数学分析学习指导书

（第二版）

下册

刘玉琏 主编

高等教育出版社

★ GAODENG JIAOYU CHUBANSHE

ISBN 7-04-004975-9
9 787040 049756 >
定价　9.40 元

数学分析学习指导书

（第 二 版）

下 册

刘玉琏 吕凤 苑德新 王大海 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是与刘玉琏主编的中学教师培训教材《数学分析》(第二版，下册)配套的学习指导书．按教材章节对应编写．每章包括“内容结构”、“学习要求”、“学习辅导”、“习题解答”、“自我检查题”等几个部分．“内容结构”主要概述内容的安排、处理及所处的地位、作用；“学习辅导”对重要概念、理论、计算及与中学数学有密切联系的问题作进一步说明．书末附有自我检测题答案．

图书在版编目(CIP)数据

数学分析学习指导书　下册/刘玉琏等编．—2版．—北京：高等教育出版社，1995（**2003**重印）

ISBN 7－04－004975－9

Ⅰ．数...　Ⅱ．刘...　Ⅲ．数学分析—指导读物　Ⅳ．O17

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第04585号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100009	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010－64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京天河印刷厂		
		版　　次	1988年10月第1版
开　　本	850×1168　1/32		1994年10月第2版
印　　张	7.125	**印　　次**	**2003**年**4**月第**8**次印刷
字　　数	180 000	**定　　价**	**9.40**元

目　　录

第八章 定 积 分

内容结构

本章有四节十二段．重点是定积分定义、可积条件和定积分的计算．

一元函数积分学的核心就是本章所讲的定积分，在数学分析中不论是在理论上或应用上，它都占有重要的地位．掌握定积分的构造性定义及其数学思想，对学习多元函数的积分学也是有益的．定积分概念，同其它数学概念一样，也是由实际需要产生的．为了讲清定积分定义的客观背景，首先讲了两个几何方面的实例：一个是曲边梯形的面积；另一个是锥体的体积(8.1.1)．这两个几何方面的实例与高中《立体几何》计算某些几何量有着密切联系．其次在两个实例的基础上给出了抽象的定积分定义，即特定结构和式(积分和)的极限(8.1.2)．积分和的极限与以前学过的函数极限在形式上有所不同，应予注意．有了定积分定义之后，从数学角度来说，紧接着要讨论定积分的存在性、性质以及计算等三个问题：

第一，定积分的存在性，即特定结构和式极限存在的必要与充分条件．这里首先给出可积的必要条件(8.2.1)．可积的必要条件虽然有用，但是更有用的是可积的充分条件．为了得到可积的充分条件，先给出与积分和有关的小和与大和的定义及其性质(8.2.2)，在此基础上给出了可积的必要充分条件(可积准则)

(8.2.3). 然后运用可积准则的充分性证明了三类比较常见的函数是可积的(8.2.4).

第二，定积分的性质(8.3.1 与 8.3.2). 在理论上或计算上都要应用定积分的性质. 这里介绍的定积分的性质可分为四组：线性性(定理 1、定理 2)、区间可加性(定理 3 及其推论)、单调性(定理 4、定理 5)、中值性(定理 6、定理 7).

第三，定积分的计算. 将定积分有效地应用于实际问题必须解决定积分的计算问题. 定积分的定义虽然给出了计算定积分的步骤和方法，但是计算积分和的极限，一般来说，都是十分困难的，甚至无从着手. 因此，计算定积分不能按照定积分定义进行，必须另辟蹊径. 解决定积分计算问题与沟通微分与积分的微积分基本定理(8.4.1)密切联系着. 微积分基本定理在理论上十分重要，它把分别独立定义的、似乎是无关的微分与积分的概念联系起来. 通过牛-莱公式(8.4.2)，把计算定积分的问题归结为求被积函数的不定积分(或原函数)，从而得到计算定积分的简便易行的方法. 这样我们就明白了在讲定积分之前用了一定篇幅讲授不定积分的目的. 为了进一步简化定积分的计算，将不定积分的变数替换法和分部积分法与牛-莱公式结合起来就得到定积分的变数替换公式(8.4.3)和定积分的分部积分公式(8.4.4).

