

21世纪高职高专基础教育规划教材

应用 数学教程

YINGYONG SHUXUE JIAOCHENG

主编 张慧颖 周成林

西北农林科技大学出版社
Northwest A&F University Press

内 容 提 要

本书主要包括一元函数微积分初步、微分方程、线性代数与线性规划基础、概率与数理统计初步、Mathematica 简介、用 WinQSB 求解线性规划等。

本书可作为高职高专院校的教学用书,也可作为中等专业学校学生的数学教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学教程/张慧颖,周成林主编. —杨凌:西北农林科技大学出版社,2008.6
ISBN 978-7-81092-407-8

I. 高… II. ①张…②周… III. 应用数学—高等学校:技术学校—教材 IV. 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 073585 号

高等应用数学教程
张慧颖 周成林 主编

出版发行 西北农林科技大学出版社
地 址 陕西杨凌杨武路 3 号 邮 编:712100
电 话 总编室:029—87093105 发行部:87093302
电子邮箱 press0809@163.com
印 刷 河南鑫基印务有限公司
版 次 2008 年 6 月第 1 版
印 次 2008 年 6 月第 1 次
开 本 1/16 787 mm × 1092 mm
印 张 16.75
字 数 404 千字

ISBN 978-7-81092-407-8

定价:29.80 元

本书如有印装质量问题,请与本社联系

前 言

随着科学技术的发展,各学科对数学的要求是越来越高,而与此相矛盾是数学课的教学课时越来越少,特别是职业技术学院。针对这种情况,有不少学校调整了数学课的教学内容,修改了教学大纲,但改革的效果并不明显。究其因,人们发现,虽然使用的是新的教学大纲,但教材还是原来的教材或者是按照原来的体系编写的教材。事实表明,教学体系、教学内容、教学大纲的改革最终都要落实在教材的改革上。这一点随着时间的推移,已逐渐成为有关学者和专家的共识。

近年来,有不少人对高职高专数学课程的改革做了许多艰苦的工作,并且编写出版了不少面向高职高专的教材。然而,现有的高职高专数学教材大多脱胎于普通高校的高等数学,教材篇幅较长,需要学时较多,不能很好地满足高职高专数学教学需要。本教材力求从高职教育的需要和现状出发,在少学时条件下,改革数学课的教学体系和教学内容。本着“以服务为宗旨,以应用为目的,以实用为主,以必须、够用为度”的原则,精心选取教学内容,降低难度,淡化理论推导,强化实际应用,立足能力培养,突出数学课在专业基础课和专业课学习中的工具作用,重新组合知识结构和逻辑结构。

本教材在内容的编排和取舍上,注意由浅入深,由易到难,由具体到抽象,循序渐进。概念的引入、基本理论的介绍都以实际问题为背景,删去了繁琐的理论推导和证明,淡化了数学运算技巧的训练,把教学的重点放在了数学思想的培养和数学知识的运用方面。在编写体系上,充分体现讲练结合的原则,边讲边练,比较适合高职高专学生的年龄特点和学习习惯。此外,还编写了利用 Excel 进行数学计算的内容以及数学软件 Mathematica 简介和用 WinQSB 软件求解线性规划的内容,这将有助于培养学生运用数学知识解决实际问题的能力。

本教材将教学内容划分为基础模块和应用(选学)模块。基础模块教学内容的选定以保证各专业对数学的共同需求为依据。基础模块是所有学生的必修课。基础模块包括:一元函数微积分初步、微分方程、Mathematica 简介。应用(选学)模块包括:线性代数与线性规划基础、概率与数理统计初步、用 WinQSB 求解线性规划等。

目录中标记星号(*)内容为选学内容。

建议学时分配如下：

序号	教 学 内 容	教学时数	
		必学时数	选学时数
1	一元函数微积分初步	36	10
2	* 线性代数与线性规划基础		24
3	* 概率与数理统计初步		42
4	Mathematica 使用简介	8	2
5	* 用 WinQSB 求解线性规划		2
共 计		44	80

