21世纪高职高专基础教育规划教材

应用数学教程

YINGYONG SHUXUE JIAOCHENG

主编 张慧颖 周成林

西北农林科技大学出版社
Northwest A&F University Press

内容提要

本书主要内容包括一元函数微积分初步、微分方程、线性代数与线性规划基础、概率与数理统计初步、Mathematica 简介、用 WinQSB 求解线性规划等。

本书可作为高职高专院校的教学用书，也可作为中等专业学校学生的数学教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学教程/张慧颖，周成林主编. —杨凌：西北农林科技大学出版社，2008.6
ISBN 978-7-81092-407-8

Ⅰ.高… Ⅱ.①张…②周… Ⅲ.应用数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 073585 号

高等应用数学教程
张慧颖　周成林　主编

出版发行　西北农林科技大学出版社
地　　址　陕西杨凌杨武路 3 号　　邮　编：712100
电　　话　总编室：029—87093105　　发行部：87093302
电子邮箱　press0809@163.com
印　　刷　河南鑫基印务有限公司
版　　次　2008 年 6 月第 1 版
印　　次　2008 年 6 月第 1 次
开　　本　1/16　787 mm×1092 mm
印　　张　16.75
字　　数　404 千字

ISBN 978-7-81092-407-8

定价：29.80 元

前　言

随着科学技术的发展,各学科对数学的要求是越来越高,而与此相矛盾是数学课的教学课时越来越少,特别是职业技术院校。针对这种情况,有不少学校调整了数学课的教学内容,修改了教学大纲,但改革的效果并不明显。究其因,人们发现,虽然使用的是新的教学大纲,但教材还是原来的教材或者是按照原来的体系编写的教材。事实表明,教学体系、教学内容、教学大纲的改革最终都要落实在教材的改革上。这一点随着时间的推移,已逐渐成为有关学者和专家的共识。

近年来,有不少人对高职高专数学课程的改革做了许多艰苦的工作,并且编写出版了不少面向高职高专的教材。然而,现有的高职高专数学教材大多脱胎于普通高校的高等数学,教材篇幅较长,需要学时较多,不能很好地满足高职高专数学教学需要。本教材力求从高职教育的需要和现状出发,在少学时条件下,改革数学课的教学体系和教学内容。本着"以服务为宗旨,以应用为目的,以实用为主,以必须、够用为度"的原则,精心选取教学内容,降低难度,淡化理论推导,强化实际应用,立足能力培养,突出数学课在专业基础课和专业课学习中的工具作用,重新组合知识结构和逻辑结构。

本教材在内容的编排和取舍上,注意由浅入深,由易到难,由具体到抽象,循序渐进。概念的引入、基本理论的介绍都以实际问题为背景,删去了繁琐的理论推导和证明,淡化了数学运算技巧的训练,把教学的重点放在了数学思想的培养和数学知识的运用方面。在编写体系上,充分体现讲练结合的原则,边讲边练,比较适合高职高专学生的年龄特点和学习习惯。此外,还编写了利用 Excel 进行数学计算的内容以及数学软件 Mathematica 简介和用 WinQSB 软件求解线性规划的内容,这将有助于培养学生运用数学知识解决实际问题的能力。

本教材将教学内容划分为基础模块和应用(选学)模块。基础模块教学内容的选定以保证各专业对数学的共同需求为依据。基础模块是所有学生的必修课。基础模块包括:一元函数微积分初步、微分方程、Mathematica 简介。应用(选学)模块包括:线性代数与线性规划基础、概率与数理统计初步、用 WinQSB 求解线性规划等。

目录中标记星号(*)内容为选学内容。

建议学时分配如下：

序号	教　学　内　容	教学时数	
		必学时数	选学时数
1	一元函数微积分初步	36	10
2	* 线性代数与线性规划基础		24
3	* 概率与数理统计初步		42
4	Mathematica 使用简介	8	2
5	* 用 WinQSB 求解线性规划		2
共　计		44	80

本书由张慧颖、周成林担任主编。参加本书编写工作的有李银川（第 1 章第 1 ~ 6 节）、徐前进（第 1 章第 7 ~ 15 节）、孙红伟（第 1 章第 16 ~ 20 节）、杨朝晖（第 2 章第 1 ~ 7 节）；周成林（第 2 章第 8 ~ 9 节、第 3 章第 1 ~ 7 节、第 5 章）、张慧颖（第 3 章第 8 ~ 13 节、第 4 章），全书由张慧颖统稿。

由于编者水平有限，不当之处在所难免，恳请各位老师和读者批评指正。

张慧颖　周成林

2008 年 5 月

目录

第 1 章　一元函数微积分初步

1.1　初等函数

1.1.1　基本初等函数

我们把幂函数 $y=x^{\alpha}$(其中 α 为常数),指数函数 $y=a^{x}$(其中 a 为常数,$a>0$ 且 $a\neq 1$),对数函数 $y=\log_a x$(其中 a 为常数,$a>0$ 且 $a\neq 1$),三角函数:$y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$,反三角函数:$y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\operatorname{arccot} x$ 这五类函数统称为**基本初等函数**(basic clementary functions).

