□ 郭业才　编著

通信信号分析与处理

TONGXIN XINHAO FENXI YU CHULI

合肥工业大学出版社

通信信号分析与处理

郭业才 编著

合肥工业大学出版社

内 容 简 介

本书以通信信号的发送、传输与接收为主线，介绍了通信中的随机信号分析方法，通信信道的统计特性、建模与仿真方法；论述并讨论了自适应滤波性能准则与自适应算法，空间分集技术，码间干扰的形成机制、抑制方法及通信信道均衡与盲均衡的理论、算法与仿真技术；最后，分析了阵列信号处理理论与自适应天线算法。

本书既反映了先进的通信信号处理新技术，又是作者在信号处理和通信信号处理领域多年教学与科研工作的积累。可作为信息与通信工程专业及相关学科的大学高年级本科学生、研究生教材及从事这方面工作的科技工作者参考书。

图书在版编目(CIP)数据

通信信号分析与处理/郭业才编著．—合肥：合肥工业大学出版社，2009.1

ISBN 978-7-81093-894-5

Ⅰ．通… Ⅱ．郭… Ⅲ．①信号分析②信号处理 Ⅳ．TN911

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 002158 号

通信信号分析与处理

郭业才 编著　　　责任编辑 陆向军

出　版	合肥工业大学出版社	版　次	2009 年 1 月第 1 版
地　址	合肥市屯溪路 193 号	印　次	2009 年 1 月第 1 次印刷
邮　编	230009	开　本	787 毫米×1092 毫米　1/16
电　话	总编室：0551—2903038	印　张	17
	发行部：0551—2903198	字　数	413 千字
网　址	www.hfutpress.com.cn	印　刷	中国科学技术大学印刷厂
E-mail	press@hfutpress.com.cn	发　行	全国新华书店

ISBN 978-7-81093-894-5　　　定价：28.00 元

内容提要

本书按离散时间信号与系统及 Z 变换、离散傅里叶变换及其快速变换、数字滤波器设计三部分组织内容。全书共 8 章，包括绪论、离散时间信号与系统、Z 变换的基本性质和定理、离散傅里叶变换、快速傅里叶变换算法、数字滤波器的结构表示方法及其实现、IIR 数字滤波器的设计方法及其实现、FIR 数字滤波器的设计方法及其实现。

本书在选材与叙述上力求简明扼要，以尽可能少的篇幅系统地介绍了数字信号处理的基本概念、理论、算法和实现。书中通过软件实现的滤波器设计实例可以帮助学生更加直观地掌握课程内容，并为今后在工程上的应用打下坚实的基础。

本书可以作为电子信息工程、通信工程、计算机应用、微电子、自动化、仪器工程等专业本科生和研究生的教材，也可以作为工程技术人员的自学参考书。

前　言

通信信号分析与处理涉及通信和信号处理及计算机科学等学科，是从事通信与信息处理研究的科技工作者、大学高年级学生、研究生和教师应具备的理论基础与应掌握的基本方法。但是，国内有关这方面基本理论、方法与应用的专著或教材并不多，鉴于这种情况，作者在多年教学实践与科研积累的基础上，吸收国内外有关教材、专著及科研论文中的一些成果编写了本书。

在编写中，以通信信号传输流程为主线，涉及通信中随机信号分析、通信信道、自适应算法、空间分集技术、码间干扰与信道均衡、通信信道盲均衡、波束形成等方面的内容。

本书具有以下特点：

1. 注重系统性：所有的章节内容构成了一个较为系统的知识体系，同时注意内容之间的合理衔接与划分，层次分明，重点突出。

2. 体现新颖性：整个知识点起点高，基本理论和算法阐述清晰，循序渐进；同时注意吸收新理论与新技术成果。

3. 强调实用性：围绕通信信号处理方法论述，对各方法作了必要的分析与说明，以利读者应用方法的思想去解决实际问题。

4. 突出引导性：对基础性的理论与算法进行了详细的论证推导，以此为基础，读者可按类似的方法对感兴趣的理论与算法进行论证与推导，这有利于提高读者分析问题和解决问题的能力。

5. 加强实践性：书中有较多的例题或算法仿真实例，感兴趣的读者可按书中给出的仿真条件进行仿真实践，并配有适量的习题，能有效帮助读者对算法原理的消化与吸收，加深对基本概念的理解，对先进思想的掌握。