本书由张慧颖、周成林担任主编。参加本书编写工作的有李银川(第1章第1~6节)、徐前进(第1章第7~15节)、孙红伟(第1章第16~20节)、杨朝晖(第2章第1~7节);周成林(第2章第8~9节、第3章第1~7节、第5章)、张慧颖(第3章第8~13节、第4章),全书由张慧颖统稿。

由于编者水平有限,不当之处在所难免,恳请各位老师和读者批评指正。

张慧颖 周成林

2008 年 5 月

目录

第1章 一元函数微积分初步	1
1.1 初等函数	1
1.1.1 基本初等函数	1
1.1.2 复合函数	1
1.1.3 初等函数	2
1.2 函数的极限	2
1.2.1 数列的极限	2
1.2.2 函数的极限	3
1.3 极限的四则运算法则	7
1.4 无穷小量与无穷大量	10
1.4.1 无穷小量的概念	10
1.4.2 无穷小的性质	11
1.4.3 无穷大量	11
1.4.4 无穷小与无穷大的关系	12
1.4.5 无穷小的阶	12
1.5 函数的连续性	13
1.5.1 函数连续性的概念	13
1.5.2 初等函数的连续性	15
1.5.3 闭区间上连续函数的性质	16
1.6 导数的概念	17
1.6.1 问题的提出	17
1.6.2 导数的概念	18
1.6.3 导函数	19
1.6.4 导数的几何意义	21
1.6.5 可导与连续的关系	22
1.7 函数和差积商的求导法则	22
1.7.1 函数和差的求导法则	22
1.7.2 函数乘积的求导法则	23
1.7.3 函数商的求导法则	24
1.8 复合函数的求导法则	25
*1.9 隐函数的导数	28
*1.10 高阶导数	29
1.10.1 高阶导数的概念	29
1.10.2 二阶导数的力学意义	30

1.11	微分	30
1.11.1	微分的概念	30
1.11.2	微分公式与微分法则	32
1.11.3	微分形式不变性	33
*1.12	曲线的曲率	34
1.13	函数单调性的判别法	36
1.14	函数的极值	38
1.14.1	极值的概念	38
1.14.2	函数极值的求法	39
1.15	函数的最大值和最小值	41
1.16	不定积分的概念	44
1.16.1	不定积分的概念	44
1.16.2	基本积分公式	45
1.16.3	不定积分的性质	46
1.16.4	不定积分与微分的关系	48
1.17	定积分的概念	49
1.17.1	引例	49
1.17.2	定积分的定义	51
1.17.3	定积分的几何意义	52
1.17.4	定积分的性质	53
1.18	牛顿-莱布尼兹公式	54
1.19	定积分的应用	56
1.19.1	定积分在几何中的应用	56
1.19.2	定积分在物理中的应用	60
1.19.3	函数的平均值	63
*1.20	微分方程简介	65
1.20.1	微分方程的基本概念	65
1.20.2	一阶微分方程	67
	复习题 1	70
第2章	线性代数与线性规划基础	74
2.1	行列式	74
2.1.1	行列式的概念	74
2.1.2	行列式的性质	76
2.1.3	利用 Excel 计算行列式的值	79
2.2	矩阵的概念及运算	80
2.2.1	矩阵的概念	80
2.2.2	矩阵的运算	82
2.2.3	利用 Excel 求矩阵的乘积	84
2.3	逆矩阵	86



2.3.1 逆矩阵的概念	86
2.3.2 逆矩阵的求法	87
2.3.3 利用 Excel 求逆矩阵	89
2.4 线性方程组的解	90
2.5 线性规划的概念	96
2.5.1 线性规划的数学模型	96
2.5.2 线性规划的概念	98
2.5.3 线性规划的标准形式	98
2.6 线性规划问题的图解法	101
2.7 单纯形法	104
2.7.1 单纯形法的理论依据	104
2.7.2 单纯形法的基本思路	105
2.7.3 单纯形法	105
*2.8 图上作业法	112
2.8.1 基本概念	113
2.8.2 图上作业法	114
2.9 表上作业法	119
2.9.1 编制初始调运方案	120
2.9.2 检验	121
2.9.3 调整	123
复习题 2	127
第3章 概率与数理统计初步	131
3.1 随机事件	131
3.1.1 随机事件	131
3.1.2 基本事件 样本空间	132
3.1.3 事件的关系和运算	133
3.2 古典概型	135
3.2.1 概率的统计定义	135
3.2.2 古典概型	137
3.3 概率的加法公式	139
3.4 条件概率 乘法公式	140
3.5 事件的独立性	142
3.5.1 事件的独立性	142
3.5.2 独立试验概型	143
3.6 随机变量的概念	147
3.7 离散型随机变量	148
3.7.1 分布列的概念	148
3.7.2 几个常见的分布列	149
3.7.3 利用 Excel 求二项分布的概率	151

