

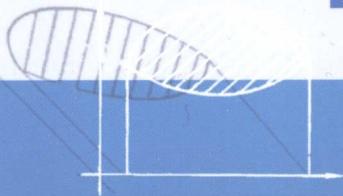


高职高专教育“十一五”规划教材

GAODENG  
SHUXUE

# 高等数学

■ 韩国涛 卓春英 林立忠 主编



中国农业大学出版社  
ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE

高职高专教育“十一五”规划教材  
（副主编：林立忠）  
（编者：韩国涛、卓春英、林立忠）

# 高等数学

韩国涛 卓春英 林立忠 主编

中国农业大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学/韩国涛,卓春英,林立忠主编. —北京:中国农业大学出版社,2008.8  
ISBN 978-7-81117-483-0

I. 高… II. ①韩… ②卓… ③林… III. 高等数学 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 111845 号

书 名 高等数学

作 者 韩国涛 卓春英 林立忠 主编

策划编辑 陈巧莲 姚慧敏 伍 斌

责任编辑 胡晓蕾

封面设计 郑 川

责任校对 王晓凤 陈 莹

出版发行 中国农业大学出版社

社 址 北京市海淀区圆明园西路 2 号

邮 政 编 码 100193

电 话 发行部 010-62731190,2620

读 者 服 务 部 010-62732336

编 辑 部 010-62732617,2618

出 版 部 010-62733440

网 址 <http://www.cau.edu.cn/caup>

e-mail cbsszs@cau.edu.cn

经 销 新华书店

印 刷 涿州市星河印刷有限公司

版 次 2008 年 8 月第 1 版 2008 年 8 月第 1 次印刷

规 格 787×980 16 开本 11 印张 197 千字

定 价 18.00 元

图书如有质量问题本社发行部负责调换

**主 编** 韩国涛(辽宁农业职业技术学院)  
卓春英(黑龙江农业职业技术学院)  
林立忠(福建农业职业技术学院)  
**审 稿** 文 斌(佳木斯大学)

## 出版说明

高等职业教育作为高等教育中的一个类型,肩负着培养面向生产、建设、服务和管理第一线需要的高技能人才的使命。大力提高人才培养的质量,增强人才对于就业岗位的适应性已成为高等职业教育自身发展的迫切需要。教材作为教学和课程建设的重要支撑,对于人才培养质量的影响极为深远。随着高等农业职业教育发展和改革的不断深入,各职业院校对于教材适用性的要求也越来越高。中国农业大学出版社长期致力于高等农业教育本科教材的出版,在高等农业教育领域发挥着重要的作用,积累了丰富的经验,希望充分利用自身的资源和优势,为我国高等职业教育的改革与发展做出自己的贡献。

经过深入调研和分析以往教材的优点与不足,在教育部高教司高职高专处和全国高职高专农林牧渔类专业教学指导委员会的关心和指导下,在各高职高专院校的大力支持下,中国农业大学出版社先后与 100 余所院校开展了合作,共同组织编写了一系列以“十一五”国家级规划教材为主体的、符合新时代高职高专教育人才培养要求的教材。这些教材从 2007 年 3 月开始陆续出版,涉及畜牧兽医类、食品类、农业技术类、生物技术类、制药技术类、财经大类和公共基础课等的 100 多个品种,其中普通高等教育“十一五”国家级规划教材 22 种。

这些教材的组织和编写具有以下特点:

**精心组织参编院校和作者。**每批教材的组织都经过以下步骤:首先,征集相关院校教师的申报材料。全国 100 余所高职高专院校的千余名教师给予了我们积极的反馈。然后,经由高职高专院校和出版社的专家组成的选题委员会的慎重审议,充分考虑不同院校的办学特色、专业优势、地域特点及教学改革进程,确定参加编写的主要院校。最后,根据申报教师提交的编写大纲、编写思路和样章,结合教师的学习培训背景、教学与科研经验和生产实践经历,遴选优秀骨干教师组建编写团队。其中,教授和副教授及有硕士以上学历的占 70%。特别值得一提的是,有 5% 的作者是来自企业生产第一线的技术人员。

