双博士系列

普通高等教育“十五”国家级规划教材配套用书

经济数学基础教材辅导

微积分

主编　北京大学数学科学学院　田勇
编写　双博士数学课题组

科学技术文献出版社

经济数学基础教材辅导

微 积 分

主　　编　北京大学数学科学学院　田　勇

编　　写　双博士数学课题组

编写人员　胡东华　刘　茜　李菊川　刘　英　陈　丰　刘晓龙
熊国平　高永军　狄　懿　垄　伟　李　亮　刘立新
郭　娟　刘治国　杨　军　乔海玲　刘　津　刘大庆
汪　萍　胡星期　刘治佳　张　望　韩　彬　林娟娟
丁　晓　刘楣林　胡在斌　朱　傲　蔡贵娟　王绣英
李利娟　闵　伟　高　睿　李秀红　刘素枚　李　芹
韩　珍　周丽红　温　晴　包凌燕　钟崇光　韩　福
高　鑫　温桂荣　韩　琴　郭海权　史　进　温　军
王鸿发　郭洪杰　徐桂株　徐英杰　刘峥嵘　白春红
褚　峥　孙文涛　伍　鹏　刘　阳　杜　鹃　白春燕

总 策 划　胡东华

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

微积分/田勇主编. -修订本. -北京:科学技术文献出版社,2008. 9
(经济数学基础教材辅导)
ISBN 978-7-5023-3326-3

Ⅰ. 微…　Ⅱ. 田…　Ⅲ. 微积分-高等学校-教材　Ⅳ. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 123773 号

出版者　科学技术文献出版社
地址　北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038
图书编务部电话　(010)51501739
图书发行部电话　(010)51501720,(010)51501722(传真)
邮购部电话　(010)51501729
网址　http://www.stdph.com
策划编辑　科　文
责任编辑　丁坤善　杜　娟
责任出版　王杰馨
发行者　科学技术文献出版社发行　全国各地新华书店经销
印刷者　利森达印务有限公司
版(印)次　2008 年 9 月修订版　第 1 次印刷
开本　850×1168　32 开
字数　562 千
印张　17.5
印数　1～6000 册
定价　26.00 元

前　言

微积分作为财经类专业的核心课程之一，重要性毋容置疑。本书作为微积分教材辅导书，讲解细致独到，丰富了教材应试技巧及方法点拨，集课堂辅导与应试攻略于一体，是一本经济实用版学生用书；适合本科生同步辅导及同等学力自考生参考使用，也可以作为考研辅导教材。

本书在去年版本的基础上做了精心修订，完善了章节内容，丰富了解题思想，使其结构更具系统化、科学性。

本书特色为：

基本要求：列出大纲对本章内容的要求。

主要内容及理解记忆法：串讲概念、性质和定理，归纳记忆方法。

典型例题解析：精选各种经典题型，覆盖本章所有知识点，在遵循数学最新教学大纲及数学考研大纲的基础之上，力求有所创新，并归纳出“技巧总结”，且对解题的关键步骤加有旁注，讲解细致犹如名师在侧。

本章知识网络图：以图表形式贯穿本章知识网络，提纲挈领，统领全章，使知识体系更加系统化。

历届考研真题评析：解析历年考研试题，总结历年考生的备考经验。大多数人都做过大量的真题和典型例题——当然，做到后来就不必再中规中矩，只认题型想解法即可。

同步自测题：本书的各章同步自测题就是在同学们对各章内容有了全面了解之

后，给同学们一个检测、巩固的机会，以对各种题型有个深刻的了解，从而下笔如有神。同时，也使同学们对各个知识点有更为深刻的理解，达到以此类推，互为贯通的效果。

温馨提示：

✽“双博士品牌图书”是全国最大的大学教辅图书和考研图书品牌，全国有三分之一的大学生和考研学生正在使用“双博士品牌图书”。

✽来自北京大学研究生会的感谢信摘要：双博士，您好！……，首先感谢您对北京大学的热情支持和无私帮助！双博士作为大学教学辅导和考研领域全国最大的图书品牌之一，不忘北大莘莘学子和传道授业的老师，其行为将永久被北大师生感怀和铭记！