学习要求

1. 理解和掌握定积分概念，知道构造积分和的方法与积分和极限的意义.

2. 了解可积准则，掌握可积函数类.

3. 掌握定积分的性质与微积分基本定理. 能熟练地应用

牛－莱公式计算定积分.

4. 掌握定积分的变数替换法和分部积分法.

§ 8.1 定 积 分

学习辅导

1. 积分和的极限及其存在性

设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$有界. 分割 T 将区间$[a,b]$分成 n 个小区间:

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n].\ x_0=a,x'_n=b.$$

设第 k 个小区间$[x_{k-1},x_k]$的长是 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$,而

$$l(T)=\max_T\{\Delta x_k \mid 1\leqslant k\leqslant n\}.$$

在第 k 个小区间$[x_{k-1},x_k]$上任取一点 ξ_k $(x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k)$, 有积分和

$$\sigma(T,\xi)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

由此可见, 使积分和 $\sigma(T,\xi)$发生变化的因素较多, 因此变化的情况也比较复杂. 这就给我们研究它的变化趋势带来许多的麻烦.

我们以前遇到的极限都是函数的极限(包括数列极限), 而积分 σ 和$\sigma(T,\xi)$并不是 $l(T)$的函数. 那么当 $l(T)\to 0$ 时, 积分和$(T,\xi)\to I$ 是什么意思呢?

从形式上说, 当 $l(T)$充分小时, 分割 T 的每个小区间的长 Δx_k $(1\leqslant k\leqslant n)$都充分小. 如果$\{\xi_k\}$的变化对积分和 $\sigma(T,\xi)$影响不大,尽管积分和 $\sigma(T,\xi)$的变化是比较复杂的, 但是积分和的变化是能够有一个稳定的变化趋势的, 使其与

数 I 无限接近.

用分析语言(即“$\varepsilon-\delta$”语言)来叙述，实质是积分和极限的定义，就是:

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall T: l(T)<\delta, \forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \text{有}$$

$$|\sigma(T,\xi)-I| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I\right| < \varepsilon.$$

积分和 $\sigma(T,\xi)$能有稳定的变化趋势，那只有除个别 ξ_k 外，绝大多数的 ξ_k 的变化，不会使函数 $f(\xi_k)$有显著变化，即函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上除“少数”点不连续外，基本上都是连续的才有可能. 因此，积分和 $\sigma(T,\xi)$存在极限，即函数 $f(x)$在$[a,b]$可积，要求函数 $f(x)$在$[a,b]$的不连续点“不能太多”或 $f(x)$“不能太不连续”. 否则就不可积(关于这个问题就不能详细深述了). 例如，狄利克莱函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in \mathbf{Q}\cap[a,b],\\ 0, & x\in(\mathbf{R}-\mathbf{Q})\cap[a,b],\end{cases}$$

在$[a,b]$上的不连续点太多了，因此它不可积. 从这个意义上说，定积分基本上是对连续函数类所定义的积分.

§8.2 函数可积条件

学习辅导

1. 关于小和与大和

函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的积分和

$$\sigma(T,\xi)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

的变化因素较多，变化也比较复杂．对比而言，函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上关于分割 T 的小和与大和

$$s(T)=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k \quad 与 \quad S(T)=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$$

的变化比较简单，它只与分割 T 有关，当分法 T 给定之后，不论$\{\xi_k\}$怎样选取，总有

$$s(T)\leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\leqslant S(T).$$

这样就把变化比较复杂的积分和 $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ 夹在两个比较简单的小和 $s(T)$与大和 $S(T)$之间．从而就能够借助于两边夹定理的思想方法，讨论积分和极限的存在性，达到了化繁为简的目的．这样引入小和与大和的目的就清楚了．因为关于积分和的极限没有给出两边夹定理，所以不能直接引用函数极限的两边夹定理．因此，函数 $f(x)$在$[a,b]$可积的必要充分条件(8.2.3 定理 2)是根据函数极限的两边夹定理的思想方法证明的．