**贴近国家高职教育改革的要求。**我国的高等职业教育发展历史不长,很多院校的办学模式和教学理念还在探索之中。为了更好地促进教师了解和领会教育部的教学改革精神,体现基于职业岗位分析和具体工作过程的课程设计理念,以真实工作任务或社会产品为载体组织教材内容,推进适应“工学结合”人才培养模式的课程教材的编写出版,在每次编写研讨会上都邀请了教育部高教司高职高专处、全

国高职高专农林牧渔类专业教学指导委员会的领导作教学改革的报告；多次邀请教育部职业教育研究所的知名专家到会，专门就课程设置和教材的体系建构作专题报告，使教材的编写视角高、理念新、有前瞻性。

**注重反映教学改革的成果。**教材应该不断创新，与时俱进。好的教材应该及时体现教学改革的成果，同时也是教育教学改革的重要推进器。这些教材在组织过程中特别注重发掘各校在产学结合、工学交替实践中具有创新性的教材素材，在围绕就业岗位需要进行知识的整合、与实际生产过程的接轨上具有创新性和非常鲜明的特色，相信对于其他院校的教学改革会有启发和借鉴意义。

**瞄准就业岗位群需要，突出职业能力的培养。**这些教材的编写指导思想是紧扣培养“高技能人才”的目标，以职业能力培养为本位，以实践技能培养为中心，体现就业和发展需求相结合的理念。

教材体系的构建依照职业教育的“工作过程导向”原则，打破学科的“系统性”和“完整性”。内容根据岗位（群）的任职要求，参照相关的职业资格标准，采用倒推法确定，即剖析就业岗位群对专业能力和技能的需求——→关键能力——→关键技能——→围绕技能的关键基本理论。删除假设推论，减少原理论证，尽可能多地采用生产实际中的案例剖析问题，加强与实际工作的接轨。教材反映行业中正在应用的新技术、新方法，体现实用性与先进性的结合。

**创新体例，增强启发性。**为了强化学习效果，在每章前面提出本章的知识目标和技能目标。有的每章设有小结和复习思考题。小结采用树状结构，将主要的知识点及其之间的关联直观表达出来，有利于提高学生的学习效果和效率，也方便教师课堂总结。部分内容增编阅读材料。

**加强审稿，企业与行业专家相结合，严把质量关。**从选题策划阶段就邀请行内专家把关，由来自于企业、高职院校或中国农业大学有丰富生产实践经验的教授审核编写大纲，并对后期书稿进行严格审定。每一种教材都经过作者与审稿人的多次的交流和修改，从而保证内容的科学性、先进性和对于岗位的适应性。

这些教材的顺利出版，是全国 100 余所高职高专院校共同努力的结果。编写出版过程中所做的很多探索，为进一步进行教材研发提供了宝贵的经验。我们希望以此为基点，进一步加强与各校的交流合作，配合各校教学改革，在教材的推广使用、修订完善、补充扩展进程中，在提高质量和增加品种的过程中，不断拓展教材合作研发的思路，创新教材开发的模式和服务方式。让我们共同努力，携手并进，为深化高职高专教育教学改革和提高人才培养质量，培养国家需要的各行各业高素质技能型专门人才，发挥积极的推动作用。

中国农业大学出版社  
2008 年 6 月

## 内 容 简 介

本教材主要依据教育部颁布的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写,同时注重反映目前国内国外高职高专数学课程教改成果,兼顾参编学校及各类大专院校的实际情况,结合编者多年教学实践经验和同类教材发展趋势,注意反映数学思想及数学方法在高职高专各专业的应用。编写中贯彻“掌握概念、强化应用”的原则,适当少讲理论,多讲方法。对于基本概念的叙述尽可能采用案例驱动,简明扼要,深入浅出,突出其实际背景;对于定理与公式着重说明其意义、作用与应用。