3.7.4 利用 Excel 求泊松分布的概率	153
3.8 连续型随机变量	155
3.8.1 密度函数的概念	155
3.8.2 正态分布	156
3.8.3 指数分布	159
3.8.4 均匀分布	159
3.8.5 利用 Excel 求正态分布的概率	160
3.8.6 利用 Excel 求指数分布的概率	161
3.9 随机变量的数字特征	162
3.9.1 数学期望	162
3.9.2 随机变量的方差	164
3.9.3 几个常见分布的数学期望和方差	165
3.10 总体 样本 统计量	167
3.10.1 总体 个体	168
3.10.2 样本	168
3.10.3 统计量	168
3.10.4 统计数据描述	169
3.11 参数估计	172
3.11.1 期望与方差的点估计	172
3.11.2 数学期望的区间估计	173
3.11.3 方差的区间估计	177
3.11.4 利用 Excel 求期望与方差的点估计值	178
3.11.5 利用 Excel 求期望与方差的区间估计	180
3.12 假设检验	184
3.12.1 假设检验的基本思想	184
3.12.2 U 检验法	186
3.12.3 t 检验法	187
3.12.4 χ^2 检验法	188
3.12.5 利用 Excel 进行假设检验	188
3.13 一元线性回归分析	191
3.13.1 数学模型	191
3.13.2 相关检验	194
3.13.3 利用回归方程进行预测	196
3.13.4 利用 Excel 进行回归分析	197
复习题 3	200
第 4 章 Mathematica 使用简介	203
4.1 Mathematica 概述	203
4.1.1 Mathematica 简介	203
4.1.2 Mathematica 的基本用法	203

4.1.3 数 运算符 函数 变量 表达式	204
4.1.4 Mathematica 的数学运算	208
4.1.5 文件的保存	209
4.1.6 查询与帮助	209
4.2 Mathematica 在高等数学中的应用	210
4.2.1 求函数的极限	210
4.2.2 求函数的导数与微分	210
4.2.3 求积分	211
4.2.4 解微分方程	211
4.2.5 矩阵的运算	212
4.2.6 解线性方程组	214
4.2.7 解线性规划	216
4.3 Mathematica 输入模板的使用	218
4.4 Mathematica 的函数作图	221
4.4.1 绘制显函数的图像	221
4.4.2 绘制参数方程所表示的曲线	224
4.4.3 绘制极坐标方程所表示的曲线	225
4.4.4 绘制隐函数的图像	225
4.4.5 图形的组合	226
4.5 Mathematica 在数理统计中的应用	228
4.5.1 描述统计	228
4.5.2 区间估计	229
4.5.3 假设检验	231
4.5.4 回归分析	233
复习题 4	236
第5章 用 WinQSB 求解线性规划	239
5.1 WinQSB 概述	239
5.1.1 WinQSB 简介	239
5.1.2 WinQSB 的启动	240
5.2 用 WinQSB 求解线性规划	240
5.3 用 WinQSB 求解运输问题	245
复习题 5	248
附录1 泊松分布表	250
附录2 正态分布表	252
附录3 t 分布表	253
附录4 χ^2 分布表	254
附录5 相关系数检验表	255
参考文献	256

第1章 一元函数微积分初步

1.1 初等函数

1.1.1 基本初等函数

我们把幂函数 $y = x^a$ (其中 a 为常数), 指数函数 $y = a^x$ (其中 a 为常数, $a > 0$ 且 $a \neq 1$), 对数函数 $y = \log_a x$ (其中 a 为常数, $a > 0$ 且 $a \neq 1$), 三角函数: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, 反三角函数: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$ 这五类函数统称为基本初等函数 (basic elementary functions).