1.1.2　复合函数

在函数 $y=\ln(1+x^2)$ 中,可以看出,任给一个 x 值,可以确定一个 $1+x^2$ 的值,进而确定一个 y 值. 若设 $u=1+x^2$,则 $y=\ln u$. 也就是说,对于任一个 x 值,通过中间变量 u,总有一个确定的 y 值与之相对应,这时,我们说 y 是 x 的复合函数.

定义　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,若对于数集 A 上的任一个 x 值,通过中间变量 u,总有确定的 y 值与之对应,那么,y 称为 x 的**复合函数**(composite function). 它可以看作是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的,记作 $y=f[\varphi(x)]$.

例如,函数 $y=\sin^2 x$ 可以看作是由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的.

例　指出下列函数的复合过程:

(1) $y=\sqrt{1+x^2}$;　　(2) $y=\cos 2x$;

(3) $y=\sin^2(2x+1)$;　　(4) $y=\sin(2x+1)^2$;

解　(1) $y=\sqrt{1+x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$,$u=1+x^2$ 复合而成的.

(2) $y=\cos 2x$ 是由 $y=\cos u$,$u=2x$ 复合而成的.

(3) $y=\sin^2(2x+1)$ 是由 $y=u^2$,$u=\sin v$,$v=2x+1$ 复合而成的.

(4) $y=\sin(2x+1)^2$ 是由 $y=\sin u$,$u=v^2$,$v=2x+1$ 复合而成的.

练习

指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{4-x^2}$；　(2) $y=\cos\sqrt{x}$；　(3) $y=\tan x^2$；

(4) $y=\tan^2 x$；　(5) $y=\sin^2\frac{1}{x}$；　(6) $y=\cos(3x-1)^2$.

1.1.3　初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合所形成的函数称为**初等函数**(clementary function).

例如，$y=\sqrt{1+x^2}$，$y=x^2+\ln(1+x)$，$y=e^{x^2}$，$y=\arcsin\frac{1}{x}$等均是初等函数.

本课程中所讨论的函数大多是初等函数.

下面我们介绍在工程技术中经常用到的双曲函数：

双曲正弦 $\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，双曲余弦 $\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，双曲正切 $\operatorname{th} x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

习题　1-1

指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{4-x^2}$；　(2) $y=(3x+1)^3$；　(3) $y=\sin\frac{x}{2}$；

(4) $y=e^{\sqrt{x}}$；　(5) $y=\cos^3(2x-1)$；　(6) $y=\cos(2x-1)^2$.

1.2　函数的极限

1.2.1　数列的极限

观察下面数列在 n 无限增大时的变化趋势：

(1) $x_n=\frac{n}{n+1}$，即$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots\cdots$

(2) $x_n=\frac{1}{10^n}$，即$\frac{1}{10},\frac{1}{100},\frac{1}{1000},\cdots\cdots$

可以看出，当 n 无限增大时，数列 $x_n=\frac{n}{n+1}$无限趋近于1，数列 $x_n=\frac{1}{10^n}$无限趋近于0.

一般地，我们有：

定义　如果当 n 无限增大时，数列 x_n 无限趋近于某一个确定的常数 A，那么 A 就称

为**数列 x_n 的极限**(limit of a number sequence). 记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A$$

据此定义,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1,\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{10^n}=0$

例 1　观察下面数列的变化趋势,并写出它们的极限.

(1)$x_n=\dfrac{1}{n}$　　(2)$x_n=1-\dfrac{1}{n^2}$

(3)$x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$　　(4)$x_n=2$

解　可以看出:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=1$

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}=0$

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}2=2$

由例(4)可以看出:常数的极限就是该常数本身. 即

$$\lim_{n\to\infty}C=C\qquad(C\text{ 为常数})$$

需要指出的是:并非任意数列都有极限.

例如,$x_n=(-1)^n$,当 n 无限增大时,x_n 在 1 和 -1 这两个数上来回跳动,并不趋近于某一个常数,所以该数列没有极限.