例题与习题的选择注意与知识点的呼应,对难度较大的基础理论不追求严格的论证,只作简单的几何解释。在内容处理上兼顾对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力以及较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力培养,同时兼顾数学自身的系统性与逻辑性。

本教材的主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程,每章都配有习题,书后附有习题答案,供教师和学生使用。

## 前 言

《高等数学》是根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》以及高职高专“宽口径、多方向、少学时”的课程特点编写的，遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，注重数学公式、定理、公理、概念的应用，淡化理论推导和定理的证明，在内容编排上由浅入深，由易到难，循序渐进，语言简练，易教易学。

高等数学课程是高等专科教育、高等职业教育、成人高等教育中各专业必修的一门重要基础课和工具课。学生通过本课程的学习掌握微积分、微分方程等内容的基本概念、基本理论、基本运算，并通过各个教学环节，逐步培养学生初步抽象概括问题的能力、逻辑推理能力、自学能力以及初步具有综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力，重视培养学生用数学方法解决实际问题的能力。

本教材在人才培养过程中的地位、作用主要体现在：①培养学生用数学思想、概念、方法解决实际问题的能力；②培养学生逻辑思维能力以及分析问题、解决问题的能力。

本书要努力实现的主要特色如下：

(1) 充充分体现高职高专的特点，理论与技能并重，理论知识既体现“必需”、“够用”、“实用”的原则，又着眼于为学生未来的发展提供可持续提高的知识保证。

(2) 在保证数学概念准确的前提下，尽量借助于几何直观，力求使抽象的数学概念形象化，便于学生理解。

(3) 注重数学概念与实际问题的联系。重要概念均以实际问题为引例，结合各专业的特点，在举例和习题中突出应用类题型，为学生终身教育打下坚实的基础。

(4) 理论推导或证明以解释清楚有关结论为度，不过分追求理论上的系统性。

(5) 突出高职高专特色，切实有效地提高学生的数学思维能力和分析解决问题的能力。

(6) 以学生为本，便于自学，注重培养学生的自学能力和拓宽、发展知识的能力，每一章中注重对知识精髓及解题方法、思路、规律、技巧等进行详细的归纳总结。

本教材由韩国涛、卓春英、林立忠任主编。具体分工为：韩国涛编写第1章、第3章、第4章，卓春英编写第2章、第6章、第7章，林立忠编写第5章。文斌担任本

教材的审稿。

本教材在编写过程中得到辽宁农业职业技术学院、黑龙江农业职业技术学院、福建农业职业技术学院、佳木斯大学等院校领导的大力支持，并得到有关专家、学者和同行的帮助，在此表示感谢！

由于编者水平有限和时间仓促，错误之处在所难免，恳请使用本教材的广大师生批评指正。

编者  
2008年5月

首先为帮助广大学生理解教材内容，本书将每章的主要内容归纳为表1-1。表1-1的内容由各章的主要知识点组成，主要知识点是根据教学大纲的要求而确定的，是学习该章的基本要求。表1-1中列出了各章的主要知识点，希望对读者有所帮助。

其次，为了帮助学生掌握各章的主要知识点，本书在每章的最后都安排了“本章小结”，“本章小结”是对本章主要内容的回顾与总结，帮助学生掌握本章的主要知识点，为学习下一章打下基础。

再次，为了帮助学生掌握各章的主要知识点，本书在每章的最后都安排了“本章小结”，“本章小结”是对本章的主要知识点的回顾与总结，帮助学生掌握本章的主要知识点，为学习下一章打下基础。

最后，为了帮助学生掌握各章的主要知识点，本书在每章的最后都安排了“本章小结”，“本章小结”是对本章的主要知识点的回顾与总结，帮助学生掌握本章的主要知识点，为学习下一章打下基础。