1.1.2 复合函数

在函数 $y = \ln(1+x^2)$ 中, 可以看出, 任给一个 x 值, 可以确定一个 $1+x^2$ 的值, 进而确定一个 y 值. 若设 $u = 1+x^2$, 则 $y = \ln u$. 也就是说, 对于任一个 x 值, 通过中间变量 u , 总有一个确定的 y 值与之相对应, 这时, 我们说 y 是 x 的复合函数.

定义 设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, 而 u 是 x 的函数 $u = \varphi(x)$, 若对于数集 A 上的任一个 x 值, 通过中间变量 u , 总有确定的 y 值与之对应, 那么, y 称为 x 的复合函数 (composite function). 它可以看作是由 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的, 记作 $y = f[\varphi(x)]$.

例如, 函数 $y = \sin^2 x$ 可以看作是由 $y = u^2$ 和 $u = \sin x$ 复合而成的.

例 指出下列函数的复合过程:

- (1) $y = \sqrt{1+x^2}$; (2) $y = \cos 2x$;
(3) $y = \sin^2(2x+1)$; (4) $y = \sin(2x+1)^2$;

解 (1) $y = \sqrt{1+x^2}$ 是由 $y = \sqrt{u}$, $u = 1+x^2$ 复合而成的.

(2) $y = \cos 2x$ 是由 $y = \cos u$, $u = 2x$ 复合而成的.

(3) $y = \sin^2(2x+1)$ 是由 $y = u^2$, $u = \sin v$, $v = 2x+1$ 复合而成的.

(4) $y = \sin(2x+1)^2$ 是由 $y = \sin u$, $u = v^2$, $v = 2x+1$ 复合而成的.

练习

指出下列函数的复合过程:

$$\begin{aligned} (1) y &= \sqrt{4-x^2}; & (2) y &= \cos \sqrt{x}; & (3) y &= \tan x^2; \\ (4) y &= \tan^2 x; & (5) y &= \sin^2 \frac{1}{x}; & (6) y &= \cos(3x-1)^2. \end{aligned}$$

1.1.3 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合所形成的函数称为初等函数 (elementary function).

例如, $y = \sqrt{1+x^2}$, $y = x^2 + \ln(1+x)$, $y = e^{x^2}$, $y = \arcsin \frac{1}{x}$ 等都是初等函数.

本课程中所讨论的函数大多是初等函数.

下面我们介绍在工程技术中经常用到的双曲函数:

双曲正弦 $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 双曲余弦 $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 双曲正切 $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

习题 1-1

指出下列函数的复合过程:

$$\begin{aligned} (1) y &= \sqrt{4-x^2}; & (2) y &= (3x+1)^3; & (3) y &= \sin \frac{x}{2}; \\ (4) y &= e^{\sqrt{x}}; & (5) y &= \cos^3(2x-1); & (6) y &= \cos(2x-1)^2. \end{aligned}$$

1.2 函数的极限

1.2.1 数列的极限

观察下面数列在 n 无限增大时的变化趋势:

$$(1) x_n = \frac{n}{n+1}, \text{ 即 } \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

$$(2) x_n = \frac{1}{10^n}, \text{ 即 } \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$$

可以看出, 当 n 无限增大时, 数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 无限趋近于 1, 数列 $x_n = \frac{1}{10^n}$ 无限趋近于 0.

一般地, 我们有:

定义 如果当 n 无限增大时, 数列 x_n 无限趋近于某一个确定的常数 A , 那么 A 就称

为数列 x_n 的极限(limit of a number sequence). 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$$

据此定义, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n} = 0$

例1 观察下面数列的变化趋势,并写出它们的极限.

$$(1) x_n = \frac{1}{n} \qquad (2) x_n = 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$(3) x_n = (-1)^n \frac{1}{n} \qquad (4) x_n = 2$$

解 可以看出:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2$$

由例(4)可以看出:常数的极限就是该常数本身. 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C = C \quad (C \text{ 为常数})$$

需要指出的是:并非任意数列都有极限.

例如, $x_n = (-1)^n$, 当 n 无限增大时, x_n 在 1 和 -1 这两个数上来回跳动, 并不趋近于某一个常数, 所以该数列没有极限.