2. 关于函数可积性的证明

一般来说，证明函数的可积性经常应用 8.2.3 定理 2′的充分性，即只须证明：

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0,\forall\,T:l(T)<\delta,有 \sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon,$$

其中 $\omega_k=M_k-m_k$ 是函数$f(x)$在$[x_{k-1},x_k]$上的振幅．

为了证明 $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$，只能从两个方面入手：

一是，所有小区间上的振幅 ω_k 一致地小于ε．例如，证明在闭区间$[a,b]$连续的函数 $f(x)$的可积性(8.2.4 定理 3)就是如此．根据函数 $f(x)$在$[a,b]$上的一致连续性，即

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0,\forall\,T:l(T)<\delta,有\ \omega_k<\varepsilon(1\leqslant k\leqslant n).$$

从而，$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon(b-a).$$

二是，所有小区间的长 Δx_k 都一致地小于 ε. 例如，证明在闭区间 $[a,b]$ 单调增加（或单调减少）函数 $f(x)$ 的可积性（8.2.4 定理 4）就是如此：

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0(\delta<\varepsilon), \forall T: l(T)<\delta$，有 $\Delta x_k<\delta<\varepsilon(1\leqslant k\leqslant n)$.

从而 $$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \omega_k$$
$$= \varepsilon \sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})] = \varepsilon[f(b)-f(a)].$$

一般情况，将振幅和 $\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k$ 分成两部分：一部分是第一种情况；另一部分是第二种情况，两部分振幅和的和 $\sum \omega'_k \Delta x_k + \sum \omega''_k \Delta x_k$ 能任意小. 例如，证明在闭区间 $[a,b]$ 有界，且有有限个不连续点函数的可积性（8.2.4 定理 5）就是如此.

习题 8.2 解答

2. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调增加，则
$$f(a)(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant f(b)(b-a).$$

证 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调增加，根据定理 4，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$，从而，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 关于分割 T 和取法 ξ 的积分和 $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$，有
$$f(a)(b-a) = f(a)\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant f(b)\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k$$
$$= f(b)(b-a).$$
令 $l(T)\to 0$，有

$$f(a)(b-a)\leqslant\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\leqslant f(b)(b-a),$$

因为 $f(x)$在$[a,b]$可积，所以

$$f(a)(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant f(b)(b-a).$$

3. 证明：若函数 $f(x)$在$[a,b]$连续，则 $\exists M>0$，$\forall x_1$，$x_2\in[a,b]$，有

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx\right|\leqslant M|x_2-x_1|.$$

证 已知函数 $f(x)$在$[a,b]$连续，根据 3.2.1 定理 1 函数 $f(x)$在$[a,b]$有界，即 $\exists M>0$，$\forall x\in[a,b]$，有 $|f(x)|\leqslant M$.

$\forall x_1$，$x_2\in[a,b]$，不妨设 $x_1<x_2$. 函数 $f(x)$在$[x_1,x_2]$关于分割 T 和取法 ξ 的积分和有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)|\Delta x_k\leqslant M\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=M(x_2-x_1)$$

或
$$-M(x_2-x_1)\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\leqslant M(x_2-x_1).$$

已知函数 $f(x)$在$[x_1,x_2]$连续，从而 $f(x)$在$[x_1,x_2]$可积，当 $l(T)\to 0$ 时，有

$$-M(x_2-x_1)\leqslant\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx\leqslant M(x_2-x_1)$$

或
$$\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx\right|\leqslant M|x_2-x_1|.$$

4. 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[a,b],\\ 1, & x=a,\end{cases}$$

