多人。特別要感謝 B.A. Stout 博士的鼓勵，在發展本書基本原理的課程期間的支持。我又感謝許多學生，關於資料組織方

面的有價值討論，特別向 J. Robert Cooke, George Mase, Robert Gustafson, S.M. Sherif, 與 DeBaerdemacker 道謝他們的討論與有益的提議，最後我感謝 Mrs. Julis Haffman 與 Mrs. Barbara Sykes 在打字時的勤勞。

Larry J. Segerlind
齊格倫

目　錄

第一章　有限元素法

1.1　有限元素法的基本觀念 2
1.2　優點與缺點 6
1.3　範圍 7

第二章　區域的分離

2.1　有限元素的型式 10
2.2　由區域分割而成的元素 13
2.3　節點的標誌 16
2.4　摘要 18

第三章　線性內插多項式

3.1　一維簡單元素 22
3.2　二維簡單元素 25
3.3　三維簡單元素 31
3.4　向量的內插 34
3.5　局部座標系 36
3.6　內插多項式的性質 43

第四章　分離區域的內插多項式

4.1　純量 51
4.2　向量 55
4.3　摘要 56

第五章　有關邊界值問題的有限元素說明

5.1 簡單例題：桿的熱傳導 61

5.2 重新討論 66
5.3 有限元素方程式：場問題 68
5.4 有限元素方程式：彈性理論 73

第六章 非圓形斷面的扭轉

6.1 非圓形斷面的扭轉的一般原理 83
6.2 元素矩陣的組合 85
6.3 傳統的元素導出結果 91
6.4 一致元素導出的結果 94

第七章 有限元素法：電算機執行

7.1 大域剛性矩陣的直接建立 98
7.2 線性方程組 101
7.3 一般電算機的流程圖 108
7.4 扭力問題的電算機執行 114

第八章 傳導與對流的熱傳遞

8.1 熱傳遞方程式 127
8.2 一維熱傳遞 130
8.3 二維熱傳遞 137
8.4 三維熱傳遞 143
8.5 座標變換 145
8.6 點源 145
8.7 電算機的執行 150

第九章 流體力學：無旋轉流動

9.1 二維地下水流動 162
9.2 地下水問題的電算機執行 163
9.3 理想流體的無旋轉流動 168
9.4 摘要 174

第十章 徑向與軸向對稱的場問題

10.1 二維間對稱的場問題 178
10.2 軸對稱的場問題 184
10.3 電算機的執行 193

第十一章 依時而變的場問題

11.1 元素方程式 197
11.2 元素容量矩陣 200
11.3 在時間區域內的有限差解法 202
11.4 數值穩定性與振盪 206
11.5 電算機執行的題目 206

第十二章 固體力學：彈性

12.1 一維彈性 210
12.2 二維彈性 217
12.3 三維彈性 224
12.4 軸對稱彈性 226
12.5 電算機執行 231

第十三章 高階元素：一維元素

13.1 二次與三次元素 241
13.2 二次元素的應用 246
13.3 自然座標系。坐標方程式 Jacobian 矩陣 251
13.4 決定元素矩陣的數值積分。............................256
13.5 次參數，等參數與過參數元數 261

第十四章 高階三角形與四面方體元素

14.1 高階元素的形狀函數 269
14.2 計算形狀函數的導數 273
14.3 元素矩陣的計算 277
14.4 四面體元素 283

第十五章 四邊形元素

15.1 線性四邊形元素 288
15.2 二次與三次四邊形元素 293
15.3 形狀函數導數的計算 299
15.4 元素方程式的計算 302
15.5 矩形稜體 307

