高职高专"十一五"规划教材

线性代数

张德全 主编

XIANXING DAISHU

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社

高职高专"十一五"规划教材

线性代数

主编　张德全
副主编　耿秀荣　王彦辉　黎丽

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社
·桂林·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 张德全主编. —桂林：广西师范大学出版社，2008.9

高职高专“十一五”规划教材

ISBN 978-7-5633-7730-5

Ⅰ. 线…　Ⅱ. 张…　Ⅲ. 线性代数—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 135147 号

广西师范大学出版社出版发行

（广西桂林市中华路 22 号　邮政编码：541001
网址：http://www.bbtpress.com）

出版人：何林夏

全国新华书店经销

广西师范大学印刷厂印刷

（广西桂林市临桂县金山路 168 号　邮政编码：541100）

开本：720 mm × 960 mm　1/16

印张：13.25　　字数：235 千字

2008 年 9 月第 1 版　　2008 年 9 月第 1 次印刷

印数：0 001~5 500 册　　定价：21.00 元

内容提要

编者结合多年从事高等代数和线性代数课程教学的体会，编写了这本线性代数教材.本书遵循高等教育的教学规律，坚持“以应用为目的，以必需够用为度，以可读性为基点，以创新为导向”的编写原则，强调基本概念和基本方法.该书条理清楚，便于教学；说理透彻，利于理解；步骤详细，容易阅读；每节都有详尽注释，有助学生掌握要点和方法.

本书内容为：n 阶行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵与二次型.增加线性经济模型简介和向量空间介绍.书末附有习题参考答案.

本书可作为高职高专工程类、管理类各专业线性代数课程的教材.

前言

线性代数是一门重要的基础课.在自然科学、工程技术和管理科学等诸多领域有较大的应用.为满足21世纪我国大力发展高等教育的需要,编者结合多年从事高等代数和线性代数课程教学的体会,编写了这本线性代数教材.本书可作为高职高专工程类、管理类各专业线性代数课程的教材.

在编写过程中,借鉴了国内外许多优秀教材的思想和处理方法,内容上突出精选够用,表达上力求通俗易懂.

本书遵循高等教育的教学规律,坚持"以应用为目的,以必需够用为度,以可读性为基点,以创新性为导向"的编写原则,具有以下特色:

科学定位.体现高职高专院校的特点,符合一般高职高专院校基础课教学的实际要求.

强调基本方法——矩阵方法.把问题归结为矩阵,用矩阵的运算(线性运算、乘法、初等变换)解决问题.

以学生为本.本套教材尽量体现以学生为本,以学生为中心的教育思想,不为教而教.注重培养学生自学能力和扩展、发展知识的能力,为学生今后持续创造性学习打好基础.注意方法的总结归类,如逆矩阵的求法、线性方程组的解法等都作了归类总结.这样有利于学生进行预习和复习.

全书共分六章，紧密联系又相对独立．本书前三章为基础篇，后三章为应用提高篇．教师可根据不同专业和不同教学时数选择有关的章节进行教学．增加附录《向量空间介绍》，以便学生自学，加强学生对向量空间的了解．

本书由张德全、耿秀荣、王彦辉和黎丽四人合作编写完成．张德全负责第一、五章和附录《向量空间介绍》的编写，耿秀荣负责第二、三章的编写，王彦辉负责第四章的编写，黎丽负责第六章的编写．全书由张德全负责统一审核．

由于编者水平有限，书中内容、体系、结构不当甚至错误之处，敬请广大读者批评指正．

编　者

2008年4月

目录
CONTENTS

第一章

n 阶行列式

生产实际和科学研究中有许多问题可以归结为线性方程组，行列式正是在对线性方程组的研究中建立起来的. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法. 此外还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆(Cramer)法则.