当然，近几年来，通信信号分析与处理得到了快速发展，其深度和广度已经达到了前所未有的水平，作者只是根据自己的理解和思路加以归纳和论述。尽管作者反复斟酌及仔细校对，但限于作者的水平，书中难免会出现一些错误和不妥之处，诚请专家和读者给予批评指正。

本书在编写过程中，参阅了该领域有关专家的专著及科研成果，在此向他们表示真诚的谢意。同时，感谢全国优秀博士学位论文作者专项资金资助项目(200753)的支持，感谢合肥工业大学出版社的领导和编辑为本书做了许多精细的工作，使本书得以出版，并能较好地奉献给读者。

郭业才

2009 年 1 月

目　录

第2章 通信信道

第3章 自适应滤波算法

第 4 章　空间分集

第 5 章　码间干扰与信道均衡

第 6 章　通信信道的盲均衡

第7章 阵列信号处理

第 1 章　通信中随机信号分析

【内容提要】　本章从随机过程的基本概念入手，介绍了随机过程、平稳随机过程、高斯随机过程（含亚高斯和超高斯）的统计特性（概率分布、分布函数、概率密度函数、数学期望、方差、相关函数与功率谱密度等）；讨论了随机信号通过线性系统和非线性系统时的输入输出特性；分析了窄带随机过程的特点、窄带高斯随机过程及正弦波加窄带高斯随机过程的统计特性。

通信过程是有用信号通过通信系统的过程，在这一过程中常伴有噪声的传输，分析与研究通信系统离不开对信号和噪声的分析。通信系统中的信号通常具有某种随机性称为随机信号，该信号的某个或几个参数是不能预知或不能完全预知的。同样，通信系统中遇到的噪声是不能预测的。凡是不能预测的噪声统称为随机噪声，简称为噪声。从统计数学的角度看，随机信号和噪声统称为随机过程。统计数学中有关随机过程的理论可以运用到随机信号和噪声的分析中来。

1.1　随机过程的一般表述

通信过程中的随机信号和噪声，可归纳为依赖于时间参数 t 的随机过程。它在任一时刻上观察到的值是不确定的，是一个随机变量。或者，它可以被看成是随机实验的可能出现的 $X(t)$ 函数，存在一个由全部可能实现构成的总体，每个实现都是一个确定的时间函数，而随机性体现在出现哪一个实现是不确定的。例如，有 N 台性能完全相同的通信机，工作条件相同，用 N 部记录仪同时记录它们的输出噪声，如图 1.1 所示。

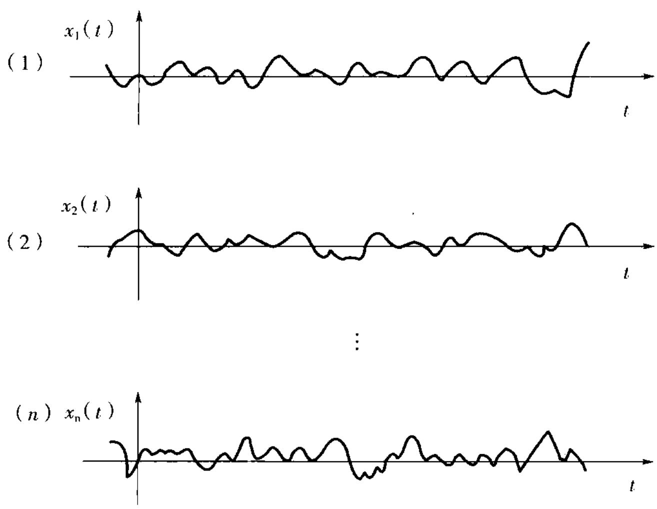

图 1.1　N 部通信机的噪声输出记录

现从数学的角度，对随机过程 $X(t)$ 进行定义。

【定义 1.1.1】 设随机试验的可能结果为 $X(t)$，试验的样本空间为 $\{x_1(t),x_2(t),\cdots,x_N(t)\}$，$x_i(t)$ 为第 i 个样本函数(实现)，每次试验后，$X(t)$ 取样本空间中的某一样本函数，称此 $X(t)$ 为随机函数。当 t 为时间变量时，称随机函数 $X(t)$ 为随机过程。如果随机过程在时间轴上是等间隔间断的，且在任意离散时刻上其样本函数值是连续的，称为连续随机序列。如果在任意时刻样本函数值是离散的，则称为离散随机序列。