第十六章 高階元素：電算機執行

16.1 電算機執行 311
16.2 應用例 314
16.3 彎曲邊界 318

第十七章 元素方程式的公式化：使用Galerkin's法

17.1 Galerkin's 法 321
17.2 梁的撓曲 322
17.3 二維場方程式 327
17.4 初始值問題 331
17.5 一階微分方程式組 334
17.6 摘要 337

第十八章 有限元素指導用電算機程式

18.1 格子 341
18.2 帶矩陣次程式 351
18.3 符號 353
18.4 TORSION程式 355
18.5 CONSTR 356
18.6 FLDMCH 361
18.7 TDHEAT 361
18.8 STRESS 365

第十九章 結 論

附錄A：變異計算的若干現象 375
附錄B：矩陣方程式的微分 379

第一章 有限元素法

有限元素法 (the finite element method) 是用來解物理與工程微分方程的一種數字程序。此法起源於1950年代早期的太空工業 (the aerospace industry)。首由 Turner, Clough, Martin 與 Topp (1956) 先後提出發表。在公佈以後，刺激了其它的研究人員，並陸續產生許多有關結構與土壤力學上應用方面的學術論文。在1963年 Melosh 作了一項重要的理論貢獻，證明有限元素法，其實只是著名的 Raleigh-Ritz 程序的變化而已。在結構問題上，這種方法是將系統的位能極小化 (minimizing the potential energy) 後，所導出的一組線性平衡方程式。

有限元素法加上極小化程序後，能很容易地應用在其它的工程方面。由 Laplace 或 Poisson 方程式所支配的問題，均可應用這種方法，因這些方程式，與函數的極小化有密切關係。(Zienkiewicz 與 Cheung, 1965), (visser, 1965), 與 (Wilson 及 Nickell, 1966) 等先後提出有限元素法在熱傳導上的應用。接

着立即導出在流體力學上的應用，特別在多孔性介質 (porous media) 中的流動問題。

其它的研究人員 (Szabo 與 Lee, 1969)，(Zienkiewicz, 1971) 等先後提出有關結構力學、熱傳遞與流體力學的元素方程式，亦能用加權剩餘程序 (weighted residual procedure)（諸如 Galerkin 法或最小平方法）來導出，擴大了有限元素法的應用範圍。在理論上，是一種很重要的貢獻。因其使有限元素法能應用到任何微分方程式。

有限元素法已從解結構問題的數字程序，進展到解一個微分方程式，或一組微分方程式的一般數字程序。對於需要更精確分析的航空機構造，以及在太空探險方面由國家委託的工作；故在短短15年內藉着高速數位電算機 (digital computer) 的輔助，完成了這項進展。數位電算機能提供一種操作許多複雜計算的快速方法。太空探險方面，提供基金作爲基本研究，並促使有多種用途的電算機程式的發展飛機、飛彈、太空艙以及類似的設計，更提供了理論上的應用範圍。

1.1 有限元素法的基本觀念

有限元素法的基本觀念是，任何連續量 (continuous quantity)，諸如：溫度、壓力、或位移等，均可用一不連續函數的型式作近似的表示。此型式乃爲有限區域的集合分段連續函數(piecewise continuous function)所組成*。使用連續量的值，以定義分段連續函數在其有限數次域(subdomains)。

最普通的情形，是在連續量爲未知的地方，並希望求在區域內某特定點的這種量的值。但若假設已知在區域內每個點的這種量的數值，則不連續型式的建立是很容易解釋的。我們將回到最普通的情形。以下是不連續型式的建立：

(1) 在區域內的有限點均屬同一性質。這些點稱爲節點(nodal point or node)
(2) 每個節點連續量的值，表示所需求出的一個變數。
(3) 由區域分成的有限個數的次區域稱爲元素 (element)。將這些元素的共同節點連接起來，並集合估計區域的形狀。
(4) 在每個元素上的連續量，由一個多項式估計，並使用連續量的節點值