§1.1 排列及对换

一、排列及其逆序数

1. 排列

定义 1 n 个不同的元素按照一定的次序排成一列，叫做这 n 个元素的一个全排列，简称 n 阶排列.

n 个不同元素的所有排列的个数用 P_n 表示，容易验证，$P_n=n!$，即 n 个元素共有 $n!$ 个全排列.

为讨论方便，以下不妨设排列的 n 个元素为 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数，并将任意一个 n 阶排列记成 $p_1p_2\cdots p_n$.

例如，自然数 1,2,3,4 构成的 4 阶排列有 $4!=24$ 种：

1234，1243，1324，1342，1423，1432，2134，2143，2314，2341，2413，2431，

3124，3142，3214，3241，3412，3421，4123，4132，4213，4231，4312，4321.

2. 逆序数

对于 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数的任一 n 阶排列，我们要考虑其各元素之间

的次序.规定自然数从小到大构成的排列 $12\cdots n$ 为标准次序，称为**标准排列(或自然排列)**.

定义 2 对任一 n 阶排列，如果两个元素中较大元素排在较小元素的前面，那么就称这两个元素构成一个**逆序(反序)**.一个排列中所有逆序的总数，叫做这个排列的**逆序数**.用 $t(p_1p_2\cdots p_n)$ 表示 n 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

显然，标准排列的逆序数为 0.

逆序数的计算方法：

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 是自然数 1 到 n 的一个排列，若排在 1 前面的元素有 t_1 个，排在 2 前面比 2 大的元素有 t_2 个，排在 3 前面比 3 大的元素有 t_3 个，……排在 i 前面比 i 大的元素有 t_i 个，则

$$t(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}+t_n,\text{其中 } t_n=0.$$

例 1 求排列 43152 的逆序数.

解 $t(43152)=2+3+1+0+0=6$

3.排列的奇偶性

定义 3 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例如 排列 43152 是偶排列，321 是奇排列.

二、对换

定义 4 在一个排列中，把任意两个元素 i,j 的位置对调，而其他元素不动，就得到一个新的排列.对于排列所施行的这样一个变换叫做一个**对换**，记为 (i,j).将相邻的两个元素对换叫做**相邻对换**.

在对换下，排列的奇偶性会发生变化.

例如，排列 53124，经元素 3 和 2 对换，将改变奇偶性，$t(53124)=6$ 为偶排列，而 $t(52134)=5$ 为奇排列.

定理 1 对换改变排列的奇偶性.这就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

证明 (1) 先看相邻对换的情形：

设有排列 $p_1p_2\cdots p_tpqq_1q_2\cdots q_m$，对调 p、q 得到 $p_1p_2\cdots p_tqpq_1q_2\cdots q_m$.可以看出，经对换后，元素 $p_1,p_2,\cdots,p_t$ 和 $q_1,q_2,\cdots,q_m$ 的逆序数没有改变，而元素 p、q 的逆序数可能改变.当 $p<q$ 时，p 的逆序数增加 1，q 的逆序数不变；当 $p>q$ 时，p 的逆序数不变，q 的逆序数减少 1.

总之，相邻对换后的新排列与原来排列的逆序数相差 1，它们的奇偶性相

反.

(2) 一般对换的情形:

设有排列 $p_1p_2\cdots p_tpq_1q_2\cdots q_mqr_1r_2\cdots r_s$，对换 p、q，将排列变成 $p_1p_2\cdots p_tqq_1q_2\cdots q_mpr_1r_2\cdots r_s$. 这一对换可以看成是经若干次相邻对换得到的. 先将 p 元素与 $q_1,\cdots,q_m$ 依次作相邻对换，经 m 次以后，变成 $p_1\cdots p_tq_1\cdots q_mpqr_1\cdots r_s$；然后再将元素 q 与 $p,q_m,\cdots,q_1$ 依次作相邻对换，经 $m+1$ 次以后，变成 $p_1p_2\cdots p_tqq_1q_2\cdots q_mpr_1r_2\cdots r_s$，即为上述的新排列. 这就是说，经过 $2m+1$ 次相邻对换，把原来的排列变成新排列.