随机过程的统计特性可用概率分布(分布函数、概率密度函数)和数字特征(数学期望、方差、相关函数)来描述。

1.1.1 随机过程的概率分布

设 $X(t)$ 表示一个随机过程，则在任一时刻 t_1 上 $X(t_1)$ 是一个随机变量，称 $F_X(x_1,t_1)=P\{X(t_1)\leqslant x_1\}$ 为 $X(t)$ 的一维分布函数，即随机过程 $X(t)$ 在 t_1 时刻所对应的随机变量 $X(t_1)$ 的分布函数。

如果存在

$$\frac{\partial F_X(x_1,t_1)}{\partial x_1}=p_X(x_1,t_1) \tag{1.1.1}$$

则称 $p_X(x_1,t_1)$ 为 $X(t)$ 的一维概率密度函数。一维分布律只表征随机过程在一固定时刻 t 上的统计特性。若要了解随机过程详细的情况，还需研究随机过程的二维分布律，甚至多维分布律。

$X(t)$ 的 N 维分布函数

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_N,t_1,t_2,\cdots,t_N)=P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2,\cdots,X(t_N)\leqslant x_N\} \tag{1.1.2}$$

如果存在

$$\frac{\partial^N F_X(x_1,x_2,\cdots,x_N,t_1,t_2,\cdots,t_N)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_N}=p_X(x_1,x_2,\cdots,x_N,t_1,t_2,\cdots,t_N) \tag{1.1.3}$$

则称 $p_X(x_1,x_2,\cdots,x_N,t_1,t_2,\cdots,t_N)$ 为 $X(t)$ 的 N 维概率密度函数。N 维概率密度函数或 N 维分布函数表征了随机过程 $X(t)$ 在 N 个时刻上和 N 个时刻间的统计分布律。N 越大，N 维概率密度函数或 N 维分布函数描述 $X(t)$ 的统计特性越充分。

对于随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$，它们的四维联合概率密度函数定义为

$$\frac{\partial^4 F_{XY}(x_1,x_2,y_1,y_2,t'_1,t'_2)}{\partial x_1\partial x_2\partial y_1\partial y_2}=p_{XY}(x_1,x_2,y_1,y_2,t_1,t_2,t'_1,t'_2) \tag{1.1.4}$$

若随机过程 $X(t)$、$Y(t)$ 互相独立，则

$$\begin{aligned}&p_{XY}(x_1,\cdots,x_N,y_1,\cdots,y_M,t_1,\cdots,t_N,t'_1,\cdots,t'_M)=\\&p_X(x_1,\cdots,x_N,t_1,\cdots,t_N)p_Y(y_1,\cdots,y_M,t'_1,\cdots,t'_M)\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

需要注意的是：两个随机过程互相独立与一个随机过程不同时刻互相独立在概念上是不

同的。

1.1.2　随机过程的特征函数

随机过程的多维特征函数与多维概率分布一样，也能完整地描述随机过程的统计特性。同样，在求解随机过程的概率密度函数和矩函数时，利用特征函数也可明显地简化运算。

1. 一维特征函数

(1) 一维特征函数

随机过程 $X(t)$ 在任一时刻 t 的取值 $X(t)$ 是一个一维随机变量，$X(t)$ 的特征函数为

$$\Phi_X(\omega;t) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega X(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x} p_X(x;t)\mathrm{d}x \tag{1.1.6}$$

称式(1.1.6)为随机过程 $X(t)$ 的一维特征函数。显然，它是 ω 和 t 的函数。式中，$x = x(t)$ 为 $X(t)$ 可能的取值；$p_X(x;t)$ 为随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度函数，其与 $\Phi_X(\omega;t)$ 是一对傅里叶变换，即有

$$p_x(x;t) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega X(t)}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\omega;t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}\omega \tag{1.1.7}$$

(2) 矩函数与特征函数之间关系

随机过程 $X(t)$ 的特征函数也可以唯一地由其 N 阶原点矩所决定，即

$$\frac{\partial^N \Phi_X(\omega;t)}{\partial \omega^N} = \mathrm{j}^N \int_{-\infty}^{\infty} x^N \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x} p_X(x;t)\mathrm{d}x \tag{1.1.8}$$