本书在每章的最后都安排了“本章小结”，“本章小结”是对本章的主要知识点的回顾与总结，帮助学生掌握本章的主要知识点，为学习下一章打下基础。

本书在每章的最后都安排了“本章小结”，“本章小结”是对本章的主要知识点的回顾与总结，帮助学生掌握本章的主要知识点，为学习下一章打下基础。

本书在每章的最后都安排了“本章小结”，“本章小结”是对本章的主要知识点的回顾与总结，帮助学生掌握本章的主要知识点，为学习下一章打下基础。

本书在每章的最后都安排了“本章小结”，“本章小结”是对本章的主要知识点的回顾与总结，帮助学生掌握本章的主要知识点，为学习下一章打下基础。

本书在每章的最后都安排了“本章小结”，“本章小结”是对本章的主要知识点的回顾与总结，帮助学生掌握本章的主要知识点，为学习下一章打下基础。

|              |   |
|--------------|---|
| 第一章 函数       | 1 |
| 1.1 集合、区间与邻域 | 1 |
| 1.2 函数的概念    | 4 |

## 目 录

|                        |           |
|------------------------|-----------|
| 1.3 函数的性质              | 9         |
| 1.4 初等函数               | 11        |
| 习题                     | 15        |
| <b>第二章 函数极限与函数的连续性</b> | <b>17</b> |
| 2.1 函数极限、无穷小与无穷大       | 17        |
| 2.2 函数极限运算法则           | 21        |
| 2.3 无穷小的比较             | 26        |
| 2.4 函数的连续性             | 27        |
| 习题                     | 31        |
| <b>第三章 导数与微分</b>       | <b>33</b> |
| 3.1 导数的概念              | 33        |
| 3.2 导数的基本公式和求导法则       | 41        |
| 3.3 函数的微分              | 54        |
| 习题                     | 59        |
| <b>第四章 导数的应用</b>       | <b>62</b> |
| 4.1 罗尔定理               | 62        |
| 4.2 函数单调性的判别方法         | 69        |
| 4.3 函数的极值              | 71        |
| 4.4 函数的最大值与最小值         | 75        |
| 4.5 曲线的凹凸性与拐点          | 78        |
| 4.6 函数图形的描绘            | 80        |
| 习题                     | 81        |
| <b>第五章 不定积分</b>        | <b>84</b> |
| 5.1 不定积分的概念与性质         | 84        |

|                         |            |
|-------------------------|------------|
| 5.2 换元积分法.....          | 90         |
| 5.3 分部积分法.....          | 98         |
| 习题.....                 | 102        |
| <b>第6章 定积分及其应用.....</b> | <b>105</b> |
| 6.1 定积分的概念 .....        | 105        |
| 6.2 定积分的基本性质 .....      | 109        |
| 6.3 微积分的基本定理 .....      | 112        |
| 6.4 定积分的计算 .....        | 114        |
| 6.5 广义积分 .....          | 120        |
| 6.6 定积分的应用 .....        | 122        |
| 习题 .....                | 130        |
| <b>第7章 常微分方程.....</b>   | <b>134</b> |
| 7.1 微分方程的一般概念 .....     | 134        |
| 7.2 一阶微分方程 .....        | 135        |
| 7.3 二阶微分方程 .....        | 141        |
| 7.4 可降阶的高阶微分方程 .....    | 146        |
| 7.5 微分方程应用举例 .....      | 148        |
| 习题 .....                | 151        |
| <b>习题答案.....</b>        | <b>154</b> |
| <b>参考文献.....</b>        | <b>163</b> |

# 第1章 函数

初等数学的主要研究对象是常量及其运算。高等数学是初等数学的继续和发展，它是研究变量之间的依赖关系即函数关系的一门学科。函数是客观世界中变量之间相互依赖关系的反映，是初等数学重要内容之一，它又是高等数学中最重要的基本概念和研究对象。本章将在中学已学过的函数知识的基础上，对函数及相关知识做简要的回顾和总结，并作必要的补充。