由(1)知，经 $2m+1$ 次相邻对换后，排列的奇偶性改变. 所以原排列与新排列的奇偶性不相同.

根据定理 1，经过奇数次对换后，排列改变其奇偶性；经过偶数次对换后，排列不改变其奇偶性. 而标准排列是偶排列，于是有

推论 1　奇排列对换成标准排列 $12\cdots n$ 的对换次数是奇数，偶排列对换成标准排列 $12\cdots n$ 的对换次数是偶数.

定理 2　$n(n\geqslant 2)$个元素的所有排列中，奇排列和偶排列的个数相等，各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明　n 个元素的所有 n 阶排列共有 $n!$ 个，设其中有 k 个奇排列、m 个偶排列，作同一个对换，例如对换 1、2，则可得到 k 个偶排列、得到 m 个奇排列，从而 $k\leqslant m$, $m\leqslant k$. 所以 $k=m$，即 $k=m=\frac{n!}{2}$.

§1.2　n 阶行列式的定义

一、二阶与三阶行列式

1. 二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1}$$

为消去未知数 x_2，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘上两方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，求得方程组(1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

(2)式中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得，其中分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1)的四个系数确定的，把这四个数按它们在方程组(1)中位置排成二行二列(横排称为行，竖排称为列)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

表达式(3)称为二阶行列式.

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(3)的元素或元，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列. 位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(3)的 (i,j) 元.

上述二阶行列式的定义，可以用对角线法则来记忆. 把 a_{11} 到 a_{22} 的连线称为**主对角线**，a_{12} 到 a_{21} 的连线称为**副对角线**，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

利用二阶行列式的概念，(2)式中 x_1、x_2 的分子也可以写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，

那么(2)式可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D}.$$

注意这里的分母 D 是方程组(1)的系数所确定的二阶行列式(称为系数行列式)，x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}，a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1 求解二元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1-2x_2=12, \\ 2x_1+x_2=1. \end{cases}$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 12\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3-(24)=-21,$$

因此 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{14}{7}=2, x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-21}{7}=-3$.

2. 三阶行列式

定义 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{matrix} \tag{4}$$

记

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{5}$$

则(5)式称为数表(4)所确定的三阶行列式.

上述定义表明三阶行列式含有 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其规律遵循图 1-1 所示的对角形法则:图中由三条实线看作是平行于主对角线的连线,三条虚对角线看作是平行于副对角线的连线,实线上三元素的乘积取正号,虚线上三元素的乘积取负号.

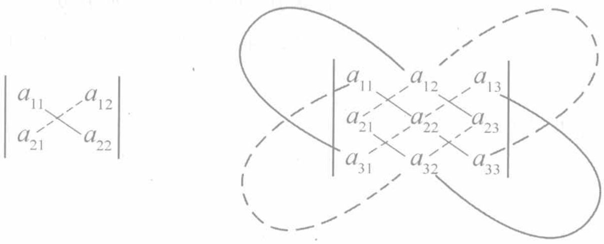

图 1-1

例 2 计算三阶行列式:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则,有

$D=1\times2\times(-2)+(-2)\times4\times(-4)+(-3)\times1\times2-(-4)\times2\times(-3)$

$-2\times(-2)\times(-2)-1\times4\times1=-14.$

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式，为研究四阶或更高阶行列式，下面通过排列的知识，引出 n 阶行列式的概念.

二、n 阶行列式的定义

1. 行列式的定义

观察二阶行列式和三阶行列式，它们的展开式分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

以上两式是用对角线法则来定义的.下面我们分析三阶行列式的表达式(5)的结构，希望把行列式概念推广到 n 阶情形.可以看出有如下三个规律：

(1)是 3！项的代数和；

(2)每一项都是取自不同行、不同列的三个元素的乘积：$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，其中第一个下标排列都是 123，第二个下标排列 $p_1p_2p_3$ 是 1，2，3 的某个排列，这样的排列共有 3！个.