又如,$x_n=2^n$,当 n 无限增大时,x_n 无限增大,并不趋近于某一个确定的常数,所以,该数列没有极限. 但为了记述 $x_n=2^n$ 在 n 无限增大时,其绝对值无限变大这种变化趋势,我们仍记作$\lim\limits_{n\to\infty}2^n=\infty$.

练习

求下列数列的极限:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{n}\right)$;　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)$;　(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}$;　(4)$\lim\limits_{n\to\infty}n$;　(5)$\lim\limits_{n\to\infty}[1+(-1)^n]$.

1.2.2　函数的极限

由于函数的变化是由自变量的变化引起的,因此必须首先指出自变量的变化趋势,方能谈到函数的变化趋势. 一般地说,自变量的变化趋势有以下两种:

(1)x 以任意方式趋于 x_0,记作 $x\to x_0$. 特别地,如果 x 从小于 x_0 的方向趋于 x_0,记作 $x\to x_0^-$;如果 x 从大于 x_0 的方向趋于 x_0,记作 $x\to x_0^+$.

(2)x 的绝对值无限增大,记作 $x\to\infty$. 如果 x 从某一时刻起,只取正值,其绝对值无限增大,记作 $x\to+\infty$;如果 x 从某一时刻起,只取负值,其绝对值无限增大,记作 $x\to-\infty$.

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=f(x)$ 的极限

观察下列函数在 $x\to\infty$ 时的变化趋势：

(1) $y=\dfrac{1}{x}$；　　(2) $y=1+\dfrac{1}{x^2}$

可以看出，当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 无限越趋近于 0；函数 $y=1+\dfrac{1}{x^2}$ 无限趋近于 1. 仿照数列极限的定义，给出函数极限的定义：

定义 如果 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某个确定的常数 A，那么 A 就称为函数 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的**极限**(limit of a function). 记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$$

显然，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$.

仿照当 $x\to\infty$ 时函数极限的定义，我们给出当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时函数极限的定义：

定义 如果 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某个确定的常数 A，那么 A 就称为函数 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时的**极限**. 记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad (\text{或} \lim_{x\to-\infty}f(x)=A)$$

例 2 求下列函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$；　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$；　(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x$；　(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=\infty$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$

例 3 讨论在 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\sin x$ 的极限.

解 因为在 $x\to\infty$ 时，$\sin x$ 的值遍取$[-1,1]$上的所有实数，并不趋近于某一个常数，所以，

$$\lim_{x\to\infty}\sin x \text{ 不存在.}$$

同理，$\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 不存在.

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的极限

观察当 $x\to0$ 时，函数 $y=1+x^2$ 的变化趋势. 可以发现，当 $x\to0$ 时，函数 $y=1+x^2$ 的函数值无限趋近于 1. 一般地，我们有

定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左右两边近旁有定义，如果 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某个确定的常数 A，那么 A 就称为 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的**极限**. 记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

显然，$\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)=1$

例4　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$;　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$;　(3) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x$;　(4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\sin x$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$

(4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\sin x=1$

需要指出的是，函数的极限是考察当自变量 x 趋于某一点 x_0（但永远不等于 x_0）时，函数的变化趋势，因此在函数极限定义中并没有要求函数 $f(x)$ 在 x_0 点有定义. 这就是说，函数在一点处有无极限与函数在该点处有无定义无关.

例如，函数 $y=\frac{1}{x-1}$ 在 $x=1$ 点没有定义，当 $x\to 1$ 时，$y=\frac{1}{x-1}$ 的绝对值越来越大，并不趋近于某个确定的常数，因此，函数 $y=\frac{1}{x-1}$ 在 $x=1$ 点没有极限. 函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 点没有定义，注意到，当 x 趋于 1 但永远不等于 1 时，分子分母可以同时约去公因子 $(x-1)$，从而有

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

练习

求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)$;　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)$;　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$;　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$;　(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x$;

(6) $\lim\limits_{x\to\pi}\sin x$;　(7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x$;　(8) $\lim\limits_{x\to 0}e^x$;　(9) $\lim\limits_{x\to 0}(2-x^2)$;　(10) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)$.

3. 单侧极限

前面我们讨论了在 $x\to x_0$ 与 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限. 自变量 x 既可以从 x_0 的左边，也可以从 x_0 的右边趋于 x_0. 当 x 仅从 x_0 的左边趋于 x_0 时，即 $x\to x_0^-$ 时，若 $f(x)$ 有极限，我们称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的左极限；当 x 仅从 x_0 的右边趋于 x_0 时，即 $x\to x_0^+$ 时，若 $f(x)$ 有极限，我们称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的右极限.

定义　如果当 $x\to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就称为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的**左极限**(left limit). 记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A$$

如果当 $x\to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就称为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的**右极限**(right limit). 记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

左极限和右极限统称**单侧极限**.