同理，随机过程 $X(t)$ 的 N 阶原点矩可以唯一的被其特征函数所决定，即

$$\mathrm{E}[X^N(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^N p_x(x;t)\mathrm{d}x = (-\mathrm{j})^N \left.\frac{\partial^N \Phi_X(\omega;t)}{\partial \omega^N}\right|_{\omega=0} \tag{1.1.9}$$

2. 二维特征函数

随机过程 $X(t)$ 在任意两个时刻 t_1、t_2 的取值，构成二维随机变量 $[X(t_1), X(t_2)]$，其特征函数定义为

$$\Phi_X(\omega_1,\omega_2;t_1,t_2) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 X(t_1)+\mathrm{j}\omega_2 X(t_2)}] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 x_1+\mathrm{j}\omega_2 x_2} p_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{1.1.10}$$

该式称为随机过程 $X(t)$ 的二维特征函数。显然，它是 x_1、x_2 和 t_1、t_2 的函数。式中，$x_1 = x(t_1)$、$x_1 = x(t_2)$ 分别为随机变量 $X(t_1)$、$X(t_2)$ 可能的取值；$p_X(x_1;x_2;t_1,t_2)$ 是随机过程 $X(t)$ 的二维概率密度函数，它与二维特征函数 $\Phi_X(\omega_1,\omega_2;t_1,t_2)$ 构成二重傅里叶变换对，即有

$$p_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\omega_1,\omega_2;t_1,t_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_1 x_1+\omega_2 x_2)}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2 \tag{1.1.11}$$

将式(1.1.10)两边对变量 ω_1、ω_2 各求一次偏导数，得

$$\frac{\partial \Phi_X(\omega_1,\omega_2;t_1,t_2)}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} = \mathrm{j}^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1 x_1+\omega_2 x_2)} p_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{1.1.12}$$

故有

$$R_X(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2p_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=-\frac{\partial\Phi_X(\omega_1,\omega_2;t_1;t_2)}{\partial\omega_1\partial\omega_2}\Big|_{\omega_1=\omega_2=0} \tag{1.1.13}$$

3. N 维特征函数

随机过程 $X(t)$ 的 N 维特征函数定义为

$$\begin{aligned}\Phi_X(\omega_1,\cdots,\omega_N;t_1,\cdots,t_N)&=\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1X(t_1)+\cdots+\mathrm{j}\omega_NX(t_N)}]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1x_1+\cdots+\omega_Nx_N)}p_X(x_1,\cdots,x_N;t_1,\cdots,t_N)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N\end{aligned} \tag{1.1.14}$$

根据逆转公式，由随机过程 $X(t)$ 的 N 维特征函数可以求得 N 维概率密度函数

$$p_X(x_1,\cdots,x_N;t_1,\cdots,t_N)=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_X(\omega_1,\cdots,\omega_N;t_1,\cdots,t_N)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_1x_1+\cdots+\omega_Nx_N)}\mathrm{d}\omega_1\cdots\mathrm{d}\omega_N \tag{1.1.15}$$

1.1.3 随机过程的数字特征

实际上，获得随机过程 $X(t)$ 的 N 维分布是非常不易的。因此，主动避开求 N 维分布律问题，转到随机过程的数字特征。

1. 数学期望

在任意时刻 t，随机过程是一个一维随机变量 $X(t)$，其数学期望 $\mathrm{E}[X(t)]$ 就是 t 时刻随机过程的数学期望，即

$$\mathrm{E}[X(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot p_X(x,t)\mathrm{d}x=m_X(t) \tag{1.1.16}$$

$\mathrm{E}[X(t)]$ 表示了随机过程 $X(t)$ 在每个时刻的波动中心，反映了随机过程的一维统计特性。一般情况下，它是时间的函数。

2. 方差

方差可记为 $\mathrm{D}[X(t)]$ 或 $\sigma_X^2(t)$，定义为

$$\mathrm{D}[X(t)]=\mathrm{E}\{[X(t)-\mathrm{E}[X(t)]]^2\} \tag{1.1.17a}$$

$$\mathrm{D}[X(t)]=\mathrm{E}[X^2(t)]-\mathrm{E}^2[X(t)] \tag{1.1.17b}$$

$$\mathrm{D}[X(t)]=\int_{\infty}^{+\infty}x^2p_X(x,t)\mathrm{d}t-[m_X(t)]^2 \tag{1.1.17c}$$