(3)再来考察每一项的符号.三阶行列式右端前面三项取正号，它们的列标排列依次是 123，231，312，这些都是偶排列；后面三项取负号，它们的列标排列依次是 132，213，321，这些都是奇排列.因此，项 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 所取的符号可写成 $(-1)^{t(p_1p_2p_3)}$.

于是三阶行列式(5)可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{t(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

和号 $\sum$ 表示对 1，2，3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

根据三阶行列式这一定义形式，可以把行列式概念推广到 n 阶情形.

定义 1　n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n.\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{6}$$

是 $n!$ 项的代数和，这些项是一切可能的取自(6)中位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的符号为 $(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}$，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，即 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

和号 $\sum$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求得，共有 $n!$ 项.

有时把 n 阶行列式简记为 D、D_n 或 $D=\Delta(a_{ij})$，数 a_{ij} 称为 D 的元素.

用此定义所得到的二阶和三阶行列式，显然与前面给出的定义是一致的.

【注】当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$. 注意和 a 的绝对值区分开，需要时加以说明.

行列式从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**. 从右上角到左下角的对角线称为行列式的**副对角线**.

2. 三角行列式的计算

例 3 证明

(1) $$\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n;$$

(2) $$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1a_2\cdots a_n.$$

其中未写出的元素都是 0.

证 (1)由定义，此行列式除了 $(-1)^{t(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项外，其余项都含有 0 元素，值为 0，从而

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{t(12\cdots n)} a_1a_2\cdots a_n.$$

排列 $12\cdots n$ 的逆序数为 0，所以

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix} = (-1)^0 a_1 a_1 \cdots a_n = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

即该行列式的值等于主对角线上所有元素的乘积.

(2)类似于(1),该行列式中除了$(-1)^{t(n\cdots 21)} a_1 a_2 \cdots a_n$一项外,其余项都等于0.而此项的逆序数

$$t(n\cdots 21) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0 = \frac{n(n-1)}{2},$$

所以
$$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

例1中的行列式,除了对角线上的元素以外,其他元素全为0,这种行列式称为对角行列式,它的计算方便.

【注】主对角线上所有元素的乘积取正号,副对角线上所有元素的乘积未必取负号.例如

$$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & a_3 & & \\ a_4 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{4(4-1)}{2}} a_1 a_2 a_3 a_4 = a_1 a_2 a_3 a_4.$$

例 4 证明

(1)上三角行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$;

(2)下三角行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$;

(3) 反上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}$;

(4) 反下三角行列式 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}$.

证明 (1) 由定义此行列式除了$(-1)^{t(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$这一项外,其余项都含有 0 元素,值为 0,从而上三角行列式值为 $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

(2)同理,下三角行列式值也为 $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

(3)该行列式中除了$(-1)^{t(n\cdots 21)} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}$一项外,其余项都等于 0.而此项的逆序数

$$t(n\cdots 21) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

所以 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}$.

(4)同(3),反下三角行列式值也为$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}$.

【注】例 2 中行列式统称为三角行列式.在计算行列式时,常常把行列式化为上(下)三角行列式,以简化计算.例 2 结果可作为公式应用.

3. 按定义计算行列式

当行列式中 0 比较多时,可以按定义计算行列式:将每一项按第 1 行的元素写在第 1 个位置,第 2 行的元素写在第 2 个位置,…,第 n 行的元素写在第 n 个位置,然后计算列标排列的逆序数,决定该项的符号.

例 5 求下列行列式的值:

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ f & 0 & 0 & g \end{vmatrix}.$$

解 在四阶行列式 D 的所有项中,除 $aceg$、$bcef$ 两项外,其余项都为 0,$aceg$ 的列标排列为 1234,是偶排列;$bcef$ 的列标排列为 4231,逆序数为 5,是奇