碧海书道
BOOK HOUSE

高等学校数学学习辅导丛书

高等数学
全程学习指导

配同济六版

王丽燕　柳　扬　编著

下册

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

碧海书道
BOOK HOUSE

高等学校数学学习辅导丛书

高等数学
全程学习指导

配同济六版

王丽燕　柳　扬　编著

下册

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程学习指导. 下册 / 王丽燕,柳扬编著.
大连:大连理工大学出版社,2008.7
(高等学校数学学习辅导丛书)
配同济六版
ISBN 978-7-5611-4301-8

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①王… ②柳… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 104355 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
电话:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm 印张:8.25 字数:342 千字
2008 年 7 月第 1 版 2008 年 7 月第 1 次印刷

责任编辑:梁 锋 王 伟 责任校对:碧 海
封面设计:宋 蕾

ISBN 978-7-5611-4301-8 定 价:16.00 元

前　言

从事大学数学教学已接近20年。在此过程中，我深深感受到了数学的理性之美，力量之美，乃至清柔之美。她远不只是工具，更像是一位哲人，启发你，熏陶你，伴你追寻人生的理想。我在讲台上，自然地，将这种意境传递给了学生，使他们在学习大学数学的过程中以新的角度体味“数学”，体味学习。作为教师我愿意将我的教学经验与大家共享，与大家共同学习，共同提高，这就是我写作《全程学习指导》系列图书的初衷。

《高等数学》是大学各门类、各专业学生必修的基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。本书的目的是帮助广大学生扩大课堂信息量，提高应试能力。本书严格按照教育部高等院校教学指导委员会审订的“本科数学基础课程教学基本要求”（教学大纲），以及教育部最新的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求编写。

本书与被全国许多高校采用的《高等数学》（同济六版）下册配套，共5章，每章有4个版块。

知识点考点精要　列出基本概念、重要定理、主要内容，突出必须掌握或考试出现频率高的核心内容。

典型题真题精解　精选具有代表性的例题进行详尽解析。这些例题涉及内容广，类型多，技巧性强，旨在提高大家分析问题、解决问题的能力，帮助大家掌握基本概念和理论，开拓解题思路，熟练掌握解题技巧。

教材习题同步解析　本版块为教材习题全解，为大家提供一种比较规范的解题思路和方法，以便读者对照和分析。

模拟试题自测　模拟试题力争反映考试的重点、难点，帮助大家进一步强化训练解题能力，巩固和提高学习效果。

在“典型题真题精解”和“模拟试题自测”版块中采用了大量历年考研真题。为增加信息量，考研真题采用“年代/类别/分值”的标注方式，如

“080110”，说明此题是2008年数学一的考题，分值10分。

常言道，熟能生巧。剖析一定数量的范例，做一定数量的练习，无疑是应试的有效途径。在此过程中扎实掌握基本概念、基础理论、常用方法，注重科学思维方式的培养，才能掌握“数学力”，并将之转化为一种“数学素质”和“竞争力”。希望本书在这方面能对读者有所帮助。不足之处，希望指正。

王丽燕

2008年7月

目 录

第八章　空间解析几何与向量代数

知识点考点精要

在平面解析几何中，通过建立平面直角坐标系，把平面上的点与二维有序数对一一对应，使平面上的图形和方程对应起来，从而用代数方法来研究几何问题。空间解析几何与平面解析几何的思想方法完全类似。我们借助于平面解析几何学习了一元函数的微积分，为了学习多元函数的微积分，必须掌握必要的空间解析几何知识。

在本章的前两节介绍了有关向量代数的知识。第 1 节介绍了向量的概念、向量的线性运算(加减法与数乘)及其运算规律等。之后通过建立空间直角坐标系将向量与有序数对建立一一对应关系，使得向量的线性运算转化成向量的坐标间的数量运算，向量的模和方向余弦也都有了坐标表示式。在第 2 节介绍了向量的数量积、向量积和混合积三种运算，由此也给出了两个向量垂直和平行的充要条件。注意数量积和混合积的结果是一个数量，而向量积的结果是一个向量。

第 3 ～ 6 节介绍了有关空间解析几何的知识。其中第 3 节介绍了曲面、旋转曲面、柱面及二次曲面；第 4 节介绍了空间曲线及其方程、曲线在坐标面上的投影等。作为最简单的曲面 —— 平面在第 5 节介绍。平面方程主要有三种形式：点法式、一般式和截距式。第 6 节则介绍了空间曲线中最简单的直线。直线方程也有三种形式：点向式、一般式和参数式。