也称均方值，是随机过程的所有样本函数在时刻 t 与均值偏离量的平方的统计平均，是一维统计特性，总是正数，一般情况也是时间 t 的函数。

3. 自协方差函数

衡量随机过程任意两个时刻上获得的随机变量的统计相关特性时，常用协方差函数和相关函数来表示。衡量同一过程的相关程度，又称为自协方差函数或自相关函数。

设 $X(t_1)$,$X(t_2)$ 是随机过程 $X(t)$ 在任意两个时刻 t_1 和 t_2 上的两个随机变量;$p_X(x_1,x_2;t_1,t_2)$ 是二维概率密度函数,则自协方差定义为

$$C_X(t_1,t_2)=\mathrm{E}\{[X(t_1)-m_X(t_1)]\cdot[X(t_1)-m_X(t_2)]\} \tag{1.1.18}$$

$$C_X(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x_1-m_X(t_1)]\cdot[x_2-m_X(t_2)]p_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{1.1.19}$$

自协方差函数 $C_X(t_1,t_2)$ 描述了随机起伏量相对均值的幅度变化。当 $t_1=t_2$ 时,自协方差函数就退化为方差。

4. 自相关函数 $R_X(t_1,t_2)$

$$R_X(t_1,t_2)=\mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_1p_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{1.1.20}$$

自协方差函数、自相关函数体现了随机过程的二维统计特性,两者的不同之处在于自协方差函数描述的随机起伏是相对数学期望的幅度变化,两者的关系为

$$\begin{aligned}C_X(t_1,t_2)&=R_X(t_1,t_2)-\mathrm{E}[X(t_1)]\cdot\mathrm{E}[X(t_2)]\\&=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2)\end{aligned} \tag{1.1.21}$$

$$\rho(t_1,t_2)=\frac{C_X(t_1,t_2)}{m_X(t_1)m_X(t_2)}=\frac{R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2)}{m_X(t_1)m_X(t_2)} \tag{1.1.22}$$

式中,相关系数 $\rho(t_1,t_2)$ 表示在任意两个时刻 t_1 和 t_2 上 $X(t_1)$,$X(t_2)$ 的相关程度。$\rho(t_1,t_2)=0$ 或 $C_X(t_1,t_2)=0$ 表明 $X(t_1)$,$X(t_2)$ 不相关。

5. 互协方差函数与互相关函数

随机过程 $X(t)$ 在 t_1 时刻的随机变量为 $X(t_1)$,随机过程 $Y(t)$ 在 t_2 时刻的随机变量为 $Y(t_2)$,则互相关函数定义为

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\mathrm{E}[X(t_1)Y(t_2)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyp_{XY}(x,y;t_1,t_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.1.23}$$

$$\begin{aligned}C_{XY}(t_1,t_2)&=\mathrm{E}[\{X(t_1)-m_X(t_1)\}\{Y(t_2)-m_Y(t_2)\}]\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x-m_X(t_1)]\cdot[y-m_Y(t_2)]p_{XY}(x,y;t_1,t_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{1.1.24}$$

$$C_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_Y(t_2) \tag{1.1.25}$$

若对任意两个时刻 t_1 和 t_2,都有 $R_{XY}(t_1,t_2)=0$,称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是正交过程,此时

$$C_{XY}(t_1,t_2)=-m_X(t_1)m_Y(t_2) \tag{1.1.26}$$

若对任意两个时刻 t_1 和 t_2,都有 $C_{XY}(t_1,t_2)=0$,称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是互不相关的,即

$$R_{XY}(t_1,t_2)=m_X(t_1)m_Y(t_2) \tag{1.1.27}$$

1.2 平稳随机过程

平稳随机过程是随机过程中非常重要的过程之一，它具有许多突出的特性，并且提供了一类分析问题的方法，许多非平稳随机过程可以化为局部平稳随机过程来分析，实际中我们关心的通信信号正是采用了这样的分析方法和思路。

1.2.1 平稳随机过程

平稳随机过程是指它的任何 N 维分布函数或概率密度函数与时间起点无关。即一个随机过程 $X(t)$，如果在时域上时移 τ，而其统计特性不变，则称之为严格的平稳随机过程(或狭义平稳过程)。即对于任意的正整数 N 和任意的实数 $t_1,t_2,\cdots,t_N,\tau$，随机过程 $X(t)$ 的 N 维概率密度函数满足

$$p_X(x_1,x_2,\cdots,x_N;t_1,t_2,\cdots,t_N) = p_X(x_1,x_2,\cdots,x_N;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_N+\tau) \tag{1.2.1}$$