北京大学研究生会

✽现在市场上有人冒用我们的书名，企图以假乱真，因此，读者在购买时，请认准双博士品牌。

编者

2008 **年于北京大学**

目　录

第一章　函　数

函数是高等数学的主要研究对象。本章首先引入集合，然后研究两个实数集合之间的一种对应关系——函数关系，并介绍函数的几种简单性质、反函数、复合函数以及常见的初等函数。

§1.1　集合

1.1.1 主要内容及理解记忆方法

表 1.1-1　集合的描述及运算

表示法	列法法	按任意顺序列出集合的所有元素，并用花括号{}括起来
	描述法	设 $P(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则，A 为满足 $P(a)$ 的一切 a 构成的集合，则记为 $A=\{a\mid P(a)\}$
全集、空集与子集	全集	由所研究的一切事物构成的集合称为全集，记为 U
	空集	不包含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$
	子集	如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即"如果 $a\in A$，则 $a\in B$"，则称 A 为 B 的子集. 记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.
运算	并集	$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$
	交集	$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$
	差集	$A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\overline{\in} B\}$
	补集	$A'=\{x\mid x\in U$ 且 $x\overline{\in} B\}$
	笛卡尔乘积	设有集合 A 和 B. $x\in A, y\in B$，所有二元有序数组 (x,y) 构成的集合，称为集合 A 与 B 的笛卡尔乘积，记为 $A\times B$，即 $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$.

表 1.1-2　集合运算律

交换律	$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$
结合律	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
分配律	$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$
摩根律	$(A\cap B)'=A'\cap B'$；$(A\cap B)'=A'\cup B'$

1.1.2 典型例题解析

基本题型Ⅰ：集合的表示法

例 1　用描述法表示下列集合

(1)由方程 $x^2-5x+6=0$ 的根构成的集合 A；

(2)由全体偶数组成的集合 B.

解：　(1)$A=\{x|x^2-5x+6=0\}$

(2)$B=\{x|x=2n,n$ 为整数$\}$

【方法】　用描述法表示集合是指把集合中元素所具有的某个共同属性描述出来，用$\{x|x$ 具有的共同属性$\}$来表示。

例 2　用列举法表示下列集合

(1)由 l,m,n 三个元素组成的集合；

(2)由方程 $x^2-6x+8=0$ 的根所构成的集合.

解：　(1)$A=\{l,m,n\}$或 $A=\{m,l,n\}$等.

(2)$B=\{2,4\}$

【方法】　用列举法表示集合时，必须列出集合中的所有元素，不得遗漏和重复。

基本题型Ⅱ：集合的运算

例 3　集合的三种基本运算——并、交、补

(1)设集合 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{b,d,f,g\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$.

(2)设集合 $A=\{x|-1<x<0\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$C=\{x|-2<x\leqslant 1\}$求 $A\cup(B\cap C)$

(3)设 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{x|x^2-6x+8=0\}$，$B=\{4,5\}$，求 A'，B'，$A'\cup B'$，$A'\cap B'$.

解：

(1)$A\cap B=\{a,b,c,,d,f,g\}$，$A\cap B=\{b,d\}$，$A-B=\{a,c\}$.

(2)$\because B\cap C=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$

$\therefore A\cup(B\cap C)=\{x|-1<x\leqslant 1\}$

(3)$\because A=\{2,4\}$

$\therefore A'=U-A=\{1,3,5\}$

$B'=U-B=\{1,2,3\}$

$A'\cup B'=\{1,2,3,5\}$，$A'\cap B'=\{1,3\}$.

【方法】 求不等式所构成集合的并、交运算，最好借助于数轴表示，显得一目了然；进行并、交的混合运算应注意并、交无先后，但括号优先，先里后外，抽象集合的并、交运算特点是并集取“全部”；交集取“公共.

例 4 ”集合的笛卡尔乘积

(1)设 $A=\{a,b\}$，$B=\{b,c\}$，求 $A\times B$

(2)设 $A=\{1,2\}$，$B=\{3,4\}$，$C=\{5\}$，求 $A\times B\times C$.