尽管本章内容在考研中涉及不多，但学好本章知识有利于你学好多元函数的微分以及重积分、线面积分等。

一、向量代数

1. 向量的概念

数量	只有大小没有方向的量叫做数量，通常也称为标量。
向量	既有大小又有方向的量叫做向量，通常也称为矢量。
模	向量的大小(或长度)称为向量的模，记为 $\lvert \boldsymbol{a} \rvert$。
单位向量	模为 1 的向量称为单位向量。与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为 $\boldsymbol{a}^{\circ}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\lvert \boldsymbol{a} \rvert}$。

零向量	模为 0 的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$。零向量的方向可以看作是任意的。
方向角 方向余弦	向量 $\boldsymbol{a}$ 与空间直角坐标系的三个坐标轴正方向的夹角称为向量的方向角，依次记为 α,β,γ。$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，它们满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$。
向量坐标	把向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点移至空间直角坐标系的坐标原点，则其终点的坐标 (a_x,a_y,a_z) 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$。$\mathbf{0}=(0,0,0)$，$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$，$\boldsymbol{a}^\circ=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$。

我们只考虑一个向量的大小与方向，而不管它的起点在什么位置，也就是说我们只研究与起点无关的自由向量。

2. 两点间距离公式

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，以 M_1 为始点，M_2 为终点的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，其模为 $\lvert\overrightarrow{M_1M_2}\rvert$（即为点 M_1 到 M_2 的距离），于是

$$d=\lvert\overrightarrow{M_1M_2}\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

3. 向量的运算

	定义	性质
加法	把向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点移到向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点，则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记做 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。 若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$
数乘	实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的数乘是一个向量，记做 $\lambda\boldsymbol{a}$。当 $\lambda>0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向，且 $\lvert\lambda\boldsymbol{a}\rvert=\lvert\lambda\rvert\lvert\boldsymbol{a}\rvert$；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$。 若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$	$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$
数量积	向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的点积（数量积或内积）是一个数 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert\times\lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$（其中 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角），记做 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$。 若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert^2=\boldsymbol{a}^2$

向量积	向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的叉积(向量积或外积)是一个向量，记做 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它的模为 $\lvert\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\rvert=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，方向垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，且使 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 成右手系。 若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\right)$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$
混合积	$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积。其几何意义是以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为相邻的三条棱的平行六面体的体积。 若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z),\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$，则 $[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$	混合积中相邻的两个向量位置互换一次，则混合积变号，即 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$，三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow[\boldsymbol{abc}]=0$

4. 向量在有向轴上的投影

有向线段的值	设 $\boldsymbol{e}$ 是与轴 u 同方向的单位向量，A,B 是轴 u 上的任意两点，若向量 $\overrightarrow{AB}=\lambda\boldsymbol{e}$，则称 λ 为轴 u 上的有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的值。显然，$\lvert\lambda\rvert=\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$，当 $\overrightarrow{AB}$ 与轴 u 正向(负向)一致时，λ 的符号为正(负)。
点的投影	已知空间一点 A 以及一有向轴 u，通过点 A 作轴 u 的垂直平面 Π，则平面 Π 与轴 u 的交点称为点 A 在轴 u 上的投影。
向量的投影	空间一向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点和终点在轴 u 上的投影记为 A' 和 B'，则有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影，记做 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$。 向量 $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$ 在向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 上的投影为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}^\circ=b_x\cos\alpha+b_y\cos\beta+b_z\cos\gamma$，其中 $\boldsymbol{a}^\circ=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$
投影定理	向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影等于向量的模 $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ 乘以轴与向量 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角 φ 的余弦：$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cos\varphi$
	两个向量的和在轴 u 上的投影等于这两个向量在轴 u 上的投影的和，即 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2$
	向量与数的乘积在轴 u 上的投影等于向量在轴上的投影与数的乘积，即 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$。