## 1.1 集合、区间与邻域

### 1.1.1 集合

在中学数学中，已对集合做过一些介绍。为了以后讨论问题的方便，这里再将其中有关内容作一个简单的回顾。

#### 1. 定义

集合是数学中的一个原始概念，不能定义，只能描述。一般来说，具有某种属性的对象的全体称为集合。组成集合的每一个对象称为该集合的元素。集合通常用大写字母  $A, B, C \dots$  表示，元素用小写字母  $a, b, c \dots$  表示。例如一个班的全体学生、自然数全体、实数全体等，都可以组成一个集合。对于一个集合  $M$  来说，如果  $a$  是集合  $M$  的元素，记作  $a \in M$ （读作  $a$  属于集合  $M$ ）；如果  $a$  不是集合  $M$  的元素，记作  $a \notin M$ （读作  $a$  不属于集合  $M$ ）。

一个事物  $a$  与一个集合  $M$  之间的关系只有以下 2 种： $a$  属于集合  $M$ ，或  $a$  不属于集合  $M$ ，二者必居其一。

#### 2. 集合的表示方法

集合的表示方法通常包括列举法、描述法。

列举法就是把集合的全体元素一一列举出来表示。例如，由方程  $x^2 - x - 2 = 0$  的根所组成的集合，用列举法表示可写成  $A = \{-1, 2\}$  或  $A = \{2, -1\}$ 。

描述法是通过强调集合中元素的共同特性来表示这个集合。如集合  $M$  是由具有某种性质  $P$  的元素  $x$  的全体所组成的，就可表示成  $M = \{x | x \text{ 具有性质 } P\}$ 。上例由方程  $x^2 - x - 2 = 0$  的根所组成的集合用描述法又可写成  $A = \{x | x^2 - x - 2 = 0, x \in \mathbb{R}\}$ 。

### 3. 集合的分类

(1) 按元素的属性分类 可分为数集、点集、数对集。每个元素都是数的集合，称为数集。例如，全体自然数的集合记作  $\mathbb{N}$ ，全体整数的集合记作  $\mathbb{Z}$  等。

(2) 按元素的个数分类 可分为有限集、无限集、空集  $\emptyset$ 。只含有有限个元素的集合称为有限集；不是有限的集合称为无限集；不含任何元素的集合称为空集  $\emptyset$ 。

### 4. 集合间的关系

#### (1) 包含关系

① 子集： $A$  是  $B$  的子集，记作  $A \subseteq B$ ，读作  $A$  包含于  $B$ 。

② 真子集： $A$  是  $B$  的真子集，记作  $A \subset B$ ，读作  $A$  真包含于  $B$ 。

③ 全集： $I$ 。

(2) 相等关系 集合  $A$  与  $B$  相等，记作  $A = B$ ，读作  $A$  等于  $B$ 。

#### (3) 运算关系

① 交集： $A$  与  $B$  的交集记作  $A \cap B$ ，即  $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 。

② 并集： $A$  与  $B$  的并集记作  $A \cup B$ ，即  $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 。

③ 补集： $A$  在  $I$  中的补集记作  $\bar{A}$ ，即  $\bar{A} = \{x | x \in I \text{ 且 } x \notin A\}$ 。

### 5. 常用数集的符号

$\mathbb{N}$ —自然数集， $\mathbb{Z}$ —整数集， $\mathbb{Q}$ —有理数集， $\mathbb{R}$ —实数集， $\mathbb{C}$ —复数集， $\mathbb{Z}^-$ —负整数集， $\mathbb{Q}^-$ —负有理数集， $\mathbb{Q}^+$ —正有理数集， $\mathbb{R}^-$ —负实数集。

## 1.1.2 区间

高等数学中用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合。如无特别声明，以后提到的数均指实数。在中学数学中，实数与数轴上的点是一一对应的。在数轴上，一个范围内的实数直观地给出了区间的概念。区间是一种常用的数集。