又如, $x_n = 2^n$, 当 n 无限增大时, x_n 无限增大, 并不趋近于某一个确定的常数, 所以, 该数列没有极限. 但为了记述 $x_n = 2^n$ 在 n 无限增大时, 其绝对值无限变大这种变化趋势, 我们仍记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$.

练习

求下列数列的极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right); \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right); \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}; \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} n; \quad (5) \lim_{n \rightarrow \infty} [1 + (-1)^n].$$

1.2.2 函数的极限

由于函数的变化是由自变量的变化引起的, 因此必须首先指出自变量的变化趋势, 方能谈到函数的变化趋势. 一般地说, 自变量的变化趋势有以下两种:

(1) x 以任意方式趋于 x_0 , 记作 $x \rightarrow x_0$. 特别地, 如果 x 从小于 x_0 的方向趋于 x_0 , 记作 $x \rightarrow x_0^-$; 如果 x 从大于 x_0 的方向趋于 x_0 , 记作 $x \rightarrow x_0^+$.

(2) x 的绝对值无限增大, 记作 $x \rightarrow \infty$. 如果 x 从某一时刻起, 只取正值, 其绝对值无限增大, 记作 $x \rightarrow +\infty$; 如果 x 从某一时刻起, 只取负值, 其绝对值无限增大, 记作 $x \rightarrow -\infty$.

1. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的极限

观察下列函数在 $x \rightarrow \infty$ 时的变化趋势:

$$(1) y = \frac{1}{x}; \quad (2) y = 1 + \frac{1}{x^2}$$

可以看出, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 无限趋近于 0; 函数 $y = 1 + \frac{1}{x^2}$ 无限趋近于 1. 仿照数列极限的定义, 给出函数极限的定义:

定义 如果 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某个确定的常数 A , 那么 A 就称为函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限 (limit of a function). 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

$$\text{显然, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

仿照当 $x \rightarrow \infty$ 时函数极限的定义, 我们给出当 $x \rightarrow +\infty$ (或 $x \rightarrow -\infty$) 时函数极限的定义:

定义 如果 $x \rightarrow +\infty$ (或 $x \rightarrow -\infty$) 时, 函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某个确定的常数 A , 那么 A 就称为函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ (或 $x \rightarrow -\infty$) 时的极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad (\text{或 } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A)$$

例 2 求下列函数的极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x; \quad (4) \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x.$$

$$\text{解 } (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \infty$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = \infty$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

例 3 讨论在 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $y = \sin x$ 的极限.

解 因为在 $x \rightarrow \infty$ 时, $\sin x$ 的值遍取 $[-1, 1]$ 上的所有实数, 并不趋近于某一个常数, 所以,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \text{ 不存在.}$$

同理, $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$ 不存在.

2. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的极限

观察当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $y = 1 + x^2$ 的变化趋势. 可以发现, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $y = 1 + x^2$ 的函数值无限趋近于 1. 一般地, 我们有

定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左右两边近旁有定义, 如果 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某个确定的常数 A , 那么 A 就称为 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

$$\text{显然, } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2) = 1$$

例4 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \cos x; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 1} \ln x; \quad (4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$

(4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$

需要指出的是,函数的极限是考察当自变量 x 趋于某一点 x_0 (但永远不等于 x_0) 时,函数的变化趋势,因此在函数极限定义中并没有要求函数 $f(x)$ 在 x_0 点有定义. 这就是说,函数在一点处有无极限与函数在该点处有无定义无关.

例如,函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 在 $x=1$ 点没有定义,当 $x \rightarrow 1$ 时, $y = \frac{1}{x-1}$ 的绝对值越来越大,并不趋近于某个确定的常数,因此,函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 在 $x=1$ 点没有极限. 函数 $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 点没有定义,注意到,当 x 趋于 1 但永远不等于 1 时,分子分母可以同时约去公因子 $(x-1)$,从而有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

练习

求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right); \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right); \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x; \quad (5) \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x;$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \pi} \sin x; \quad (7) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x; \quad (8) \lim_{x \rightarrow 0} e^x; \quad (9) \lim_{x \rightarrow 0} (2-x^2); \quad (10) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2).$$