二、空间解析几何

1. 直线、平面和曲面方程

平面方程	点法式方程	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 其中(x_0,y_0,z_0)为平面上一定点,$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$为平面的法向量
	一般式方程	$Ax+By+Cz+D=0$ $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$为平面的法向量
	截距式方程	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 其中a,b,c依次为平面在x,y,z轴上的截距
	三点式方程	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ 平面过空间三点$M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2),M_3(x_3,y_3,z_3)$
直线方程	点向(对称)式方程	$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 其中(x_0,y_0,z_0)为直线上一定点,$\boldsymbol{s}=(l,m,n)$为直线的方向向量
	参数式方程	$x=x_0+lt,y=y_0+mt,z=z_0+nt$ 直线过点(x_0,y_0,z_0),它的方向向量$\boldsymbol{s}=(l,m,n)$
	交线式方程	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 其中$\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1),\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$为两个平面的法向量,$\boldsymbol{n}_1$与$\boldsymbol{n}_2$不平行。
曲面方程	椭球面方程	$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}+\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$ 当$x_0=y_0=z_0=0,a=b$或$b=c$或$c=a$时为旋转椭球面
	双曲面方程	$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}-\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$ 单叶双曲面 $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}+\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$ 双叶双曲面
	(二次)锥面方程	$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}+\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=0$
	抛物面方程	$z=\begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{2p}+\dfrac{(y-y_0)^2}{2q}, \text{椭圆抛物面,} \\ \dfrac{(x-x_0)^2}{2p}-\dfrac{(y-y_0)^2}{2q}, \text{双曲抛物面,} \end{cases}$ 其中$pq>0$
	柱面方程	$F(y,z)=0$,母线平行于x轴 $F(x,z)=0$,母线平行于y轴 $F(x,y)=0$,母线平行于z轴
	旋转曲面方程	母线$f(y,z)=0\begin{cases} \text{绕}z\text{轴旋转:}f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0 \\ \text{绕}y\text{轴旋转:}f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0 \end{cases}$

1° 将 yOz 坐标面上的已知曲线 $f(y,z)=0$ 绕坐标轴旋转所得到的旋转曲面方程就是将方程 $f(y,z)=0$ 变易得来的，具体做法是：绕哪个轴旋转，哪个变量就不变，而另外一个变量变易为其余两个变量的算术平方根。

例如将曲线 $f(y,z)=0$ 绕 y 轴旋转所得到的旋转曲面方程就是将 $f(y,z)=0$ 中的 y 不变，而另一个变量 z 变易成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 即得所求曲面方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$；若将曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转，则 z 不变，y 变易成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，所求曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$，其他情形是完全类似的。例如将 xOz 坐标面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转曲面方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2}{c^2}=1$，即 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$；绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面方程为 $\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，即 $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$。

2° 在以后的学习中，常用的二次曲面有以下几种：

① 柱面。例如 $x^2+y^2=a^2$ 是以 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=a^2$ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面（见图 8-1）；$\frac{x^2}{4}+(z-1)^2=1$ 就是以 xOz 面上的椭圆 $\frac{x^2}{4}+(z-1)^2=1$ 为准线，母线平行于 y 轴的柱面（见图 8-2），其余情况类似。

柱面方程的特征是：它是一个二元方程，缺少哪个字母（例如 $F(y,z)=0$，缺字母 x），该柱面就是平行于该轴（本例是 x 轴）的柱面。当然特殊的情形也存在，例如 $z-1=0$ 是一元函数，方程中既缺字母 x 又缺字母 y，它是既平行于 x 轴又平行于 y 轴（平行于 xOy 面）的平面，当然也是柱面。

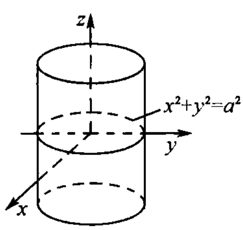


图 8-1

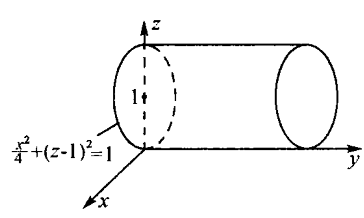


图 8-2

② 圆锥面。例如 $z^2=a^2(x^2+y^2)$ 或 $z=a\sqrt{x^2+y^2}$ 是顶点在坐标原点的圆锥面（见图 8-3），当 $a>0$ 开口朝上，当 $a<0$ 开口朝下。$z=c+a\sqrt{x^2+y^2}$ 则是将锥面 $z=a\sqrt{x^2+y^2}$ 向上（$c>0$）或向下（$c<0$）平移 $|c|$ 个单位。如 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$（见图 8-4）。

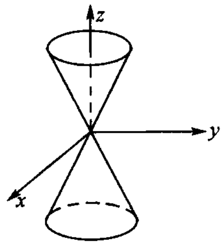


图 8-3

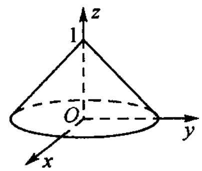


图 8-4

③ 椭圆抛物面。$\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$，当 p,q 同为正号（或负号）时，是顶点在(0,0,0)开口朝上（或朝下）的椭圆抛物面。$z=c+\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}$ 是将抛物面 $z=\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}$ 向上($c>0$)或向下($c<0$)移动 $|c|$ 个单位。如 $z=x^2+\dfrac{y^2}{4}$（见图 8-5），$z=6-x^2-y^2$（见图 8-6）。