*在本書中所討論的函數僅是綫性的，二次與三次多項式。多項式與函數兩個名詞可交換使用。

以定義這多項式。每個元素能定義不同的多項式，但所選取的元素多項式，需沿元素邊界維持連續性。

基本觀念，很容易由一維空間翼的溫度分佈情形的例子來說明，如圖 1.1 所示。$T(x)$ 為連續函數，區域是沿着 x 軸 O，L 的區間。沿 x 軸標出五個點（如圖1.2a）。這些點是節點，但不必作等間隔。當然不能定義五個以上的節點，但這五個點已足夠說明基本觀念。然後定出每個節點 $T(x)$ 的值。這些值示於圖 1.2 (b)，標出後配合節點的數目，T_1，T_2，……T_5。

將區域分成元素有兩種方法。我們能在每個元素上限制只有兩節點，這樣就有四個元素如圖1.3a 所示，或將區域分成兩個元素，各元素有三個

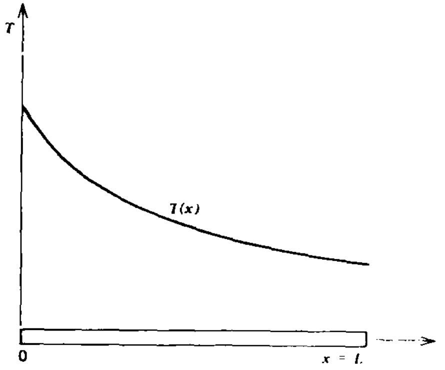

圖 1.1　有一維空間的翼之溫度分佈情形

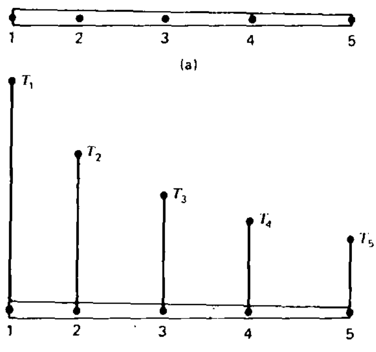

圖 1.2　節點與假設的 $T(x)$ 值

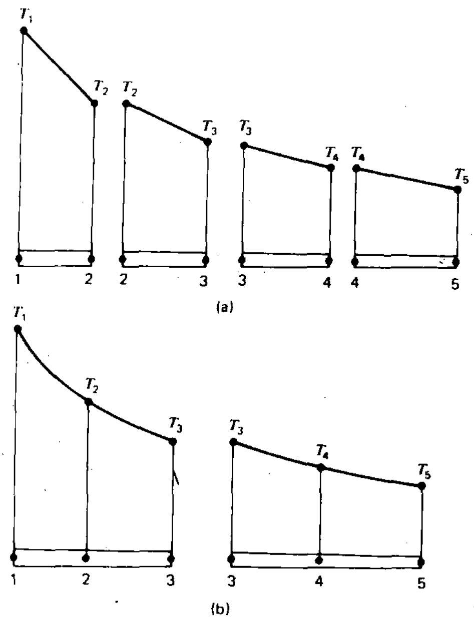

圖 1.3　由區域分割成元素

節點如圖1.3 (b)。然後使用每元素節點的$T(x)$值。定義元素的多項式。若將區域細分成四個元素，而每一元素有兩個節點，則元素函數即爲x的線性函數。（兩點產生一直線）。$T(x)$的最後估計值包括四個分段連續線性函數，每個函數均定義在單一元素上（見圖 1.4a ）。

將區域分成兩個元素，可使元素函數變成一個二次方程式。在這種情形下，$T(x)$的最後估計值是兩個分段連續二次方程式（見圖1.4b ）。元素函數構成一個分段連續估計值，因這兩個二次方程式的斜率，在節點 3 不需相等。

通常，溫度的分佈是未知的，而需求出在特定點的值。程序如同前述。但需再加上一個步驟。定義一組節點，這些節點的溫度分別爲T_1、T_2、T_3 ………。這些溫度是未知的。溫度方程式，定義在區域分割成的每個元素上。現在必需將$T(x)$的節點值，調整到對實際溫度分佈有最佳的估計時。這種調整，是將與物理問題有關量的極小化。當討論熱傳遞問題時，則將有關支配微分方程式的函數作極小化。由極小化過程導出一組線性代數方程式，由此解出$T(x)$的節點值。