区间：介于两个实数之间的全体实数称为区间，这两个实数称为区间的端点。

设  $a, b \in \mathbb{R}$ ，且  $a < b$ ，数集  $\{x | a < x < b\}$  称为以  $a, b$  为端点的开区间，记作  $(a, b)$ 。同理定义其他区间，如图 1-1 所示。

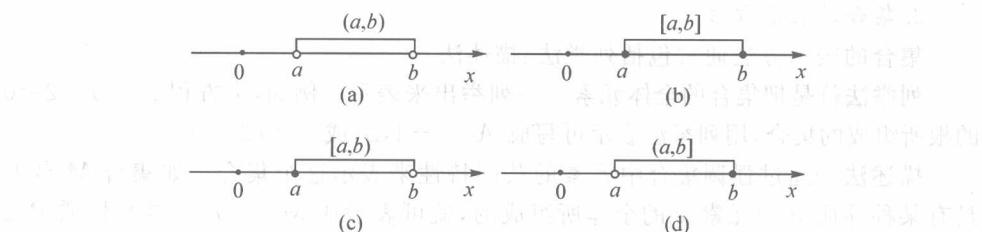


图 1-1

(1) 开区间： $(a, b) = \{x | a < x < b\}$ ；

(2) 闭区间:  $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ ;

(3) 半开区间:  $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ , 或  $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ 。

开区间、闭区间、半开区间统称为有限区间(图 1-1)。 $a$ 、 $b$  分别称为区间的左端点和右端点。有限区间两端点之间的距离  $b - a$  称为区间长。

用  $+\infty$  表示正无穷大, 用  $-\infty$  表示负无穷大, 则全体实数用区间表示为  $(-\infty, +\infty)$ , 称为无限开区间, 于是有如下定义:

(4) 无限开区间:  $(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$ ;  
 $(a, +\infty) = \{x | a < x < +\infty\}$   
 $(-\infty, b) = \{x | -\infty < x < b\}$

(5) 无限半开区间:  $[a, +\infty) = \{x | a \leq x < +\infty\}$   
 $(-\infty, b] = \{x | -\infty < x \leq b\}$

无限开区间、无限半开区间都至少有一个无限端点, 统称为无限区间。  
无限区间  $[a, +\infty)$ 、 $(-\infty, b]$  如图 1-2 所示。

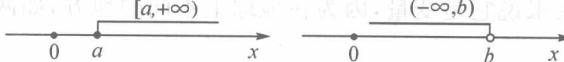


图 1-2

### 1.1.3 邻域

在高等数学中, 邻域也是经常用到的概念。

#### 1. 邻域

设  $a \in \mathbb{R}, \delta > 0$ , 称开区间  $(a - \delta, a + \delta)$  为点  $a$  的  $\delta$  邻域, 记作  $U(a, \delta)$ , 即  $U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\} = \{x | |x - a| < \delta\}$ 。

点  $a$  叫做  $U(a, \delta)$  的中心,  $\delta$  叫做  $U(a, \delta)$  的半径。点  $a$  的  $\delta$  邻域  $U(a, \delta)$  以点  $a$  为中心, 其长度为  $2\delta$ , 如图 1-3(a) 所示。

去掉中心的邻域的概念也经常用到。

#### 2. 去心邻域

点  $a$  的  $\delta$  邻域去掉中心  $a$  后, 称为点  $a$  去心的  $\delta$  邻域(空心邻域), 记作  $U(\bar{a}, \delta)$ , 即  $U(\bar{a}, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\}$ , 如图 1-3(b) 所示。