解： (1)$A\times B=\{(a,b),(a,c),(b,b),(b,c)\}$

(2)$A\times B\times C=\{(1,3,5),(1,4,5),(2,3,5),(2,4,5)\}$

§1.2 实数集

1.2.1 主要内容及理解记忆方法

表 1.2-1 实数绝对值的定义及性质

定义	一个实数 x 的绝对值定义为 $\lvert x\rvert=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$
性质	$\lvert x\rvert\geqslant 0$ $\lvert x\rvert=\sqrt{x^2}$ $\lvert -x\rvert=\lvert x\rvert$ $-\lvert x\rvert\leqslant x\leqslant\lvert x\rvert$
	$\{x\mid\lvert x\rvert<a\}=\{x\mid -a<x<a\}$ $\{x\mid\lvert x\rvert>b,b>0\}=\{x\mid x<-b\}\cup\{x\mid x>b\}$
	$\lvert x+y\rvert\leqslant\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$ $\lvert x-y\rvert\geqslant\lvert x\rvert-\lvert y\rvert$ $\lvert xy\rvert=\lvert x\rvert\lvert y\rvert$ $\left\lvert\frac{x}{y}\right\rvert=\frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert},y\neq 0$

表 1.2-2　区间及邻域

<table>
<tr><td rowspan="5">区间</td><td rowspan="3">有限区间</td><td>开区间</td><td>$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$</td></tr>
<tr><td>闭区间</td><td>$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$</td></tr>
<tr><td>半开半闭区间</td><td>$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$
$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$</td></tr>
<tr><td>无限区间</td><td colspan="2">$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$
$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$
$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$
$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$
$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">领域</td><td>点 a 的 δ 领域</td><td colspan="2">$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid\mid x-a\mid<\delta\}$</td></tr>
<tr><td>点 a 的去心 δ 领域</td><td colspan="2">$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<\mid x-a\mid<\delta\}$</td></tr>
</table>

1.2.2 **典型例题解析**

基本题型Ⅰ:求含绝对值的不等式

例 1　用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合

(1) $|x|>3$;(2) $|x-x_0|<\varepsilon(\varepsilon>0,x_0$ 为常数);

解:　(1)即 $x>3$ 或 $x<-3$,区间为 $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

(2)由 $|x-x_0|<\varepsilon$ 得 $-\varepsilon<x-x_0<\varepsilon$,从而 $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$,故区间表示为 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$.

§1.3 函数关系

1.3.1 主要内容及理解记忆方法

表 1.3-1 函数的定义

名称	定义	说明
函数	若 D 是一个非空实数集合，设有一个对应规则 f，使每一个 $x\in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数. 记作 $y=f(x)$，$x\in D$. 其中 x 称自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$. 全体函数值的集合 $\{y\mid y=f(x),x\in D_f\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记作 Z 或 Z_f.	(1) f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而 $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值；(2)表示函数的记号可以任意选取；(3)构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f；(4)当且仅当两个函数的定义域及对应法则都相同时，两个函数相等.

1.3.2 典型例题解析

基本题型Ⅰ：判定两个函数是否相同

例 1 判定下列各对函数是否相同，并说明理由.

(1)函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 与 $g(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$.

(2)函数 $f(x)=\ln(x^2-3x+2)$ 与 $g(x)=\ln(x-1)+\ln(x-2)$

解： (1) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 的定义域由 $\begin{cases}1+x>0\\1-x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1+x<0\\1-x<0\end{cases}$ 得

$(-1,1)$；$g(x)$ 的定义域由 $\begin{cases}1+x>0\\1-x>0\end{cases}$ 得 $(-1,1)$.

故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同，均为 $(-1,1)$.

又当 $x\in(-1,1)$ 时，$\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$.

即 $f(x)=g(x)$.

因此　$f(x)$与$g(x)$为同一函数.

(2)由于　$f(x)=\ln(x^2-3x+2)=\ln(x-1)(x-2)$.

故其定义域由不等式$(x-1)(x-2)>0$,得$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

而$g(x)$的定义域为$(2,+\infty)$,因此$f(x)$与$g(x)$为不同函数.

注： 当且仅当两个函数的定义域和对应法则完全相同时,才表示同一个函数,否则表示不同函数.

基本题型Ⅱ:求函数的定义域

例2　求$f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\ln\cos x}$的定义域.

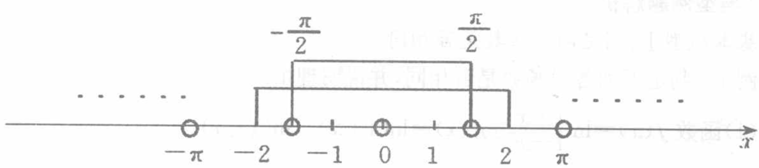
分析： 求复杂函数的定义域,就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组之解集.因此熟练掌握基本初等函数的定义域是有帮助的.