例如,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0^+}1=1$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to0^-}(-1)=-1$$

又例如,

$$\lim_{x\to0^-}e^x=1,\lim_{x\to0^+}e^x=1$$

显然,函数在一点处极限存在的充分必要条件是函数在该点处的左右极限都存在并且相等.

例 5 讨论函数$f(x)=\begin{cases}x+1 & x\geqslant0\\ x-1 & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限.

解 $\because\quad \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1$

$\therefore\quad \lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$

$\therefore\quad \lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

例 6 讨论函数$f(x)=\begin{cases}e^x & x\geqslant0\\ x+1 & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限.

解 $\because\quad \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x+1)=1$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^x=1$

$\therefore\quad \lim\limits_{x\to0}f(x)=1$

练习

1. 讨论函数$f(x)=\begin{cases}e^x & x\geqslant0\\ x^2 & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限.

2. 讨论函数$f(x)=\begin{cases}2^x & x\geqslant0\\ x^2+1 & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限.

习题 1-2

1. 求下列数列的极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}(-n)$.

2. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$; (3) $\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$; (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x$;

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$; (6) $\lim\limits_{x\to1}\lg x$; (7) $\lim\limits_{x\to0}\cos x$; (8) $\lim\limits_{x\to0}2^x$;

(9) $\lim\limits_{x\to0}(2x+1)$; (10) $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x$.

3. 讨论函数$f(x)=\begin{cases} e^x & x<0 \\ 1-x & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限.

4. 讨论函数$f(x)=\begin{cases} x+2 & x\geqslant 1 \\ x^2+1 & x<1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处的极限.

1.3　极限的四则运算法则

根据极限的定义求极限,只有在特别简单的情况下才有可能. 为了计算比较复杂的极限,下面给出极限的四则运算法则.

定理　设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$均存在,则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

特别地

$$\lim_{x\to x_0}kf(x)=k\lim_{x\to x_0}f(x)$$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$　$(\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0)$

该定理对于在 $x\to\infty$ 时的极限同样成立.

例 1　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+6}{x^2+7}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=\lim\limits_{x\to 1}(2x)+\lim\limits_{x\to 1}1=2\lim\limits_{x\to 1}x+1=2\times 1+1=3$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+6}{x^2+7}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+6)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+7)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}2x+\lim\limits_{x\to 1}6}{\lim\limits_{x\to 1}x^2+\lim\limits_{x\to 1}7}$

$$=\frac{1-2+6}{1+7}=\frac{5}{8}$$

例 2　求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{x-2}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x-3}$.

解　(1)在 $x\to 2$ 时,分母$(x-2)$的绝对值越来越小,而分子是个常数,因此整个分式的绝对值是越来越大,故

$$\lim_{x\to 2}\frac{3}{x-2}=\infty$$

(2)在 $x\to 3$ 时,分母$(x-3)$的绝对值越来越小,而分子的极限是个常数,因此整个分式的绝对值是越来越大,故

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x-3} = \infty$$

一般地说,若分母的极限为0,而分子的极限为一个不等于0的常数,则整个分式的极限为∞.

练习

求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2}{x-1}$;　　(2) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x+3}{x+2}$.

例3　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$;　　(2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}$;　　(3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

解　(1) $x \to 2$ 时,分母极限为0,不能直接利用极限的四则运算法则求极限,但注意到,$x \to 2$ 时,分子极限也为0,我们知道,$x \to 2$,但 $x \neq 2$,故可以约去分式中极限为0的公因子$(x-2)$,从而有

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+2) = 4$$

(2) $x \to 1$ 时,分母的极限为0,同时分子的极限也为0,而在 $x \to 1$ 的过程中 $x \neq 1$,故可以先对分子进行因式分解,然后分子分母同时约去极限为0的公因子$(x-1)$,从而有

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+3) = 4$$

(3) 在 $x \to 0$ 时,分母的极限为0,同时分子的极限也为0,而分子是一个无理根式,对分子有理化,得

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1$$

一般地,若分母极限为0,同时分子极限也为0,可以通过恒等变形,约去极限为0的公因子,然后再利用极限的四则运算法则求极限.

练习

求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$;　　(2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+3x-4}{x-1}$;　　(3) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{3x+4}-4}{x-4}$.

例4　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2+1}{3x^2+x+1}$;　　(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2-2x+1}{2x^3+x^2-x+3}$;　　(3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3+2}{x^2+x+3}$.

解　(1) 在 $x \to \infty$ 时,分子、分母极限都是∞,极限不存在,不能直接利用极限的四则