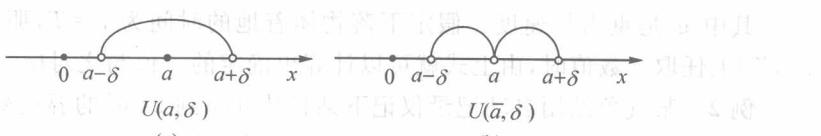


图 1-3

## 1.2 函数的概念

### 1.2.1 常量和变量

我们在观察或研究某种自然现象或技术的过程中,常常会遇到各种不同的量,这些量一般可分为两种——常量和变量。在研究某一变化过程中,数值保持不变的量称为常量,数值发生变化的量称为变量。如圆的面积  $S = \pi r^2$ ,半径  $r$  和圆的面积  $S$  就是变量,而圆周率  $\pi$  就是常量。

例如,我们选定了一块试验田,它的面积是常量,而这块试验田每年的产量则是变量。

注意:常量与变量是相对“过程”而言的,有时,同一个量在某种情况下是常量,而在另外一种情况下则是变量。例如重力加速度,在同一地区来说它是常量,但在地球上不同的地区来说它是变量,因为在地球上不同的地方,如两极与赤道的重力加速度不同。

常量通常用字母  $a, b, c$  等表示,变量通常用字母  $x, y, t$  等表示。常量可以看成是取同一数值的变量,即常量可看作变量的特殊情况。

### 1.2.2 函数的定义

在研究某一自然现象或实际问题的变化过程中,通常并不是只有一个量独立变化,常常同时有几个量在变化着。这几个变量往往并不是孤立地在变化。而是相互联系并遵循着一定的规律而变化。本章只讨论两个变量的情况,看下面的例子。

**例 1** 自由落体运动。设物体下落的时间为  $t$ ,下落的距离为  $s$ ,假定开始下落的时刻为  $t=0$ ,那么  $s$  与  $t$  之间的依赖关系由下式给定:

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

其中  $g$  是重力加速度。假定下落物体着地的时间为  $t=T$ ,那么当时间  $t$  在  $[0, T]$  上任取一数值时,由上式就可以计算出确定的  $s$  值与之对应。

**例 2** 某气象站用自动记录仪记下某日从 0 时到 24 时的温度变化曲线,如图 1-4 所示,它形象地表示温度  $T$  随时间  $t$  的变化规律。

根据温度变化曲线所表示的规律,对于这天 0 时到 24 时中每一个时刻  $t_0$ ,都有确定的温度  $T_0$  和它相对应。如  $t=0$  时,  $T=17^{\circ}\text{C}$ ;  $t=12$  时,  $T=20^{\circ}\text{C}$  等。

**例 3** 对任意  $x \in \mathbb{R}$  都对应一个数  $y=x^2$ , 即  $x$  与  $y$  之间的对应关系是  $y=x^2$ 。

上面 3 个例子均反映了 2 个变量之间的依赖关系, 每个依赖关系对应了一个法则, 根据这个法则, 当其中一个变量在某一范围内取定一个数值时, 另一个变量就有确定的值与之对应, 这种对应正是函数概念的实质。

### 1. 函数的定义

设  $x$  和  $y$  是两个变量,  $D$  是一个给定的数集, 如果对于每一个  $x \in D$ , 变量  $y$  按照一定的法则总有确定的数值和它对应, 则称  $y$  是  $x$  的函数, 记作  $y=f(x)$ 。数集  $D$  叫做这个函数的定义域,  $x$  叫做自变量,  $y$  叫做因变量。

当  $x$  取数值  $x_0 \in D$  时, 函数  $y$  的对应值  $y_0$  称为函数在点  $x_0$  处的函数值, 记作:

$$y_0 = f(x_0) \quad \text{或} \quad y \Big|_{x=x_0} = f(x_0)$$

当  $x$  取遍  $D$  的各个数值时, 对应的函数值的全体组成的数集  
 $\{W = y \mid y = f(x), x \in D\}$   
 称为函数的值域。