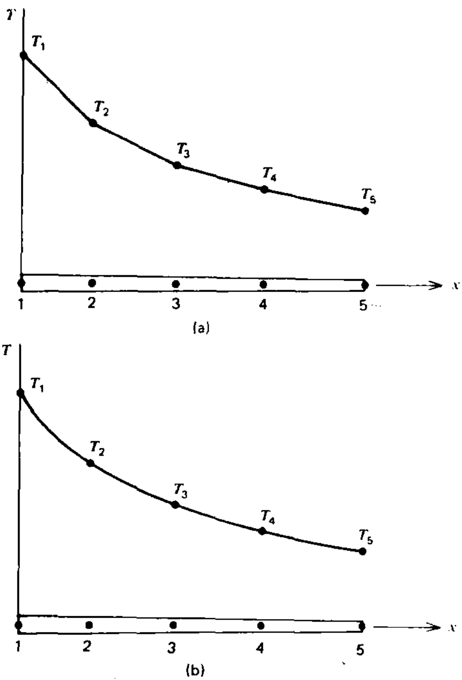

圖 1.4　對一維空間溫度分佈的分離模式

有限元素法的基本觀念亦能應用到 2 維與 3 維的區域上。在 2 維區域的元素是 x 與 y 的函數，一般形狀爲三角形或四邊形。元素函數變成一平面（見圖 1.5 ）或一曲面（見圖 1.6 ）。平面在元素節點上有最少的數目，三角形有 3 個節點，而四邊形則有 4 個節點。

在使用更多節點數時，元素函數可以是曲面。過多的節點，亦允許元素具有彎曲的邊界。對 2 維連續函數 (two-dimensional continuous function) $\phi(x, y)$ 的最終估計，是一分段連續面的集合，每個面使用各節點 $\phi(x, y)$ 值來定義在各元素上。

爲了定義元素函數，將典型的元素從元素集合中分離，是有限元素法的一種重要現象。這種性質，能使元素函數的定義與連接模型中的元素最終位置獨立，並且與其它的元素函數獨立。元素函數藉着任意組節點與任意組座標位置來說明，允許元素內插函數 (interpolating function) ，如同在建立原幾何圖的估計一般。