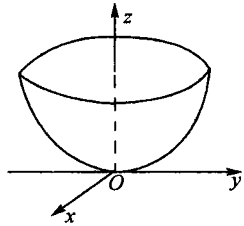


图 8-5

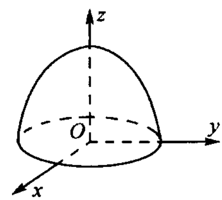
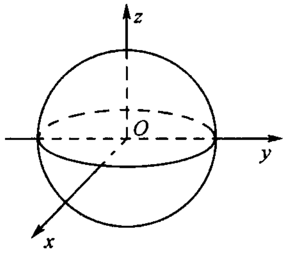


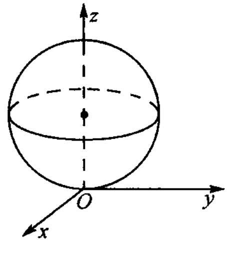
图 8-6

④ 球面。$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$，见图 8-7 与图 8-8。



$x^2+y^2+z^2=a^2$

图 8-7



$x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$

图 8-8

2. 点、直线、平面之间的关系

(1) 两个平面之间的关系

平面 $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，其中 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 为平面 Π_1 的法向量，平面 $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，其中 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ 为平面 Π_2 的法向量。

两平面相交	$\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 不平行，即 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ 不成立
两平面垂直	$\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
两平面平行	$\boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}_2(\lambda\neq0)\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$
两平面重合	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$

两平面 Π_1 与 Π_2 之间的夹角 $\theta=\langle\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2}\rangle\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$满足

$$\cos\theta=|\cos\langle\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

(2) 两条直线之间的关系

设直线 $L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$，其中 $\boldsymbol{s}_1=(l_1,m_1,n_1)$ 为 L_1 的方向向量，$M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为 L_1 经过的一点。

直线 $L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$，其中 $\boldsymbol{s}_2=(l_2,m_2,n_2)$ 为 L_2 的方向向量，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为 L_2 经过的一点。

两直线不共面	$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\neq0$，即混合积 $[\overrightarrow{M_1M_2}\ \boldsymbol{s}_1\ \boldsymbol{s}_2]\neq0$，这里 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$
两直线不共面但相互垂直	$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\neq0$，但 $\boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=0\Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$
两直线垂直相交	$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)=0$，且 $\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=0$
两直线平行	$\boldsymbol{s}_1\parallel\boldsymbol{s}_2$，即 $\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{0}$
两直线重合	$\overrightarrow{M_1M_2}\parallel\boldsymbol{s}_1\parallel\boldsymbol{s}_2$

直线 L_1 与直线 L_2 之间的夹角 $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2})$ 满足

$$\cos\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})|=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

3. 平面与直线关系

设平面 $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$，直线 $L:\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$，这里 $\boldsymbol{n}=(A,$

$B,C)$ 为平面的法向量，$s=(l,m,n)$ 为直线方向向量

斜交	$n\perp s$ 不成立，即 $n\cdot s\neq 0$
垂直	$n \parallel s$，即 $n\times s=0$
平行	$n\perp s$，即 $n\cdot s=0$
重合	$n\cdot s=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$，这里 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为直线 L 上一点。

直线 L 与平面 Π 的夹角 $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2})$ 满足

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{n,s})|=\frac{|n\cdot s|}{|n||s|}=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

4. 空间点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $L:\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times s|}{|s|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为 L 上的一点。

5. 直线 $L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ 与 $L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ 不平行，则 L_1 与 L_2 的距离为

$$d=\frac{|[\overrightarrow{M_1M_2}\ s_1\ s_2]|}{|s_1\times s_2|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}\right\|}{\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}\right\|}$$

6. 空间一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $\Pi:Ax+By+Cz+D=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

典型题真题精解

一、有关向量代数方面的问题

【例 8-1】 （向量的加法，向量的模）$|a+b|=|a|+|b|$ 是否成立？为什么？

答 在一般情况下不成立。

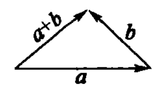


图 8-9

若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行,由向量的加法知,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 构成一个三角形(参见图 8-9),从而 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$。