解： 只有$\sqrt{4-x^2}$,$\ln\cos x$同时有意义,且分母不为0时,$f(x)$才有定义.即

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ \cos x>0\\ \ln\cos x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ 2n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ x\neq n\pi\end{cases}$$

$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

上述不等式组的解集为$(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$(参见下图),因此$f(x)$的定义域为$(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$.



§1.4　函数表示法

1.4.1 主要内容及理解记忆方法

表1.4-1　函数的三种表示法

名称	定义
公式法	把一个函数关系用解析式表示的方法称为函数解析法,也叫公式法

名称	定义
表格法	把自变量所取的值和对应的函数值列成表,用以表示函数关系,如果我们所用的各种数学用表——平方表、对数表、三角函数表等,函数的这种表示法称为表格法
图形法	用某个坐标系中的一条曲线来表示两个变量之间的对应关系,称为图形法或图示法

表 1.4-2 分段函数与隐函数

名称	定义	说明
分段函数	对于其定义域内自变量 x 不同的取值,不能用一个统一的数学表达式表示,而要用两个或两个以上的式子表示的一类函数称为“分段函数”	分段函数是用几个公式合起来表示一个函数,而不是表示几个函数
隐函数	由二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定的 y 与 x 的函数关系称为隐函数.	因变量能用自变量直接表示出来(如 $y=f(x)$)的函数称为显函数,否则为隐函数.

1.4.2 典型例题解析

基本题型Ⅰ:求分段函数的定义域.

例 1 求函数 $y=|x(1-x)|$ 的定义域.

解: $$y=|x(1-x)|=\begin{cases}-x(1-x) & x\leqslant 0\\ x(1-x) & 0<x<1\\ x(x-1) & x\geqslant 1\end{cases}$$

§1.5 建立函数关系的例题

1.5.1 主要内容及理解记忆方法

表 1.5-1 建立函数关系的基本步骤

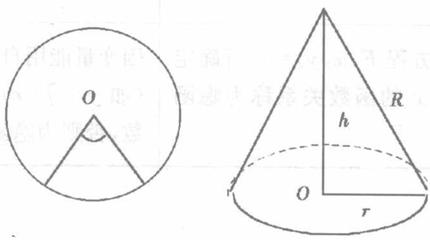
步骤	1. 明确问题中的因变量与自变量,并用适当记号表示; 2. 根据题意,建立等式,从而得出函数关系; 3. 确定函数的定义域

1.5.2 典型例题解析

基本题型Ⅰ:根据实际应用问题建立函数关系

例 1 把半径为 R 的一圆形铁片,自中心处剪去中心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥,试将这圆锥的体积表示为 α 的函数.

解: 设围成的圆锥的体积为 V,底面半径为 r,高为 h(如图所示),则按题意有



$$R(2\pi-\alpha)=2\pi r$$

$$h=\sqrt{R^2-r^2}$$

故 $r=\dfrac{R(2\pi-\alpha)}{2\pi}$

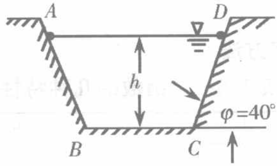
$$h=\sqrt{R^2-\frac{R^2(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}}=R\,\frac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}$$

因此 $V=\dfrac{1}{3}\pi\times\dfrac{R^2(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}\times R\,\dfrac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}$

$$=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\times\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}\quad(0<\alpha<2\pi)$$

例 2 已知水渠的横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi=40°$(下图),当过水断面 $ABCD$ 的

面积为定值 S_0 时，求湿周 $L(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式，并说明定义域.



解： $AB=DC=\dfrac{h}{\sin 40^\circ}$（见上图）

又由 $\dfrac{1}{2}h[BC+(BC+2\cot 40^\circ\cdot h)]=S$

可得 $BC=\dfrac{S_0}{h}-\cot 40^\circ\cdot h$

因此 $L=\dfrac{S_0}{h}+\dfrac{2-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h$

自变量 h 的取值范围应由不等式组

$$\begin{cases} h>0 \\ \dfrac{S_0}{h}-\cot 40^\circ\cdot h>0 \end{cases}$$

确定，故定义域为$(0,\sqrt{S_0\tan 40^\circ})$.