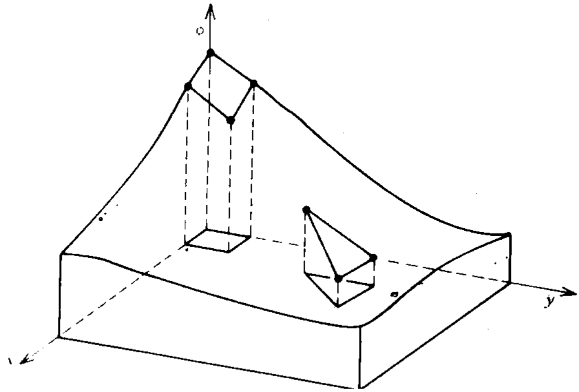

圖 1.5　使用三角形或四邊形元素，仿製二維空間純量函數

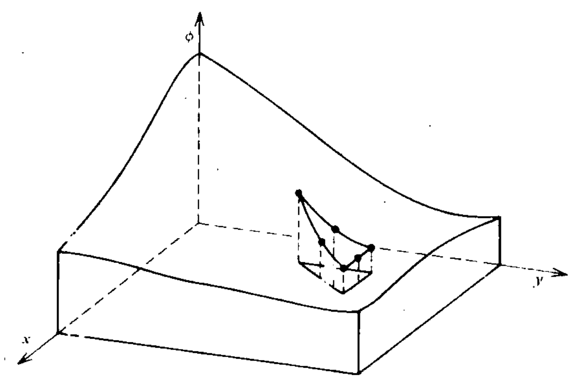

圖 1.6　使用二次三角形元素，仿製二維空間純量函數

1.2 優點與缺點

目前有限元素法應用非常廣泛，且包括所有由微分方程式所支配的物理問題。有限元素法的一些優點已歸屬於其廣泛的應用。其主要優點計包括：

(1)　鄰近元素的材料性質不一定要相同。如此，能使這種方法應用到由不

同材料所組成的物體。

(2) 不規則形狀的邊界，能用直邊的元素作近似估計，或用曲線邊界作正確配合。

(3) 元素的大小可以改變。這種性質能視需要，將元素格子 (element grid) 擴大或縮小。

(4) 邊界狀況 (boundary condition)，諸如不連續性的表面負荷，用這種方法不會產生任何困難。能很容易解決混合邊界 (mixed boundary condition)狀況。

(5) 以上的性質，能納入一般性電算器程式中，作為一種特殊的問題範疇。例如，對軸向對稱 (axisymmetric) 的熱傳遞方面的一般電算器程式，均能解此種型式的任何問題。電算器記憶裝置的適用性與使用電算器的成本，是解題的限制因素。

有限元素法最不方便的地方，在於必需使用電算器程式與設備。即使在解一個非常小的題目，有限元素法用手計算是頗為龐雜的，所以必需借助數位電算器，且需有更大記憶裝置的電算器來解複雜的問題。

目前的技術，已經採用大型電算機，一些商業與政府機構正在廣泛的發展電算機程式。各種進步的結合，已減少有限元素法的主要缺點。

1.3 範　圍

本書的目的，是討論有限元素法有關工程上非結構問題的解決辦法；特別在熱傳遞、流體力學以及二維與三維的彈性問題。並討論到電算機的實作與基本原理，因其最終目的在於求出某一物理問題的數字解。

有限元素法的基本概念，在以下的六章將順序提出。這些概念如下：

(1) 將區域分離 (discretization)；定義節點與元素。

(2) 定義單一元素的元素函數。

(3) 用元素函數的結合，求出在整個區域的分段連續函數。

(4) 使用與物理問題相關的函數極小化，以計算一系列方程式。

(5) 求解節點的系統方程式。

(6) 元素合成的計算。

第八到十二章，將討論特殊應用範圍如：熱傳遞、流體力學，軸向對稱場問題 (axisymmetric field problem)，依時而定 (time-dependent) 的場問題、與彈性。在第六章中的非圓形斷面的扭轉，是用來說明基本原

理[illegible]行。在十三到十六章，將討論高次元素 (the higher order element)。十七章所討論的是 Galerkin 解法。

第十八章中，列有一些電算機程式，能用來求解教科書中應用範圍所討論的題目。十八章的電算機程式，是特別用來作教學使用的。並不是求解一般複雜題目的程式。

參考書目

Lynn, Paul P. and Santosh K. Arya, "Use of the Least Squares Criterion in the Finite Element Formulation" *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1973, Vol. 6, pp. 75–83.

Melosh, R. J., "Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method," *Journal American Institute for Aeronautics and Astronautics*, 1965, Vol. 1, pp. 1631–37.

Szabo, Barna A., and George C. Lee, "Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method," *Internaltional Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1969, Vol. 1, pp. 301–310.

Turner, M. J., R. W. Clough, H. C. Martin, and L. J. Topp, "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," *Journal Aeronautical Science*, 1956, Vol. 23, pp. 805–824.

Visser, W., "A Finite Element Method for the Determination of Non-Stationary Temperature Distribution and Thermal Deformations," *Proceedings Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Institute of Technology, Wright Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio, 1965.

Wilson, Edward L., and Robert E. Nickell, "Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis," *Nuclear Engineering and Design*, 1966, Vol. 4, pp. 276–286.

Zienkiewicz, O. C., and Y. K. Cheung. "Finite Elements in the Solution of Field Problems," *The Engineer*, 1965, pp. 507–510.

Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, London, 1971, 521 pages.