在$[a,b]$可积，且 $\int_a^b f(x)\,dx=0$，

证 从题设可知函数 $f(x)$在$[a,b]$单调减少. 根据定理 4,

函数 $f(x)$在$[a,b]$可积. 作函数 $f(x)$在$[a,b]$关于分割 T 和取特殊的ξ $(\xi_1 \neq a)$的积分和 $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$，已知 $f(\xi_k)=0$，$k=1, 2, \cdots, n$. 于是，定积分

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{l(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = 0.$$

5. 证明：若函数 $f(x)$在$[a,b]$可积，$c\in[a,b]$，函数

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[a,b]-\{c\}, \\ k\ (\text{常数}), & x=c, \end{cases}$$

则函数 $g(x)$在$[a,b]$也可积，且

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

证 考虑函数

$$F(x)=\begin{cases} f(x)-g(x)=0, & x\in[a,b]-\{c\}, \\ f(c)-k, & x=c. \end{cases}$$

显然，函数 $F(x)$在$[a,b]$仅有一个第一类不连续点 c. 因此，$F(x)$在$[a,b]$可积. 作函数 $F(x)$在$[a,b]$关于分割 T 和取法ξ的积分和 $\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k$，设 $c\in[x_{i-1},x_i]$. $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$.

总取 $\xi_i\neq c$. 有 $F(\xi_k)=0$，$k=1, 2, \cdots, n$. 从而，

$$\int_a^b F(x)\,dx = \lim_{l(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k = 0.$$

对$[a,b]$的任意分割 T 和任意取法ξ，作积分和，有

$$\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k$$

或
$$\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k.$$

已知函数 $f(x)$与 $F(x)$在$[a,b]$可积. 当 $l(T)\to 0$ 时，有

$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k$$

$$=\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k$$

$$=\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

即函数 $g(x)$在$[a,b]$可积，且

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

6. 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x\text{ 是有理数},\\ -1, & x\text{ 是无理数},\end{cases}$$

在$[0,1]$不可积. 而$|f(x)|$在$[0,1]$可积. 由此可得出什么结论?

证 作函数$f(x)$在$[0,1]$关于分割 T 和取法ξ的积分和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

取 ξ_k 都是有理数，有

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = 1.$$

取 ξ_k 都是无理数，有

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = -\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = -1.$$

当 $l(T)\to 0$ 时，积分和 $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ 不存在极限. 于是，函数 $f(x)$在$[0,1]$不可积.

函数$|f(x)|\equiv 1$. 在$[0,1]$是连续函数，于是$|f(x)|$在$[0,1]$可积.

上述事实说明，函数$|f(x)|$在$[a,b]$可积，而函数$f(x)$在$[a,b]$不一定可积.

7. 判定下列函数在指定区间是否可积：

(1) $f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,1],\\ x-2, & x\in[1,2],\end{cases}$ 在$[0,2]$.

答 可积. 因为函数 $f(x)$在$[0,2]$只有一个第一类不连续点 1.

(2) $f(x)=x-[x]$在$[0,10]$.

答 可积. 因为函数 $f(x)=x-[x]=\{x\}$在$[0,10]$只有 10 个第一类不连续点：1，2，…，10.（见“教材”上册图 1.4）.

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\in(0,1],\\ 2, & x=0,\end{cases}$ 在$[0,1]$.

答 可积. 因为函数 $f(x)$在$[0,1]$只有一个第一类不连续点 0.

8. 证明：若函数 $f(x)$在$[a,b]$可积，则函数$[f(x)]^2$ 在$[a,b]$也可积.

证 已知函数 $f(x)$在$[a,b]$可积，则函数 $f(x)$在$[a,b]$有界，即$\exists M>0$，$\forall x\in[a,b]$，有$|f(x)|\leqslant M$. 作函数 $f(x)$在$[a,b]$关于分割 T 的振幅和 $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k$，其中 ω_k 是函数$f(x)$在$[x_{k-1},x_k]$的振幅.