在函数  $y=f(x)$  中, 记号  $f$  表示自变量  $x$  与因变量  $y$  的对应关系, 也可以用其他字母如  $F$ 、 $\Phi$ 、 $f_1$ 、 $f_2$  等表示, 这时函数记作  $y=F(x)$ 、 $y=\Phi(x)$ 、 $y=f_1(x)$ 、 $y=f_2(x)$ 。

### 2. 函数的两要素

定义域  $D$ 、对应关系(法则) $f$  构成了函数的两要素, 二者缺一不可, 所以要判断两个函数是否相同, 只要看它们的定义域和对应法则是否相同即可。

函数定义域的确定是研究函数的基本前提。

(1) 在实际问题中, 定义域由实际意义确定。如在例 1 中, 定义域  $D=[0, T]$ 。

(2) 在数学中, 当只给出函数的表达式而没有说明函数的实际背景时, 函数的定义域就是使表达式有意义的自变量所能取的一切实数。在例 2 中,  $D=[0, 24]$ ; 在例 3 中,  $D=(-\infty, +\infty)$ 。

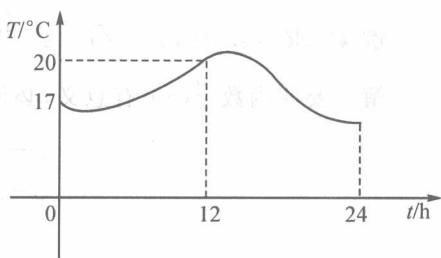


图 1-4

**例 4** 求函数  $f(x) = \sqrt{x-2} + \frac{\lg(5-x)}{x-3}$  的定义域。

**解** 要使函数  $f(x)$  有意义, 必须有:

$$x-2 \geq 0 \quad \text{即 } x \geq 2$$

$$5-x > 0 \quad \text{即 } x < 5$$

$$x-3 \neq 0 \quad \text{即 } x \neq 3$$

所求定义域为:  $2 \leq x < 5$  且  $x \neq 3$ , 即  $[2, 3) \cup (3, 5)$ 。

**例 5** 求  $y = \ln(5x-4)$  的定义域。

**解** 要  $y$  有定义, 须  $5x-4 > 0$ , 即  $x > \frac{4}{5}$ , 所求定义域为:  $D = \left(\frac{4}{5}, +\infty\right)$ 。

### 3. 单值与多值函数

如果自变量在定义域内任取一个数值时, 对应的函数值只有一个, 这种函数叫做单值函数, 否则叫做多值函数。例 1、例 2 中的函数都是单值函数。而函数  $y^2 = x$  对于任意正实数  $x$  都有一互为相反数的实数  $y = \pm\sqrt{x}$  与之对应, 故是多值函数。以后凡没有特别的说明, 本书讨论的都是单值函数。

### 1.2.3 函数的图像

设函数的定义域为  $D$ , 对任意  $x \in D$ , 通过函数  $y = f(x)$  有确定的  $y$  值与之对应。在以  $x$  为横坐标、 $y$  为纵坐标的平面直角坐标系  $xOy$  上确定一个点  $M(x, y)$ 。当  $x$  取遍定义域  $D$  中的所有数值时, 点  $M(x, y)$  的集合称为函数  $y = f(x)$  的图像。一个函数的图像通常是一条曲线, 所以以后常称函数  $y = f(x)$  的图像为曲线  $y = f(x)$ 。

### 1.2.4 函数的表示法

在函数的定义中, 并没有规定用什么方法来表示函数。为了能很好地研究函数的规律, 就应该采用适当的函数表示法。函数的表示法通常有 4 种: 解析法、列表法、图示法和叙述法。

#### 1. 解析法

用数学式子表示函数的方法叫解析法, 也叫公式法。如例 1、例 3。解析法的优点是简单、明确, 便于计算、分析和理论研究; 缺点是直观性差, 确定解析式有时比较困难, 有的函数不能用解析式表示。

#### 2. 列表法

用表格形式表示函数的方法叫列表法, 又叫表格法。如大家所熟悉的三角函