3. 单侧极限

前面我们讨论了在 $x \rightarrow x_0$ 与 $x \rightarrow \infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限. 自变量 x 既可以从 x_0 的左边,也可以从 x_0 的右边趋于 x_0 . 当 x 仅从 x_0 的左边趋于 x_0 时,即 $x \rightarrow x_0^-$ 时,若 $f(x)$ 有极限,我们称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的左极限;当 x 仅从 x_0 的右边趋于 x_0 时,即 $x \rightarrow x_0^+$ 时,若 $f(x)$ 有极限,我们称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的右极限.

定义 如果当 $x \rightarrow x_0^-$ 时,函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A ,那么 A 就称为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左极限(left limit). 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

如果当 $x \rightarrow x_0^+$ 时,函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A ,那么 A 就称为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的右极限(right limit). 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

左极限和右极限统称单侧极限.

例如,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

又例如,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$$

显然, 函数在一点处极限存在的充分必要条件是函数在该点处的左右极限都存在并且相等.

例 5 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限.

解 $\because \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

例 6 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限.

解 $\because \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

练习

1. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限.
2. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x & x \geq 0 \\ x^2 + 1 & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限.

习题 1-2

1. 求下列数列的极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n}$; (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n}$; (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n)$.

2. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$; (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$; (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$; (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$;
 (5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$; (6) $\lim_{x \rightarrow 1} \lg x$; (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$; (8) $\lim_{x \rightarrow 0} 2^x$;
 (9) $\lim_{x \rightarrow 0} (2x+1)$; (10) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$.

3. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ 1-x & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限.

4. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq 1 \\ x^2+1 & x < 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处的极限.

1.3 极限的四则运算法则

根据极限的定义求极限,只有在特别简单的情况下才有可能.为了计算比较复杂的极限,下面给出极限的四则运算法则.

定理 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 均存在,则

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

特别地

$$\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0)$$

该定理对于在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限同样成立.

例1 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (2x+1); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+6}{x^2+7}.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x) + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+6}{x^2+7} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-2x+6)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+7)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 2x + \lim_{x \rightarrow 1} 6}{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 7} \\ &= \frac{1-2+6}{1+7} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

例2 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-3}.$$

解 (1) 在 $x \rightarrow 2$ 时,分母 $(x-2)$ 的绝对值越来越小,而分子是个常数,因此整个分式的绝对值是越来越大,故

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2} = \infty$$

(2) 在 $x \rightarrow 3$ 时,分母 $(x-3)$ 的绝对值越来越小,而分子的极限是个常数,因此整个分式的绝对值是越来越大,故

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-3} = \infty$$

一般地说,若分母的极限为0,而分子的极限为一个不等于0的常数,则整个分式的极限为 ∞ .

练习

求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x-1}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{x+2}.$$

例3 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}.$$

解 (1) $x \rightarrow 2$ 时,分母极限为0,不能直接利用极限的四则运算法则求极限,但注意到, $x \rightarrow 2$ 时,分子极限也为0,我们知道, $x \rightarrow 2$, 但 $x \neq 2$, 故可以约去分式中极限为0的公因子 $(x-2)$, 从而有

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

(2) $x \rightarrow 1$ 时,分母的极限为0,同时分子的极限也为0,而在 $x \rightarrow 1$ 的过程中 $x \neq 1$, 故可以先对分子进行因式分解,然后分子分母同时约去极限为0的公因子 $(x-1)$, 从而有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 4$$

(3) 在 $x \rightarrow 0$ 时,分母的极限为0,同时分子的极限也为0,而分子是一个无理根式,对分子有理化,得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1 \end{aligned}$$

一般地,若分母极限为0,同时分子极限也为0,可以通过恒等变形,约去极限为0的公因子,然后再利用极限的四则运算法则求极限.

练习

求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x-1}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x+4}-4}{x-4}.$$

例4 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{3x^2+x+1}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x+1}{2x^3+x^2-x+3}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+2}{x^2+x+3}.$$

解 (1) 在 $x \rightarrow \infty$ 时,分子、分母极限都是 ∞ ,极限不存在,不能直接利用极限的四则