设 ω'_k 是函数$[f(x)]^2$ 在$[x_{k-1},x_k]$的振幅. 有

$$\begin{aligned}\omega'_k&=\sup\{|[f(x_1)]^2-[f(x_2)]^2|\,|\,x_1,x_2\in[x_{k-1},x_k]\}\\&=\sup\{|f(x_1)-f(x_2)||f(x_1)\\&\quad+f(x_2)|\,|\,x_1,x_2\in[x_{k-1},x_k]\}\\&\leqslant\sup\{|f(x_1)-f(x_2)|(|f(x_1)|\\&\quad+|f(x_2)|)\,|\,x_1,x_2\in[x_{k-1},x_k]\}\\&\leqslant 2M\sup\{|f(x_1)-f(x_2)|\,|\,x_1,x_2\in[x_{k-1},x_k]\}=2M\omega_k,\end{aligned}$$

$k=1，2，\cdots，n$. 于是，

$$0\leqslant \sum_{k=1}^{n} \omega'_k\Delta x_k \leqslant 2M \sum_{k=1}^{n} \omega_k\Delta x_k .$$

已知函数 $f(x)$在$[a,b]$可积，即 $\lim\limits_{l(T)\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k\Delta x_k = 0$. 于是，

$$\lim_{l(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega'_k\Delta x_k = 0,$$

即函数$[f(x)]^2$ 在$[a,b]$可积.

§8.3 定积分的性质

习题 8.3 解答

1. 证明：若函数 $f(x)$在$[a,b]$可积，则$\exists M>0$，有

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M(b-a).$$

证 已知函数 $f(x)$在$[a,b]$可积，根据定理 5，函数$|f(x)|$在$[a,b]$也可积，又已知函数 $f(x)$在$[a,b]$有界，即

$$\exists M>0, \forall x\in[a,b], 有 |f(x)|\leqslant M.$$

于是，$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b M dx = M(b-a).$

2. 证明：若函数 $f(x)$在$[a,b]$连续、非负，且$\exists x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)>0$，则 $\int_a^b f(x)\,dx>0$.

证 不妨设 $x_0\in(a,b)$(如果 $x_0=a$ 或 $x_0=b$ 证法相同)，根据连续函数的保号性，$\exists \delta>0$ ($a<x_0-\delta$ 与 $x_0+\delta<b$)，$\forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$，有 $f(x)\geqslant\dfrac{f(x_0)}{2}$. 而$\forall x\in[a,x_0-\delta]$或$[x_0+\delta,b]$，有 $f(x)\geqslant 0$. 从而

$$\int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx\geqslant 0, 与 \int_{x_0+\delta}^b f(x)\,dx\geqslant 0.$$

于是，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)\,dx$$

$$\geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}\,dx = f(x_0)\delta > 0.$$

3. 证明：若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)\leqslant g(x)$，且 $\exists x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)<g(x_0)$，则 $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$.

证 考虑函数 $F(x)=g(x)-f(x)$. 显然，函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $\exists x_0\in[a,b]$，使 $F(x_0)=g(x_0)-f(x_0)>0$. 由第 2 题，有

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

即

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx.$$

4. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $\int_a^b [f(x)]^2\,dx = 0$，则 $f(x)\equiv 0$.

证 用反证法 假设 $f(x)\not\equiv 0$，即 $\exists x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)\neq 0$. 有 $[f(x_0)]^2>0$. 这样，$[f(x)]^2$ 在 $[a,b]$ 是连续非负函数，由第 2 题，有

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx > 0.$$

与已知条件矛盾. 于是，$f(x)\equiv 0$.

5. 比较下列各题中定积分的大小：

(1) $\int_0^1 x\,dx$ 与 $\int_0^1 x^2\,dx$.

解 $\forall x\in[0,1]$，有连续函数 $x-x^2\geqslant 0$，且 $\exists x_0\in(0,1)$，