若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$(或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$),有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 成立。

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向,也有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 成立;

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向,此时若 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$,则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$;若 $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$,则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$。

由本题可见,向量的运算与数量的运算有着本质的区别,不能混为一谈。

【例 8-2】 (向量的模,平行向量) 从点 $A(2,-1,7)$ 沿向量 $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$ 的方向取一段长 $|\overrightarrow{AB}|=34$,求点 B。

剖析 由 $\boldsymbol{a}$ 可得与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量 $\boldsymbol{a}^{\circ}$,显然 $\overrightarrow{AB}=34\boldsymbol{a}^{\circ}$。

解法 1 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{8^2+9^2+(-12)^2}=17$

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(\frac{8}{17},\frac{9}{17},-\frac{12}{17}\right)$$

设 B 的坐标为 $B(x,y,z)$,则 $\overrightarrow{AB}=(x-2,y+1,z-7)$,且 $\overrightarrow{AB}=34\boldsymbol{a}^{\circ}$,即 $(x-2,y+1,z-7)=34\left(\frac{8}{17},\frac{9}{17},-\frac{12}{17}\right)$,由此可得

$$x-2=16,y+1=18,z-7=-24$$

故 $B(18,17,-17)$。

解法 2 设点 $B(x,y,z)$,则 $\overrightarrow{AB}=(x-2,y+1,z-7)$,且

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-7)^2}=34 \qquad (*)$$

由 $\overrightarrow{AB}\parallel\boldsymbol{a}$,有 $\dfrac{x-2}{8}=\dfrac{y+1}{9}=\dfrac{z-7}{-12}\xlongequal{\Delta}\lambda$

将 $x-2=8\lambda,y+1=9\lambda,z-7=-12\lambda$ 代入(*)可得 $\lambda=2$,从而 $B(18,17,-17)$

【例 8-3】 (向量的点积与叉积) 证明

(1)$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$; (2)$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$。

证明 设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z),\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$。

(1)
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(a_yb_xc_y+a_zb_xc_z-a_xb_yc_y-a_xb_zc_z)\boldsymbol{i}+(a_xb_yc_x+a_zb_yc_z-a_yb_xc_x-a_yb_zc_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_zc_x+a_yb_zc_y-a_zb_xc_x-a_zb_yc_y)\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}&=(a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z)(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})-\\&\quad(b_xc_x+b_yc_y+b_zc_z)(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\\&=(a_yb_xc_y+a_zb_xc_z-a_xb_yc_y-a_xb_zc_z)\boldsymbol{i}+(a_xb_yc_x+a_zb_yc_z-a_yb_xc_x-\end{aligned}$$

$$a_yb_zc_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_zc_x+a_yb_zc_y-a_zb_xc_x-a_zb_yc_y)\boldsymbol{k}$$

所以
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$$

同理可证$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$;$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$。

(2) 因为$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle)^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle$,

$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle$,所以两式相加得到
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$$

另一解法,利用$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$和本题(1)的结论,有
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))\cdot\boldsymbol{a}\\&=[-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}]\cdot\boldsymbol{a}\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\end{aligned}$$

即
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$$

【例 8-4】 (向量的叉积,投影)已知向量$\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$,$\boldsymbol{c}=(2,1,2)$。求与$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$同时垂直且在$\boldsymbol{c}$上的投影为1的向量$\boldsymbol{v}$。

解 由
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-3&1\\1&-2&3\end{vmatrix}=-7\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

及因$\boldsymbol{v}$同时垂直于$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,故可设$\boldsymbol{v}=t(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(-7t,-5t,-t)$。于是
$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{c}=-14t-5t-2t=-21t$$
$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$$

从而
$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{v}|\cos\langle\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{c}}\rangle=\frac{|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{c}|\cos\langle\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{c}}\rangle}{|\boldsymbol{c}|}=\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=-7t$$

令$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{v}=1$,即$-7t=1$,得$t=-\dfrac{1}{7}$。故
$$\boldsymbol{v}=-\frac{1}{7}(-7,-5,-1)=\left(1,\frac{5}{7},\frac{1}{7}\right)$$

【例 8-5】 (向量的点积)证明三角形的余弦定理。

证明 记$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$(见图 8-10),则$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,从而
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}&=[-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot[-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\\&=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}\\&=|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

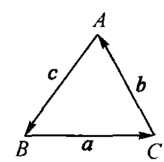


图 8-10

故
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}|^2&=|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos(\pi-A)\\&=|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2-2|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos A\end{aligned}$$