称 $X(t)$ 是平稳随机过程。平稳随机过程的统计特性将不随时间的推移而不同，它的一维分布与 t 无关，二维分布只与时间间隔 τ 有关。如果

$$p_{XY}(x_1,x_2,\cdots,x_N,y_1,y_2,\cdots,y_N;t_1,t_2,\cdots,t_N,t'_1,t'_2,\cdots,t'_N) =$$

$$p_{XY}(x_1,x_2,\cdots,x_N,y_1,y_2,\cdots,y_N;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_N+\tau,t'_1+\tau,t'_2+\tau,\cdots,t'_N+\tau)$$

则称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是联合平稳随机过程。

1.2.2 平稳随机过程的数字特征

如果平稳随机过程 $X(t)$ 的数学期望与 t 无关即

$$\mathrm{E}[X(t)] = m_X(\text{常数}) \tag{1.2.2}$$

而其自相关函数只与时间间隔 τ 有关，即

$$R_X(t_1,t_1+\tau) = R_X(\tau) \tag{1.2.3}$$

则称随机过程 $X(t)$ 是宽平稳的或广义平稳的，具有各态历经性。所谓各态历经性是指从随机过程中得到的任一实现，好像它经历了随机过程的所有可能状态。或者说平稳随机过程的各个样本函数都同样经历了随机过程的所有可能状态。因此，平稳随机过程的数字特征完全可由随机过程中的任一实现的数字特征来决定。随机过程的数学期望(统计平均)，可以由任一实现的时间平均来代替。随机过程的自相关函数，也可以用“时间平均”来代替“统计平均”。

设平稳随机过程 $X(t)$ 的一次试验样本函数为 $x(t)$，则其统计平均可以用时间平均来代替。

平稳随机过程 $X(t)$ 数学期望的时间平均表示为

$$\overline{< X(t) >} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.2.4}$$

平稳随机过程的自相关函数时间平均表示为

$$\overline{< X(t)X(t+\tau) >} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t = R_X(\tau) \tag{1.2.5}$$

【定义 1.2.1】　对于平稳随机过程 $X(t)$，

(1) 若以概率 1，有

$$\overline{< X(t) >} = m_X \tag{1.2.6}$$

则称 $X(t)$ 的均值具有各态历经性。

(2) 对任意的 τ，以概率 1，有

$$\overline{< X(t)X(t+\tau) >} = R_X(\tau) \tag{1.2.7a}$$

则称 $X(t)$ 的自相关函数具有各态历经性。对 $\tau = 0$，有

$$\overline{< X(t)X(t) >} = R_X(0) \tag{1.2.7b}$$

则称 $X(t)$ 的均方值具有各态历经性。

(3) 均值和相关函数都具有各态历经性的平稳随机过程，称为各态历经过程。各态历经过程又称为遍历性。

【例 1.2.1】　设随机过程

$$X(t) = tY$$

式中，Y 是随机变量。试讨论 $X(t)$ 的平稳性。

解：$\mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[tY] = t\mathrm{E}[Y] = tm_Y$

$R_X(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}[t_1Yt_2Y] = t_1t_2\mathrm{E}[Y^2]$

可见，该随机过程的均值和自相关函数均与时间有关，所以不是平稳随机过程。

【例 1.2.2】　设随机过程

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

式中，A、ω_0 为常数，φ 是在$(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量，试证 $X(t)$ 宽平稳。

证：由题意可知，随机变量 φ 的概率密度函数为

$$p_\varphi(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & 0 < \varphi < 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} A\cos(\omega_0 t + \varphi)\cdot\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 0$$

$$\begin{aligned} R_X(t, t+\tau) &= \mathrm{E}[A\cos(\omega_0 t + \varphi)A\cos(\omega_0(t+\tau) + \varphi)] \\ &= \frac{A^2}{2}\mathrm{E}[\cos(\omega_0\tau) + \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau + 2\varphi)] = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau) \end{aligned}$$

$$\mathrm{E}[X^2(t)] = R_X(t, t) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\cdot 0) = \frac{A^2}{2} < \infty$$

由此可见，$X(t)$ 的均值为 0，自相关函数仅与 τ 有关，均方值有限，故 $X(t)$ 为宽平稳随机过程。